УДК 519.6

Н.В. МАЙКО

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Получены оценки с весом для точности метода сеток при решении начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения в случае смешанного краевого условия (условия Дирихле и Неймана). Показано, что в пространственно-временном прямоугольнике точность метода выше вблизи дна и боковой стороны, на которой задано краевое условие Дирихле.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, смешанное краевое условие, разностная схема, оценка с весом, учет влияния начального и краевого условий.

ВВЕДЕНИЕ

Приближенное решение краевой задачи для эллиптического уравнения в канонических областях, полученное сеточным методом [1], удовлетворяет краевому условию Дирихле точно. Следовательно, можно ожидать, что точность разностной схемы будет выше вблизи границы области, чем вдали от нее. Количественное выражение указанного наблюдения впервые предложено в [2, 3].

Влияние краевого условия на скорость сходимости разностной схемы для более общего эллиптического уравнения, представленного в дивергентной форме, изучено в [4]. Описанные здесь идеи развиты в [5], где получены априорные оценки погрешности традиционных разностных схем для одно- и двумерного уравнений теплопроводности при краевом условии Дирихле. Из доказанных оценок следует, что точность схемы выше вблизи боковых сторон и дна пространственно-временного прямоугольника в одномерном случае и вблизи боковых граней и дна пространственно-временного параллелепипеда — в двумерном.

Цель настоящей статьи — получить оценки с весом для точности метода сеток при решении начально-краевой задачи для одномерного параболического уравнения в случае смешанного краевого условия (с краевыми условиями Дирихле и Неймана).

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T=(0,1)\times(0,T),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u(1,t)=0,\ \ t\in(0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in(0,1).$$

Введем сеточные множества

$$\omega=\{x_i=ih,\ i=\overline{1,N-1},\ h=1/N,\ N\geq 2 \text{ — целое}\},$$

$$\omega^-=\omega\cup\{0\},\ \omega^+=\omega\cup\{1\},\ \overline{\omega}=\omega\cup\{0\}\cup\{1\},$$

$$\omega_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=\overline{1,M-1},\ \tau=T/M,\ M\geq 2 \text{ — целое}\},\ \omega_{Q_T}=\omega^-\times\omega_\tau.$$

Применяя оператор точных разностных схем [6]

$$(Tv)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)v(\xi)\,d\xi, & x\in\omega,\\ \dfrac{2}{h^2}\displaystyle\int_0^h(h-\xi)v(\xi)\,d\xi, & x=0,\end{cases} \tag{2}$$

который имеет свойства

$$\left(T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(x)=\begin{cases}u_{\bar{x}x},\ x\in\omega,\\ \dfrac{2}{h}u_x,\ x=0,\end{cases}$$

аппроксимируем задачу (1) разностной схемой

$$y_{\bar{t}}(x,t)+(Ay)(x,t)=(Tf)(x,t),\ \ (x,t)\in\omega_{Q_T}=\omega^-\times\omega_\tau,$$

$$y(1,t)=0,\ \ t\in\omega_\tau,\qquad y(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in\omega^-, \tag{3}$$

где $(Ay)(x)=-\begin{cases}y_{\bar{x}x},\ x\in\omega,\\ \dfrac{2}{h}y_x,\ x=0.\end{cases}$

На множестве H_h сеточных функций, заданных на $\overline{\omega}$ и обращающихся в нуль при $x=1$, определим скалярное произведение и норму

$$(y,v)=\sum_{x\in\omega} hy(x)v(x)+\frac{h}{2}y(0)v(0), \qquad \|v\|=\sqrt{(v,v)}=\left(\sum_{x\in\omega} hv^2(x)+\frac{h}{2}v^2(0)\right)^{1/2}.$$

Известно [1], что в пространстве H_h разностный оператор A симметричен и положительно определен.

Для функции погрешности $z(x,t)=u(x,t)-y(x,t)$ получим разностную схему

$$z_{\bar{t}}(x,t)+(Az)(x,t)=\psi(x,t),\ (x,t)\in\omega_{Q_T}=\omega^-\times\omega_\tau,$$

$$z(1,t)=0,\ t\in\omega_\tau, \qquad z(x,0)=0,\ x\in\omega^-, \tag{4}$$

где $\psi(x,t)=(Tf)(x,t)-u_{\bar{t}}(x,t)-(Au)(x,t)=\dfrac{d(Tu)}{dt}(x,t)-u_{\bar{t}}(x,t)$, $(x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau$, — погрешность аппроксимации. С помощью функции Грина

$$G(x,\xi)=-\begin{cases}1-\xi, & 0\le x\le\xi,\\ 1-x, & \xi\le x\le 1,\end{cases}$$

разностной краевой задачи $Ay=f$, $x\in\omega^-$, $y(1)=0$, решение задачи (4) можно представить в виде

$$z(x,t)=(G(x,\cdot),\psi(\cdot,t)-z_{\bar{t}}(\cdot,t))=$$

$$=\sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)(\psi(\xi,t)-z_{\bar{t}}(\xi,t))+\frac{h}{2}G(x,0)(\psi(0,t)-z_{\bar{t}}(0,t)),\ (x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau.$$

Отсюда

$$|z(x,t)|\le\sum_{\xi\in\omega} hG(x,\xi)(|\psi(\xi,t)|+|z_{\bar{t}}(\xi,t)|)+\frac{h}{2}G(x,0)(|\psi(0,t)|+|z_{\bar{t}}(0,t)|)\le$$

$$\le(1-x)\left(\sum_{\xi\in\omega} h(|\psi(\xi,t)|+|z_{\bar{t}}(\xi,t)|)+\frac{h}{2}(|\psi(0,t)|+|z_{\bar{t}}(0,t)|)\right)\le$$

$$\le(1-x)(\|\psi(\cdot,t)\|+\|z_{\bar{t}}(\cdot,t)\|),\ (x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau,$$

тогда

$$\frac{|z(x,t)|}{1-x}\le\|\psi(\cdot,t)\|+\|z_{\bar{t}}(\cdot,t)\|,\ (x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau. \tag{5}$$

Для получения априорной оценки с весом оценим здесь второе слагаемое в правой части. Для этого найдем квадрат нормы в H_h левой и правой частей уравнения в (4):

$$\|z_{\bar{t}}(\cdot,t)\|^2+2(z_{\bar{t}}(\cdot,t),Az(\cdot,t))+\|Az(\cdot,t)\|^2=\|\psi(\cdot,t)\|^2,\quad t\in\omega_\tau.$$

Отсюда с учетом тождества

$$\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau 2(z_{\bar{t}}(\cdot,\eta),Az(\cdot,\eta))=-2\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\sum_{\xi\in\omega} hz_{\bar{\eta}}(\xi,\eta)z_{\bar{\xi}\xi}(\xi,\eta)+\frac{h}{2}z_{\bar{\eta}}(0,\eta)\frac{2}{h}z_{\xi}(0,\eta)\right)=$$

$$=-2\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(-\sum_{\xi\in\omega^+} hz_{\bar{\eta}\bar{\xi}}(\xi,\eta)z_{\bar{\xi}}(\xi,\eta)+z_{\bar{\eta}}(1,\eta)z_{\bar{\xi}}(1,\eta)-\right.$$

$$-z_{\bar\eta}(0,\eta)z_{\bar\xi}(h,\eta)+\frac{h}{2}z_{\bar\eta}(0,\eta)\frac{2}{h}z_{\xi}(0,\eta)\Bigg)=2\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{\xi\in\omega^+}hz_{\bar\eta\bar\xi}(\xi,\eta)z_{\bar\xi}(\xi,\eta)=$$

$$=2\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{\xi\in\omega^+}h\frac{z_{\bar\xi}(\xi,\eta)-z_{\bar\xi}(\xi,\eta-\tau)}{\tau}\frac{1}{2}((z_{\bar\xi}(\xi,\eta)-z_{\bar\xi}(\xi,\eta-\tau))+$$

$$+(z_{\bar\xi}(\xi,\eta-\tau)+z_{\bar\xi}(\xi,\eta)))=\tau\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{\xi\in\omega^+}hz^2_{\bar\eta\bar\xi}(\xi,\eta)+\sum_{\xi\in\omega^+}h\sum_{\eta=\tau}^{t}\left(z^2_{\bar\xi}(\xi,\eta)-z^2_{\bar\xi}(\xi,\eta-\tau)\right)=$$

$$=\tau\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{\xi\in\omega^+}hz^2_{\bar\eta\bar\xi}(\xi,\eta)+\sum_{\xi\in\omega^+}hz^2_{\bar\xi}(\xi,t)\ge 0$$

получим оценку
$$\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|z_{\bar\eta}(\cdot,\eta)\|^2\le\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2,\ t\in\omega_\tau.$$

Тогда из неравенства (5) имеем

$$\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\frac{z(x,t)}{1-x}\right)^2\le\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\|\psi(\cdot,t)\|+\|z_{\bar t}(\cdot,t)\|\right)^2\le$$

$$\le 2\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau(\|\psi(\cdot,t)\|^2+\|z_{\bar t}(\cdot,t)\|^2)\le 4\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 1. Для решения $z(x,t)$ задачи (4) справедлива априорная оценка

$$\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\frac{z(x,\eta)}{1-x}\right)^2\le 4\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2,\ (x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau. \quad (6)$$

Оценив норму погрешности аппроксимации в правой части неравенства (6), установим следующий результат.

Теорема 1. Пусть решение $u(x,t)$ задачи (1) удовлетворяет условиям $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\in L_2(Q_T)$. Тогда для точности разностной схемы (3) имеет место априорная оценка с весом

$$\left(\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\frac{z(x,\eta)}{1-x}\right)^2\right)^{1/2}\le 4\sqrt{2}\left(\tau\left(\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(\cdot,\eta)\right\|^2 d\eta\right)^{1/2}+h\left(\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\eta}(\cdot,\eta)\right\|^2 d\eta\right)^{1/2}\right),$$

$$(x,t)\in\omega^-\times\omega_\tau.$$

Доказательство. При $x\in\omega$ с учетом (2) имеем [5]

$$\psi(x,t)=\frac{d}{dt}T(u(\cdot,t))-u_{\bar t}(x,t)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\int_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi-\frac{u(x,t)-u(x,t-\tau)}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\eta-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}d\eta=$$

$$=\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x}^{\xi}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}d\xi_1\,.$$

Отсюда

$$|\psi(x,t)|\le\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{t-\tau}^{t}\left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right|d\eta_1+$$

$$+\frac{1}{\tau h^2}\int\limits_{x-h}^{x+h}(h-|x-\xi|)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x-h}^{x+h}\left|\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right|d\xi_1\le$$

$$\le\frac{1}{\tau h^2}h\tau\sqrt{2h\tau}\left(\int\limits_{x-h}^{x+h}d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right)^2d\eta_1\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{\tau h^2}h^2\sqrt{2h\tau}\left(\int\limits_{t-\tau}^{t}d\eta\int\limits_{x-h}^{x+h}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right)^2d\xi_1\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_{x-h}^{x+h}d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right)^2d\eta_1\right)^{1/2}+\frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_{x-h}^{x+h}d\xi_1\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right)^2d\eta\right)^{1/2}.$$

При $x=0$ с учетом (2) имеем

$$\psi(0,t)=\frac{d}{dt}T(u(\cdot,t))-u_{\bar t}(0,t)=\frac{2}{h^2}\int\limits_{0}^{h}(h-\xi)\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\xi-\frac{u(0,t)-u(0,t-\tau)}{\tau}=$$

$$=\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_{0}^{h}(h-\xi)d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}d\eta-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial u(0,\eta)}{\partial\eta}d\eta=$$

$$=\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_{0}^{h}(h-\xi)\,d\xi\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(0,\eta)}{\partial\eta}\right)d\eta=$$

$$=\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_0^h (h-\xi)\,d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}-\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}-\frac{\partial u(0,\eta)}{\partial \eta}\right)d\eta =$$

$$=\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_0^h (h-\xi)\,d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta \int\limits_{\eta}^{t}\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\,d\eta_1 +\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_0^h (h-\xi)\,d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta \int\limits_0^{\xi}\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\,d\xi_1 ,$$

откуда

$$|\psi(0,t)|\le \frac{2}{\tau h^2}\int\limits_0^h (h-\xi)\,d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta \int\limits_{t-\tau}^{t}\left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right|d\eta_1 +$$

$$+\frac{2}{\tau h^2}\int\limits_0^h (h-\xi)\,d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta \int\limits_0^{h}\left|\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right|d\xi_1 \le$$

$$\le \frac{2}{\tau h^2}\,h\tau\sqrt{h\tau}\left(\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1\right)^{1/2} +$$

$$+\frac{2}{\tau h^2}\,\frac{h^2}{2}\sqrt{h\tau}\left(\int\limits_{t-\tau}^{t} d\eta \int\limits_0^{h}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\xi_1\right)^{1/2} =$$

$$=\frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{h}}\left(\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1\right)^{1/2} +\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\tau}}\left(\int\limits_0^h d\xi_1 \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\eta\right)^{1/2} .$$

Найдем

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2=\sum_{x\in\omega} h\psi^2(x,t)+\frac{h}{2}\psi^2(0,t)=$$

$$=4\tau\sum_{x\in\omega}\int\limits_{x-h}^{x+h} d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1 +\frac{4h^2}{\tau}\sum_{x\in\omega}\int\limits_{x-h}^{x+h} d\xi_1 \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\eta +$$

$$+4\tau\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1 +\frac{h^2}{\tau}\int\limits_0^h d\xi_1 \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\eta \le$$

$$\le 8\tau\int\limits_0^1 d\xi \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1 +\frac{8h^2}{\tau}\int\limits_0^1 d\xi_1 \int\limits_{t-\tau}^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\eta ,$$

тогда

$$\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2 \le 8\tau^2\int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial \eta_1^2}\right)^2 d\eta_1 +8h^2\int\limits_0^1 d\xi_1 \int\limits_0^{t}\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta}\right)^2 d\eta ,$$

а из неравенства (6) следует оценка

$$\left(\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\frac{z(x,\eta)}{1-x}\right)^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le 2\left(8\tau^2\int_0^1 d\xi\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right)^2 d\eta_1+8h^2\int_0^1 d\xi_1\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right)^2 d\eta\right)^{1/2}\le$$

$$\le 4\sqrt{2}\tau\left(\int_0^1 d\xi\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right)^2 d\eta_1\right)^{1/2}+4\sqrt{2}h\left(\int_0^1 d\xi_1\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right)^2 d\eta\right)^{1/2}. \quad \square$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ОТ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ

Обе части уравнения в (4) умножим скалярно в H_h на $z(\cdot, t)$:

$$\sum_{x\in\omega}hz_{\bar t}(x,t)z(x,t)+\frac{h}{2}z_{\bar t}(0,t)z(0,t)-\sum_{x\in\omega}hz_{\bar x x}(x,t)z(x,t)-\frac{h}{2}\frac{2}{h}z_x(0,t)z(0,t)=$$

$$=\sum_{x\in\omega}h\psi(x,t)z(x,t)+\frac{h}{2}\psi(0,t)z(0,t).$$

Преобразуем здесь два первых слагаемых слева:

$$\sum_{x\in\omega}hz_{\bar t}(x,t)z(x,t)+\frac{h}{2}z_{\bar t}(0,t)z(0,t)=$$

$$=\sum_{x\in\omega}h\frac{z(x,t)-z(x,t-\tau)}{\tau}\,\frac{z(x,t)-z(x,t-\tau)+z(x,t)+z(x,t-\tau)}{2}+$$

$$+\frac{h}{2}\frac{z(0,t)-z(0,t-\tau)}{\tau}\,\frac{z(0,t)-z(0,t-\tau)+z(0,t)+z(0,t-\tau)}{2}=$$

$$=\sum_{x\in\omega}\frac{h\tau}{2}z_{\bar t}^2(x,t)+\sum_{x\in\omega}\frac{h}{2\tau}(z^2(x,t)-z^2(x,t-\tau))+\frac{h\tau}{4}z_{\bar t}^2(0,t)+$$

$$+\frac{h}{4\tau}(z^2(0,t)-z^2(0,t-\tau)),$$

а для остальных слагаемых слева имеем

$$-\sum_{x\in\omega}hz_{\bar x x}(x,t)z(x,t)-z_x(0,t)z(0,t)=$$

$$=\sum_{x\in\omega^-}hz_{\bar x}^2(x,t)-z_{\bar x}(1,t)z(1,t)+z_{\bar x}(h,t)z(0,t)-z_x(0,t)z(0,t)=\sum_{x\in\omega^-}hz_{\bar x}^2(x,t).$$

После преобразований получим равенство

$$\sum_{x\in\omega}\frac{h\tau}{2}z_{\bar t}^2(x,t)+\sum_{x\in\omega}\frac{h}{2\tau}(z^2(x,t)-z^2(x,t-\tau))+$$

$$+\frac{h\tau}{4}z_{\bar t}^2(0,t)+\frac{h}{4\tau}(z^2(0,t)-z^2(0,t-\tau))+\sum_{x\in\omega^-}hz_{\bar x}^2(x,t)=(\psi(\cdot,t),z(\cdot,t)),$$

обе части которого умножим на τ и просуммируем:

$$\frac{\tau}{2}\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\,\| z_{\overline{\eta}}(x,\eta)\|^2+\frac{1}{2}\sum_{x\in\omega}h\,(z^2(x,t)-z^2(x,0))+\frac{h}{4}(z^2(0,t)-z^2(0,0))+$$

$$+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{x\in\omega^-}hz_{\overline{x}}^2(x,\eta)=\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\,(\psi(\cdot,\eta),\,z(\cdot,\eta))$$

или

$$\frac{\tau}{2}\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\| z_{\overline{\eta}}(x,\eta)\|^2+\frac{1}{2}\| z(\cdot,t)\|^2+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\sum_{x\in\omega^-}hz_{\overline{x}}^2(x,\eta)=$$

$$=\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\left(\psi(\cdot,\eta)\sqrt{(2+\ln^2\eta)\,\eta},\ \frac{z(\cdot,\eta)}{\sqrt{(2+\ln^2\eta)\eta}}\right).$$

Отсюда с учетом неравенств $(y,v)\le\| y\|\cdot\| v\|\le\frac{1}{2}(\| y\|^2+\| v\|^2)$ получим

$$\frac{1}{2}\| z(\cdot,t)\|^2\le\frac{1}{2}\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2\,(2+\ln^2\eta)\ \eta+\frac{1}{2}\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\frac{\| z(\cdot,\eta)\|^2}{(2+\ln^2\eta)\eta},$$

тогда

$$\frac{\| z(\cdot,t)\|^2}{(2+\ln^2 t)t}\le\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2\,\frac{(2+\ln^2\eta)\eta}{(2+\ln^2 t)\,t}+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\frac{\| z(\cdot,\eta)\|^2}{(2+\ln^2\eta)\eta\,(2+\ln^2 t)\,t},$$

$$\frac{\| z(\cdot,t)\|^2}{(2+\ln^2 t)\,t}\le\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\,\|\psi(\cdot,\eta)\|^2+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\frac{1}{(2+\ln^2\eta)\eta}\,\frac{\| z(\cdot,\eta)\|^2}{(2+\ln^2\eta)\eta}.$$

Обозначив $Z(t)=\frac{\| z(\cdot,t)\|^2}{(2+\ln^2 t)\,t}$, $g(t)=\frac{1}{(2+\ln^2 t)\,t}$, получим неравенство

$$Z(t)\le\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau||\psi(\cdot,\eta)||^2+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau g(\eta)Z(\eta)\,. \tag{7}$$

Чтобы решить его, рассмотрим вспомогательное равенство

$$v(t)=\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2+\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau g(\eta)v(\eta)\,,\ \ v(0)=0\,.$$

Отсюда

$$v(t)-v(t-\tau)=\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2+\tau g(t)v(t)\,,$$

$$v(t)=\frac{v(t-\tau)}{1-\tau g(t)}+\frac{\tau}{1-\tau g(t)}\|\psi(\,\cdot\,,t)\|^2\le 4^{\tau g(t)}(v(t-\tau)+\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2)\le$$

$$\le 4^{\tau g(t)}(4^{\tau g(t-\tau)}(v(t-\tau)+\tau\|\psi(\,\cdot\,,t-\tau)\|^2)+\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2)\le$$

$$\le 4^{\tau g(t)+\tau g(t-\tau)}(v(t-2\tau)+\tau\|\psi(\cdot,t-\tau)\|^2+\tau\|\psi(\cdot,t)\|^2)\le\ldots\le$$

$$\le 4^{\tau \sum_{\eta=\tau}^{t} g(\eta)} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 \le$$

$$\le 4^{\int_0^t g(\eta) d\eta} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 = 4^{\int_0^t \frac{d\eta}{(2+\ln^2 \eta)\eta}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 =$$

$$= 4^{\int_0^t \frac{d\eta}{(2+\ln^2 \eta)\eta}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 = 4^{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\ln t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \right)} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 \le$$

$$\le 4^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 = 4^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 = 2^{\pi\sqrt{2}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 ,$$

поскольку функция $\varphi(x) = (1-x)^{-1/x} = e^{-\frac{\ln(1-x)}{x}}$ возрастает на интервале (0, 1),

$$e < e^{-\frac{\ln(1-x)}{x}} \le e^{\ln 4} = 4 \text{ при } 0 < x \le 1/2 ,$$

$$0 < \tau g(\eta) = \frac{\tau}{(2+\ln^2 \eta)\eta} \le \frac{1}{2+\ln^2 \eta} \le \frac{1}{2} \text{ при } \eta \ge \tau,$$

$$(1-\tau g(\eta))^{-1} = \left((1-\tau g(\eta))^{-\frac{1}{\tau g(\eta)}} \right)^{\tau g(\eta)} \le 4^{\tau g(\eta)} \text{ при } \eta \ge \tau.$$

Тогда из неравенства (7) получим

$$Z(t) \le 2^{\pi\sqrt{2}} \sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2$$

или

$$\| z(\cdot, t) \| \le 2^{\pi/\sqrt{2}} ((2+\ln^2 t)\, t)^{1/2} \left(\sum_{\eta=\tau}^{t} \tau \| \psi(\cdot, \eta) \|^2 \right)^{1/2} . \qquad (8)$$

Докажем теперь следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда точность разностной схемы (3) характеризуется априорной оценкой с весом

$$\| z(\cdot, t) \| \le 2^{\pi/\sqrt{2}} ((2+\ln^2 t)\, t)^{1/2} 2\sqrt{2} \left(\tau \left(\int_0^1 d\xi \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u(\xi, \eta_1)}{\partial \eta_1^2} \right)^2 d\eta_1 \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + h \left(\int_0^1 d\xi_1 \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u(\xi_1, \eta)}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right)^2 d\eta \right)^{1/2} \right).$$

Доказательство. Применяя в правой части оценки (8) неравенство (7) и неравенство $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$, получаем

$$\| z(\cdot, t)\| \le 2^{\pi/\sqrt{2}}((2+\ln^2 t)t)^{1/2}\left(\sum_{\eta=\tau}^{t}\tau\|\psi(\cdot,\eta)\|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le 2^{\pi/\sqrt{2}}((2+\ln^2 t)t)^{1/2}\left(2\sqrt{2}\tau\left(\int_0^1 d\xi\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi,\eta_1)}{\partial\eta_1^2}\right)^2 d\eta_1\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+2\sqrt{2}h\left(\int_0^1 d\xi_1\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u(\xi_1,\eta)}{\partial\xi_1\partial\eta}\right)^2 d\eta\right)^{1/2}\right). \ \square$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Доказанная в теореме 1 априорная оценка показывает, что точность схемы (3) вблизи правой стороны $(x=1)$ пространственно-временного прямоугольника $Q_T=(0,1)\times(0,T)$ равна $O(h(\tau+h))$, тогда как вдали от нее является величиной $O(\tau+h)$. Доказанная в теореме 2 априорная оценка показывает, что точность схемы (3) вблизи нижней стороны $(t=0)$ пространственно-временного прямоугольника $Q_T=(0,1)\times(0,T)$ является величиной $O\left(\sqrt{(2+\ln^2\tau)\tau}\,(\tau+h)\right)$, тогда как вдали от нее равна $O(\tau+h)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. — New York: Marcel Dekker, 2001. — 762 p.
2. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием // Сб. «Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ». — К.: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1985. — С. 30–34.
3. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами // Сб. «Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ». — К.: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1990. — С. 161–165.
4. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 1989. — **42**, № 5. — P. 41–44.
5. Макаров В.Л., Демків Л.І. Покращені оцінки точності традиційних різницевих схем для параболічних рівнянь // Пр. укр. матем. конгресу. — 2001. — С. 31–42.
6. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. — М.: Высш. шк., 1987. — 296 с.

Поступила 09.10.2013