УДК 519.6

И.В. СЕРГИЕНКО, О.Н. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, О.И. ДЕНИСОВА

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ 5-Й СТЕПЕНИ НА ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Аннотация. Построены явные формулы для 21 базисного интерполяционного полинома 5-й степени Зламала–Женишека в каждом треугольнике триангуляции. Их использование позволяет значительно уменьшить количество арифметических операций в МКЭ, поскольку без указанных базисных функций необходимо решать в каждом треугольнике двадцать одну систему с 21 неизвестной для нахождения всех 21 коэффициента каждого базисного интерполяционного полинома 5-й степени. Приведены формулы для операторов интерполяции с использованием указанных базисных полиномов и для интегрального представления остаточного члена приближения дифференцируемых функций указанными операторами.

Ключевые слова: интерполяционные полиномы 5-й степени Зламала–Женишека на треугольнике, явные формулы для базисных полиномов 5-й степени, интегральное представление остаточного члена, оценки погрешности Ю.Н. Субботина, оператор интерполяции.

ВВЕДЕНИЕ

Современное конструирование машин и деталей к ним тесно связано с математическим моделированием (ММ) и выбором их оптимальных параметров на основе использования результатов анализа вычислительных экспериментов над ММ. Отметим, что математическое моделирование в машиностроении с использованием прямых и обратных краевых задач [1–3] занимает ведущее место. В настоящее время для метода конечных элементов (МКЭ), который относится к числу наиболее используемых в таком моделировании, создан пакет программ FEMLAB. Несмотря на значительные достижения результатов, в МКЭ имеется в настоящее время ряд теоретических, а следовательно и практических задач, которые пока не нашли своего полного решения. К таким задачам относится, в частности, задача использования интерполяционных сплайнов 5-й степени на триангулированной сетке узлов. Основные трудности, которые возникают при решении этой задачи, связаны с отсутствием явного представления базисных интерполяционных полиномов 5-й степени в каждом треугольнике триангуляции, поскольку при отсутствии указанных базисных функций возникает необходимость решать в каждом треугольнике систему с 21 неизвестной для нахождения всех 21 коэффициента интерполяционного полинома 5-й степени. Поэтому в данной статье приведены явные формулы для построения всех 21 базисного интерполяционного полинома 5-й степени на треугольнике, явная формула для соответствующего интерполяционного оператора, а также явная формула для интегрального представления остатка приближения дифференцируемых функций такими операторами.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В трудах Зламала и Женишека [4–8] дана теория построения интерполяционных полиномов на треугольнике T_{ijk} с вершинами $A_i(x_i, y_i)$, $i=\overline{1,3}$. В частности, для полинома 5-й степени $P_5(x, y) = \sum\limits_{0\le|\beta|\le5} a_\beta x^{\beta_1} y^{\beta_2}$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, доказано, что интерполяционные условия

$$D^\alpha f(A_i) = D^\alpha P_5(A_i), \quad i=\overline{1,3}, \quad 0 \le |\alpha| \le 2\,, \tag{1}$$

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}} = \left.\frac{\partial P_5}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}, \quad (i, j) \in Q = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}, \tag{2}$$

где ν_{ij} — нормаль к стороне, соединяющей вершины A_i и A_j; точка $M_{ij} = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2} \right) = (x_{ij}, y_{ij})$ — середина этой стороны, являются достаточными для нахождения указанных 21 коэффициента a_{β}, $0 \le |\beta| \le 5$. В публикациях ряда ученых исследовались аппроксимационные свойства указанных интерполяционных полиномов различных степеней на треугольнике [9–28]. В частности, в работе [15] известного математика Ю.Н. Субботина исследованы оценки погрешности приближения дифференцируемых функций указанными интерполяционными полиномами 5-й степени. Но явные аналитические выражения для всех 21 базисного полинома 5-й степени и явные выражения для соответствующего оператора интерполяции на треугольнике отсутствуют. Это отражено в библиографии диссертационной работы Ю.В. Матвеевой [29], посвященной теории приближения полиномами на треугольнике. Поэтому актуальной является решаемая в данной статье задача построения и исследования явных формул для соответствующих операторов интерполяции сплайнами 5-й степени.

ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ СТАТЬИ

С учетом локальности процесса приближения ограничимся одним треугольником с вершинами $A_k(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, 3$.

Теорема 1. Функции

$$h_{k\beta}(x, y) = \frac{(x - x_k)^{\beta_1} (y - y_k)^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!} \omega_{ij}^3(x, y) \left\{ \frac{1}{\omega_{ij}^3(x, y)} \right\}_{(x_k, y_k)}^{(2 - |\beta|)}, \tag{3}$$

где $\omega_{ij}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \end{vmatrix}$,

$$\{g(x, y)\}_{(x_k, y_k)}^{(m)} = \sum_{0 \le |\gamma| \le m} (D^{\gamma} g)(x_k, y_k) \frac{(x - x_k)^{\gamma_1} (y - y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1! \gamma_2!},$$

$$i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \qquad i \ne j \ne k,$$

обладают такими свойствами:

$$D^{\alpha} h_{k\beta}|_{A_\ell} = \delta_{k,\ell} \delta_{\alpha,\beta}; \ \ \ell, k \in \{1, 2, 3\}, \ \delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha_1,\beta_1} \delta_{\alpha_2,\beta_2}, \tag{4}$$

$\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Доказательство. Учитывая, что

$$\omega_{ij}^3(x, y) \cdot \left\{ \frac{1}{\omega_{ij}^3(x, y)} \right\}_{A_k}^{(2 - |\beta|)} =$$

$$= \omega_{ij}^3(x, y) \cdot \left\{ \sum_{0 \le |\gamma| \le 2 - |\beta|} \left[D^{\gamma} \left(\frac{1}{\omega_{ij}^3(x, y)} \right) \right]_{A_k} \frac{(x - x_k)^{\gamma_1} (y - y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1! \gamma_2!} \right\} = \omega_{ij}^3(x, y) \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,\ y)}-\int_0^1\left[\frac{\partial^{3-|\beta|}}{\partial t^{3-|\beta|}}\left[\frac{1}{\omega_{ij}^3(x_k+t(x-x_k),\ y_k+t(y-y_k))}\right]\right]\frac{(1-t)^{2-|\beta|}}{(2-|\beta|)!}\,dt=\right.$$

$$=1-\omega_{ij}^3(x,\ y)\cdot(1-\theta)^{2-|\beta|}\times$$

$$\times\sum_{|\gamma|=3-|\beta|}\left[D^\gamma\left(\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,\ y)}\right)\Bigg|_{(x_k,\ y_k)+\theta(x-x_k,\ y-y_k)}\right]\frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!},\ 0<\theta<1,$$

можно сделать вывод, что

$$h_{k\beta}(x,\ y)=\frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta_1!\beta_2!}-$$

$$-\sum_{ij\in S}\omega_{ij}^3(x,\ y)\sum_{|\gamma|=3-|\beta|}\left[D^\gamma\left(\frac{1}{\omega_{ij}^3(x,\ y)}\right)_{(x_k,\ y_k)+\theta(x-x_k,\ y-y_k)}\right]\frac{(x-x_k)^{\beta_1+\gamma_1}(y-y_k)^{\beta_2+\gamma_2}}{\beta_1!\beta_2!\gamma_1!\gamma_2!}.$$

Иными словами, $D^\alpha h_{k\beta}\Big|_{A_k}=\delta_{\alpha,\beta}$; $D^\alpha h_{k\beta}\Big|_{A_\mu}=0$, $\mu=i$ или $\mu=j$, $0\le|\alpha|$, $|\beta|\le 2$.

Ранее была использована известная формула из [30] для интегрального представления остатка приближения дифференцируемых функций полиномом Тейлора

$$g(x,\ y)=\sum_{0\le|\gamma|\le n}[D^\gamma(g)]_{A_k}\frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!}+R_{n+1}f(x,\ y),$$

$$R_{n+1}f(x,\ y)=\int_0^1\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}[g(x_k+t(x-x_k),\ y_k+t(y-y_k))]\right]\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt,$$

которую с помощью теоремы о среднем в интегральном исчислении можно записать следующим образом:

$$R_{n+1}f(x,\ y)=\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}[g(x_k+t(x-x_k),\ y_k+t(y-y_k))]\right]_{t=\theta}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}[g(x_k+t(x-x_k),\ y_k+t(y-y_k))]\right]_{t=\theta}=$$

$$=\sum_{|\gamma|=n+1}D^\gamma g(x_k+\theta(x-x_k),\ y_k+\theta(y-y_k))\frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma_1!\gamma_2!},\ 0<\theta<1.$$

Теорема 1 доказана.

Далее отметим, что вектор внутренней нормали к прямой A_iA_j треугольника $A_iA_jA_k$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\Delta_{kij}}\omega_{ij}(x,\ y)=0,\ \Delta_{kij}=\begin{vmatrix}x_k & y_k & 1\\ x_i & y_i & 1\\ x_j & y_j & 1\end{vmatrix}$$

в виде

$$\nu_{ij}=\left(\frac{y_i-y_j}{\Delta_{kij}},\frac{-(x_i-x_j)}{\Delta_{kij}}\right),\ k\ne i,\ j;\ \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|}=\operatorname{sign}(\Delta_{kij})\frac{(y_i-y_j,\ -(x_i-x_j))}{|A_iA_j|}$$

$(\operatorname{sign}(a)=1,\ a>0;\ \operatorname{sign}(a)=-1,\ a<0;\ \operatorname{sign}(0)=0)$, т.е. производная по внутренней нормали ν_{ij} определяется формулой

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}=\frac{\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_iA_j|}\left[(y_i-y_j)\frac{\partial f}{\partial x}-(x_i-x_j)\frac{\partial f}{\partial y}\right],\quad |A_iA_j|=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}\ .$$

Теорема 2. Функции

$$H_{ij}(x,\ y)=\frac{\omega_{ik}^2(x,\ y)\omega_{jk}^2(x,\ y)\omega_{ij}(x,\ y)\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{\omega_{ik}^2(x_{ij},\ y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},\ y_{ij})|A_iA_j|} \tag{5}$$

обладают свойствами

$$D^\alpha H_{ij}|_{A_k}=0,\ 0\le|\alpha|\le 2,\ k\in\{1,2,3\},\quad k\ne i,\ j\ , \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}=1,\ \left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{mn}}=0,\ (i,\ j)\ne(m,n);\ (i,\ j),(m,n)\in Q\ . \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку $\omega_{ik}(x_i,\ y_i)=0,\ \omega_{ik}(x_k,\ y_k)=0,$

$$\omega_{ik}(x,\ y)=\begin{vmatrix} x-x_k & y-y_k & 0\\ x_i-x_k & y_i-y_k & 0\\ x_k & y_k & 1\end{vmatrix},$$

то

$$\omega_{ik}(x,\ y)=(y_i-y_k)(x-x_k)-(x_i-x_k)(y-y_k)\ ,$$

$$\omega_{jk}(x,\ y)=(y_j-y_k)(x-x_k)-(x_j-x_k)(y-y_k),$$

$$\omega_{ik}^2\omega_{jk}^2=[(y_i-y_k)(x-x_k)-(x_i-x_k)(y-y_k)]^2\times$$
$$\times[(y_j-y_k)(x-x_k)-(x_j-x_k)(y-y_k)]^2\ .$$

Поэтому функция

$$H_{ij}(x,\ y)=$$
$$=\frac{[(y_i-y_k)(x-x_k)-(x_i-x_k)(y-y_k)]^2[(y_j-y_k)(x-x_k)-(x_j-x_k)(y-y_k)]^2}{\omega_{ik}^2(x_{ij},\ y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij},\ y_{ij})}\times$$
$$\times\frac{\omega_{ij}(x,\ y)\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_iA_j|}$$

в точке $(x_k,\ y_k)$ равна нулю вместе с частными производными $D^\alpha H_{ij}\big|_{(x_k,\ y_k)}=0,\ \ 0\le|\alpha|\le 3$, т.е. в этой точке утверждение (6) теоремы 2 выполняется. Учитывая, что $\omega_{ij}(x_i,\ y_i)=0$, можно утверждать, что функция $H_{ij}(x,\ y)$ в точке $(x_i,\ y_i)$ и ее частные производные $D^\alpha H_{ij}\big|_{(x_i,\ y_i)}$, $0\le|\alpha|\le 2$, равны нулю, поскольку в числителе этой функции три множителя равны нулю в точке A_i. Аналогично $D^\alpha H_{ij}\big|_{A_j}=0,\ \ 0\le|\alpha|\le 2$.

Таким образом, все свойства (6) теоремы 2 доказаны.

Для доказательства свойств (7) подставим в формулу

$$\frac{\partial g}{\partial \nu_{ij}}=\left[\frac{(y_i-y_j)}{|A_iA_j|}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{(x_i-x_j)}{|A_iA_j|}\frac{\partial g}{\partial y}\right]\operatorname{sign}(\Delta_{kij})$$

вместо функции g функцию $\omega_{ij}(x, y)\dfrac{\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_i A_j|}$. В результате получим

$$\left.\frac{\partial\omega_{ij}(x, y)}{\partial\nu_{ij}}\frac{\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_i A_j|}\right|_{M_{ij}} =$$

$$=\left[\frac{(y_i - y_j)}{|A_i A_j|}(y_i - y_j)+\frac{(x_i - x_j)}{|A_i A_j|}(x_i - x_j)\right]\frac{\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_i A_j|}\operatorname{sign}(\Delta_{kij}) = 1 .$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial H_{ij}(x, y)}{\partial\nu_{ij}}\right|_{M_{ij}} = \frac{\partial}{\partial\nu_{ij}}\left.\left(\frac{\omega_{ik}^2(x, y)\omega_{jk}^2(x, y)}{\omega_{ik}^2(x_{ij}, y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij}, y_{ij})}\right)\right|_{M_{ij}}\left.\frac{\omega_{ij}(x, y)}{|A_i A_j|}\right|_{M_{ij}}\operatorname{sign}(\Delta_{kij}) +$$

$$+\left.\left(\frac{\omega_{ik}^2(x, y)\omega_{jk}^2(x, y)}{\omega_{ik}^2(x_{ij}, y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij}, y_{ij})}\right)\right|_{M_{ij}}\left.\frac{\partial\omega_{ij}(x, y)}{\partial\nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}\frac{\operatorname{sign}(\Delta_{kij})}{|A_i A_j|} =$$

$$=\left.\left(\frac{\partial}{\partial\nu_{ij}}\frac{\omega_{ik}^2(x, y)\omega_{jk}^2(x, y)}{\omega_{ik}^2(x_{ij}, y_{ij})\omega_{jk}^2(x_{ij}, y_{ij})}\right)\right|_{M_{ij}}\frac{0}{|A_i A_j|} + 1\cdot 1 = 1 ,$$

т.е. первое утверждение (7) доказано.

Поскольку в формуле для $H_{ij}(x, y)$ множители $\omega_{ik}^2(x, y)$, $\omega_{jk}^2(x, y)$ и их производные равны нулю на сторонах $A_i A_k$ и $A_j A_k$ треугольника $A_i A_k A_j$, можно заключить, что

$$\left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial\nu_{ik}}\right|_{M_{ik}} = 0,\ k \neq i, j, \text{ а также } \left.\frac{\partial H_{ij}}{\partial\nu_{jk}}\right|_{M_{jk}} = 0,\ k \neq i, j,$$

т.е. утверждение (7) теоремы 2 доказано.

Теорема 2 доказана.

Пример. Для случая, когда треугольник «единичный», т.е. имеет вершины $A_1(0,0)$, $A_2(1,0)$, $A_3(0,1)$, соответствующие вспомогательные функции имеют следующий вид:

$$h100(x, y) = (1 - x - y)^3(1 + 3x + 3y + 6x^2 + 12xy + 6y^2) ,$$

$$h110(x, y) = (1 - x - y)^3 x(1 + 3x + 3y),\ h101(x, y) = (1 - x - y)^3 y(1 + 3x + 3y) ,$$

$$h120(x, y) = (1 - x - y)^3 x^2/2,\ h111(x, y) = (1 - x - y)^3 xy,$$
$$h102(x, y) = (1 - x - y)^3 y^2/2 ,$$

$$h200(x, y) = x^3(10 - 15x + 6x^2),\ h210(x, y) = x^3(x - 1)(4 - 3x),$$
$$h201(x, y) = x^3 y(4 - 3x),$$

$$h220(x, y) = x^3(x - 1)^2/2,\ h211(x, y) = x^3(x - 1)y,\ h202(x, y) = x^3 y^2/2 ,$$

$$h300(x, y) = y^3(10 - 15y + 6y^2),\ h310(x, y) = y^3(4 - 3y)x,$$
$$h301(x, y) = y^3(4 - 3y)(y - 1) ,$$

$$h320(x,\ y)=y^3(x-1)^2/2,\ h311(x,\ y)=y^3(y-1)x,\ h302(x,\ y)=y^3x^2/2,$$

$$H_{12}(x,\ y)=16x^2y(x+y-1)^2,\ H_{23}(x,\ y)=-8\sqrt{2}x^2y^2(x+y-1),$$

$$H_{31}(x,\ y)=16xy^2(x+y-1)^2.$$

Теорема 3. Для каждой функции $f(x,\ y)\in C^2(\overline{T}_{ijk})$ оператор

$$S_5f(x,\ y)=w(x,\ y)+\sum_{(i,\ j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}}H_{ij}(x,\ y),$$

$$w(x,\ y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2}D^{\beta}f(A_i)h_{i\beta}(x,\ y), \tag{8}$$

определяет полином 5-й степени со свойствами

$$D^{\alpha}S_5f|_{A_p}=D^{\alpha}f|_{A_p},\ \ p\in\{1,2,3\},\ 0\le|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2\le 2, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial S_5 f}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}}=\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}\right|_{M_{ij}},\quad (i,\ j)\in Q. \tag{10}$$

Доказательство. С учетом свойств (4) функций $h_{k\beta}(x,\ y)$ и свойств (6) функций $H_{ij}(x,\ y)$ запишем следующую последовательность равенств:

$$D^{\alpha}S_5f\Big|_{A_p}=D^{\alpha}w\Big|_{A_p}+\sum_{(i,\ j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}}D^{\alpha}H_{ij}(x,\ y)\Big|_{A_p}=$$

$$=D^{\alpha}w\Big|_{A_p}+0=D^{\alpha}f\Big|_{A_p},\ \ p=\overline{1,3},\ 0\le|\alpha|\le 2.$$

Таким образом, операторы $w(x,\ y)=wf(x,\ y)$ и $S_5f(x,\ y)$ интерполируют функцию $f(x,\ y)$ и ее частные производные порядков $|\alpha|\le 2$ в угловых точках треугольника T_{ijk}. Далее, с учетом свойства (7) функций $H_{ij}(x,\ y)$ запишем следующую последовательность равенств:

$$\left.\frac{\partial S_5f(x,\ y)}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}=\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}+\sum_{(i,\ j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}}\left.\frac{\partial H_{ij}(x,\ y)}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}=$$

$$=\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}+\sum_{(i,\ j)\in Q}\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}}\right]\Bigg|_{M_{ij}}\delta_{(i,\ j),(p,q)}=$$

$$=\left.\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}}+\left[\frac{\partial f}{\partial \nu_{pq}}-\frac{\partial w}{\partial \nu_{pq}}\right]\Bigg|_{M_{pq}}=\left.\frac{\partial f}{\partial \nu_{pq}}\right|_{M_{pq}},\quad (p,q)\in Q.$$

Таким образом, все утверждения теоремы 3 доказаны.

Замечание. Формулу (8) можно использовать также в другой виде:

$$S_5f(x,\ y)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{0\le|\beta|\le 2}D^{\beta}f(A_k)\Big(h_{k\beta}(x,\ y)-\sum_{(i,\ j)\in Q}\frac{\partial h_{k\beta}}{\partial \nu_{ij}}(x_{ij},\ y_{ij})H_{ij}(x,\ y)\Big)+$$

$$+\sum_{(i,\ j)\in Q}\frac{\partial f}{\partial \nu_{ij}}(x_{ij},\ y_{ij})H_{ij}(x,\ y). \tag{8a}$$

Теорема 4. Если $f(x, y) \in C^6(R^2)$, то остаток $R_5 f(x, y) = [I - S_5] f(x, y)$ приближения этой функции построенным оператором интерполяции полиномом 5-й степени может быть представлен в виде

$$R_5 f(x, y) = [I - S_5] \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f(\bar{x} + t(x - \bar{x}),\ \bar{y} + t(y - \bar{y})) \frac{(1-t)^5}{5!} dt,$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in T$ – произвольная точка треугольника.

Доказательство. Напишем формулу Тейлора [30] 3-й степени разложения функции $f(x, y)$ в окрестности точки $(\bar{x}, \bar{y}) \in T_{ijk}$:

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{s=1}^{3} d^s f(x, y, (\bar{x}, \bar{y})) + Rf(x, y) = P_3(x, y) + Rf(x, y),$$

$$Rf(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^4}{\partial t^4} f(\bar{x} + t(x - \bar{x}),\ \bar{y} + t(y - \bar{y})) \frac{(1-t)^3}{3!} dt,$$

$$d^s f(x, y, (\bar{x}, \bar{y})) = \left[\left((x - \bar{x}) \frac{\partial}{\partial x} + (y - \bar{y}) \frac{\partial}{\partial y} \right)^s f \right] (\bar{x}, \bar{y}), \quad s = 1, \ldots, 3.$$

Тогда, учитывая, что

$$R_5 f(x, y) = 0 \ \ \forall f(x, y) \in P_5, \tag{11}$$

где P_5— множество полиномов 5-й степени от двух переменных, получим

$$R_5 f(x, y) = R_5 \{P_3(x, y) + Rf(x, y)\} = R_5 \{P_3(x, y)\} + R_5 \{Rf(x, y)\} =$$
$$= 0 + R_5 Rf(x, y) = Rf(x, y) - S_5 Rf(x, y).$$

Таким образом, теорема 5 доказана.

Для полноты изложения приведем теорему Ю.Н. Субботина из [15], где исследована оценка погрешности приближения дифференцируемых функций класса $C^6(\overline{T}_{ijk})$ интерполяционными полиномиальными сплайнами 5-й степени в зависимости от геометрических характеристик треугольника. В ней показано, что в зависимости от порядка производной константы в оценках погрешности ее аппроксимации могут зависеть от среднего либо среднего и наименьшего углов треугольника. Установлен правильный характер такой зависимости.

В работе [15] изучается сходимость локальных кратных интерполяционных процессов, связанных с аппроксимацией функций двух переменных кусочно-полиномиальными функциями 5-й степени. Речь идет о зависимости оценок от геометрических характеристик треугольников, входящих в триангуляцию основной области. Так как процесс аппроксимации локален, то изложение ограничивается лишь одним треугольником.

Пусть $z = (x, y) \in R^2$, $D_\xi f(z) = \xi^{(1)} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \xi^{(2)} \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ — производная по направлению $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)})^2_;$ $(\xi^{(1)})^2 + (\xi^{(2)})^2 = 1$, T — невырожденный треугольник в R^2.

Пусть также $W^{k+1}M = \{f(x) : D^m_{\xi_1, \ldots, \xi_m} f(z)\}$ $(0 \le m \le k+1)$ непрерывны и $|D^{k+1}_{\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}} f(z)| \le M$ для любых z $\in T$ и любых $\{\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}\}$. Далее a_i обозначают вершины треугольника T; b_i — середины его сторон, $b_i = \dfrac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ $(1 \le i \le 3, a_4 = a_1)$; n_i — единичная нормаль к стороне треугольника, содержащей точку $b_i (1 \le i \le 3)$. Обозначим $P_5(x, y) = P_5(z) = P_5(f; z)$ полином, степень которого по совокупности переменных не превосходит пяти, удовлетворяющий условиям

$$\frac{\partial^{\varepsilon}}{\partial x^{m}\partial y^{\varepsilon-m}}[f(a_i)-P_5(a_i)]=0 \ \ (0\le m\le \varepsilon,\ 0\le \varepsilon\le 2,\ 1\le i\le 3)\,,$$

$$D_{n_i}[f(b_i)-P_5(b_i)]=0 \ \ (1\le i\le 3)\,.$$

В дальнейшем, не нарушая общности, можно считать, что $a_1=(b,0)$, $a_2=(-a,0)$, $a_3=(0,h)$, α — угол при вершине a_1; β — при вершине a_2; γ — при вершине a_3, $0<\alpha\le\beta\le\gamma<\pi$. В частности, $0<a<b$ и длина наибольшей стороны треугольника T равна $a+b=H$.

Пусть

$$\gamma(\varphi)=\begin{cases}1,\ \operatorname{ctg}\varphi\le 1;\\ \operatorname{ctg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\varphi>1,\end{cases}$$

и $e(x,\ y)=f(x,\ y)-P_5(x,\ y)$. Тогда справедлива теорема.

Теорема (Ю.Н. Субботин [15]). Имеем абсолютные положительные константы k_{ij} такие, что для любой функции $f(z)\in W^6M$ и любого невырожденного треугольника T существуют оценки

$$\left|\frac{\partial^{n}e(x,\ y)}{\partial x^{n-j}\partial y^{j}}\right|\le k_{n-j,\,j}MH^{6-n}\gamma^{i}(\beta)\ \ (0\le j\le 1,\ 0\le n\le 5)\,,$$

$$\left|\frac{\partial^{n}e(x,\ y)}{\partial x^{n-j}\partial y^{j}}\right|\le k_{n-j,\,j}MH^{6-n}\gamma(\beta)\ \gamma^{i-1}(\alpha)\ \ (2\le j\le 3,\ j\le n\le 5)\,,$$

$$\left|\frac{\partial^{n}e(x,\ y)}{\partial x^{n-j}\partial y^{j}}\right|\le k_{n-j,\,j}MH^{6-n}\gamma^{2}(\beta)\ \gamma^{2}(\alpha)\ \ (j=4, n=4,5)\,,$$

$$\left|\frac{\partial^{5}e(x,\ y)}{\partial y^{5}}\right|\le k_{0,5}MH\gamma^{3}(\beta)\ \gamma^{2}(\alpha),\ (x,\ y)\in T.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные и доказанные в настоящей статье результаты позволяют строить сплайны 5-й степени на произвольной триангулированной сетке узлов. При этом в каждом треугольнике триангуляции все 21 базисная полиномиальная функция представляется в явном виде, позволяющем строить интерполяционный оператор в каждом треугольнике без решения системы, состоящей из 21 алгебраического уравнения для нахождения 21 коэффициента полинома 5-й степени. Это позволяет утверждать о возможности построения экономичных схем метода конечных элементов при решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа, в частности для решения бигармонического уравнения. Сформулирован общий подход к построению интегрального представления остатка приближения дифференцируемых функций с помощью построенных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ. — К.: Наук. думка, 2013. — 500 с.
2. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. — К.: Наук. думка, 2012. — 404 с.
3. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности. — Т. 2: Приложения. — К.: Наук. думка, 2003. — 322 с.
4. Zlamal M. On the finite element method // Numer. Math. — 1968. — **12**. — P. 394–409.
5. Zlamal M. On some finite element procedures for solving second order boundary value problems // Ibid. —1969. — **14**. — P. 42–48.

6. Zlamal M. A finite element procedure of the second order accuracy // Ibid. — 1970. — **14**. — P. 394–402.
7. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. — 1970. — **15**. — P. 283–296.
8. Zlamal M., Zenisek A. Mathematical aspect of the finite element method // Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Method (V. Kolar et al., eds.). — Praha: Acad. VED. — 1971. — P. 15–39.
9. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе: Пер. с англ. — М.: Мир, 1974. – 126 с.
10. Babushka I., Aziz A.K. On the engle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. — 1976. — **13**, N 2. — P. 214–226.
11. Bramble J.H., Zlamal M. Triangular elements in the finite element method // Math. Comput. — 1970. — **24.** — P. 809–820.
12. Ciarlet P.G., Raviart P.A. General Lagrange and Hermite interpolation in L_p with application in finite element methods // Arch. Rat. Mech. and Anal. — 1972. — **46**, N 3. — P. 177–179.
13. Субботин Ю.Н. Многомерная кусочно-полиномиальная интерполяция // Методы аппроксимации и интерполяции / Под ред. Ю.А. Кузнецова. — Новосибирск: ВЦН, 1981. — С. 148–153.
14. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. — 1989. — **189.** — С. 117–137.
15. Субботин Ю.Н. Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 1992. — **2**. — С. 110–119.
16. Субботин Ю.Н. Исследование свойств монотоности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1993. — **33**, № 7. — С. 996–1003.
17. Субботин Ю.Н. Новый кубический элемент в МКЭ // Тр. Ин-та математики и механики. Теория функций. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2005. — **11**, № 2. — P. 120–130.
18. Baidakova N.V. On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1999. — **14**, № 2. — P. 87–107.
19. Latypova N.V. Error estimates fox approximation by polynomials of dagree $4m+1$ on the triangle // Proc. of the Steclov Institute of Mathematical, Suppl. 1. — 2002. — P. 190.
20. Латыпова Н.В. Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вест. Удмурд. ун-та. Сер. Математика. — 2003. — С. 3–10.
21. Zenisek A. Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type // Math. Comput. — 1995. — **64**, N 211. — P. 929–941.
22. Байдакова Н.В. Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Тр. Ин-та математики и механики. Теории функций. — Екатеринбург: УрО РАН. — 2005. — **11**, № 2. — P. 47–52.
23. Zenisek A., Hoderova-Zlamalova J. Semiregular hermite tetrahedral finite elements // Appl. of Math. — 2001. — № 4. — P. 295–315.
24. Куприянова Ю.В. Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике // Математика. Механика. — 2006. — Вып. 8. — С. 59–61.
25. Куприянова Ю.В. Об оценке производной Эрмитова сплайна на трехмерном симплексе // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратов. Зим. шк. — Саратов: ООО Изд-во «Научная книга», 2006. — С. 102.
26. Куприянова Ю.В. Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. — Воронеж, 2007. — С. 120–121.
27. Куприянова Ю.В. Об одной теореме из теории сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2008. — **48**, № 2. — С. 206–211.
28. Матвеева Ю.В. Об интерполяции кубическими многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика. — 2007. — **7**, вып. 1. — С. 28–32.
29. Матвеева Ю.В. Приближение функций многочленами на треугольной сетке: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 2008. — 100 с.
30. Никольский С.М. Курс математического анализа. 6-е изд. — М.: Физматлит, 2001. — 592 с.

Поступила 24.12.2013