УДК 519.21

Н.П. ДОНЕЦ, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

О ПОВЕДЕНИИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕАВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. Для стохастической задачи Коши неавтономного стохастического уравнения в частных производных с непрерывным марковским процессом в качестве параметра доказано существование второго момента сильного решения. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном с помощью стохастической функции Ляпунова.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, марковский параметр, устойчивость в среднем квадратичном.

Доказательству существования и асимптотического поведения решений детерминированных уравнений в частных производных посвящено достаточное число работ, ссылки на которые можно найти в [1–3]. После введения понятий стохастического дифференциала и интеграла, замены переменных Ито для стохастического дифференциала, стохастического дифференциального уравнения (СДУ) как интегрального уравнения с интегралом Ито–Скорохода такими известными учеными как И.И. Гихман, А.В. Скороход, Р.З. Хасьминский, В.Б. Колмановский, Е.Ф. Царьков (см. [4–9]) стало возможным изучение асимптотического поведения сильного решения СДУ в частных производных (СДУ в ЧП) [10–14] и др.

Для дальнейшего изучения СДУ в ЧП в этих уравнениях рассматривались случайные параметры, которые представляли бы более точную математическую модель реальных сложных систем [4, 5, 14, 22, 23 и др.].

В данной работе исследуется асимптотическое поведение сильного решения линейного СДУ в ЧП с учетом непрерывного марковского процесса [14, 15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На вероятностном базовом пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}, \mathbb{P})$ [3] рассмотрим задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных (ЛСДУ в ЧП) [14]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right] = Q\left(B(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega) +$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(C(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right]\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\Bigg|_{t=0} = [Qu]_0. \tag{2}$$

Здесь

$$Q(A(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$
$$Q(B(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$
$$Q(C(\cdot, q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{kj}(t,\xi(t))q^k p^j,$$

где $A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ — матрицы размера $n \times m$, содержащие соответствующие беровские функции, которые зависят от t и $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{Y}$, для произвольного $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$ — стохастически непрерывный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями на компактном фазовом пространстве $\mathbb{Y}$ [15, 16].

Пусть $w(t) \equiv w(t, \omega) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^1$ — стандартный винеровский процесс, $T > 0$ [8], а $\dfrac{dw(t, \omega)}{dt}$ — «белый шум» (производная от $w(t, \omega)$ с вероятностью единица не существует [16, 17]).

Далее, $\mathfrak{M}_T$ — пространство функций $u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, измеримых по t и x с вероятностью единица относительно σ-алгебры борелевских множеств фазового пространства $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$, и для которых существует несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{| u(t, x, \omega)|^2\} dx < \infty \tag{3}$$

при любом $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — знак математического ожидания.

Для дальнейших исследований введем нормы, свойства которых легко проверить [18]:

$$|| u(t, x, \omega)||_{L_{2R}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega)|^2 \, dx, \tag{4}$$

$$|| u(t, x, \omega)||_{2T}^2 \equiv \int_0^T | u(t, x, \omega)|^2 \, dt, \tag{5}$$

$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E}\{|| u(t, x, u)||_{L_{2R}}^2\}. \tag{6}$$

Под L_{2R}, L_{2T} будем понимать пространства функций $u(t, x, \omega)$, имеющие соответствующие нормы (4), (5).

В пространстве $\mathfrak{M}_T$ введем норму согласно (6), а именно:

$$|| u(t, x, \omega)||^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega)|^2 \, dx\right]^2 dt. \tag{7}$$

Под решением задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2) будем понимать случайную функцию $u(t, x) \equiv u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, согласованную с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ [19], и такую, что с вероятностью единица при каждом (t, x) удовлетворяет уравнению

$$Q\left(A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B(s, \xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x) ds +$$

$$+ \int_0^t Q\left(C(s, \xi(s)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x) dw(s). \tag{8}$$

Отметим, что случайная функция $u(t, x)$ с вероятностью 1 непрерывна по $t \in [0, T]$ в силу конструкции $Q\left(\cdot, \dfrac{\partial}{\partial t}, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ и непрерывности по t интеграла Ито и интеграла Римана как функций верхнего предела.

2. РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛСДУ В ЧП (1), (2)

Рассмотрим задачу существовании решения стохастической задачи Коши (1), (2) в среднем квадратичном в пространстве $\mathfrak{M}_T^1 \subset \mathfrak{M}_T$, для элементов которого для произвольной матрицы $A(t, y)$, $y \in \mathbb{Y}$, имеет место включение

$$Q\left(A(t, y), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) \in \mathfrak{M}_T.$$

Лемма 1. Преобразование Фурье по x для случайной функции $u(t,x) \equiv u(t,x,\omega)$, а именно

$$v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t,x,\omega)dx, \tag{9}$$

не выводит ее из пространства $\mathfrak{M}_T$ для произвольного конечного $0 < T < \infty$ с вероятностью единица.

Доказательство. Существование с вероятностью единица преобразования Фурье [20, 21] следует из принадлежности $u(t,x)$ пространству L_{2R} для произвольного $t \in [0,T]$, поскольку верно неравенство Чебышева [16]

$$\mathbb{P}\left\{\omega : \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|\, dx > N\right\} \le \frac{\mathbb{E}_u(t)}{N} \to 0$$

при $N \to +\infty$. По теореме Планшереля [18] имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t,\sigma,\omega)|^2\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2\, dx,$$

т.е. $v(t,\sigma)_{L_{2R}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} || u(t,x) ||_{L_{2R}}$.

Значит, $|| v(t,\sigma) ||_{\mathfrak{M}_T} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} || u(t,x) ||_{\mathfrak{M}_T}$, что и доказывает лемму 1.

Теорема 1. Пусть:

1) выполнены требования постановки задачи (1), (2) и условия Липшица на коэффициенты уравнения (1);

2) беровские функции $a_{kj}(t, y)$, $b_{kj}(t, y)$, $c_{kj}(t, y)$, $k = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, удовлетворяют глобальному условию ограниченности модулей $| a_{kj}(t, y)|^2 + | b_{kj}(t, y)|^2 + | c_{kj}(t, y)|^2 \le L \ \ \forall y \in \mathbb{Y}$;

3) $\mathbb{E}\{|| [Qy]_0 ||^l_{\mathfrak{M}_T}\} \le K;\ l > 1$.

Тогда с вероятностью единица существует непрерывное решение стохастической задачи Коши $u(t,x) \equiv u(t,x,\omega)$, причем существует второй момент $\mathbb{E}\{|| u(t,x) ||^2_{\mathfrak{M}_T}\} \le K_1$, а для случайной функции $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$ (см. (9)) — l-й момент ($l > 1$) как решение задачи СДУ (10), (11) (см. ниже).

Доказательство. Применив преобразование Фурье [20] по переменной $x \in \mathbb{R}^1$ к левой и правой частям ЛСДУ в ЧП (1), (2), получим «формальное» линейное стохастическое дифференциальное уравнение, не содержащее частных производных, для случайной функции $v(t,\sigma) \equiv v(t,\sigma,\omega)$:

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma)\right] = Q\left(B(t,\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma) + \\ + Q\left(C(t,\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma)\frac{dw(t)}{dt}, \tag{10}$$

$$Q\left(A(t,\xi(t)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma)v(t,\sigma)\Big|_{t=0} = [Qv]_0. \tag{11}$$

Полученную задачу Коши для ЛСДУ (10), (11) следует понимать как стохастическое интегральное уравнение [6, 19]

$$v(t,\sigma) = v_0(t,\sigma) + \int_0^t Q(B(s,\xi(s)),\cdot, i\sigma)v(s,\sigma)ds + \int_0^t Q(C(s,\xi(s)),\cdot, i\sigma)v(s,\sigma)dw(s) \tag{12}$$

с начальным условием (11).

В условиях теоремы 1 существует с вероятностью единица сильное непрерывное решение $v(t,\sigma)\equiv v(t,\sigma,\omega)$ при $\sigma\neq 0$ ЛСДУ (10), (11) с $\mathbb{E}\{\|v(t,\sigma)\|^l_{\mathfrak{M}_T}\}<\infty$, $l>1$, [6, 9], а в силу леммы 1 — с вероятностью единица сильное непрерывное решение $u(t,x)\equiv u(t,x,\omega)$ ЛСДУ в ЧП (1), (2) с $\mathbb{E}\{\|u(t,\sigma)\|^2_{\mathfrak{M}_T}\}<\infty$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ РАССМАТРИВАЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вначале обсудим асимптотику поведения ЛСДУ (12) тривиального решения $v(t,\sigma)\equiv 0$ при $\sigma\neq 0$ с начальным условием (11). Отметим, что при постановке задачи разд. 1 будем применять метод стохастической функции Ляпунова [4] для исследования асимптотической устойчивости в среднем квадратичном, l-устойчивости ($l>1$), экспоненциальной l-устойчивости, глобальной экспоненциальной l-устойчивости, глобальной экспоненциальной l-устойчивости в целом [16, раз. 8, с. 543–558].

Определим устойчивость тривиального решения $v(t,\sigma)\equiv 0$, $\sigma\neq 0$ СДУ (10), (11) со следующими условиями на коэффициенты:

$$\begin{gathered}Q(B(t,y),\cdot\, i\sigma)v(t,\sigma)\equiv 0\quad \forall y\in\mathbb{Y},\ t\in[-,\infty),\\ Q(C(t,y),\cdot\, i\sigma)v(t,\sigma)\equiv 0\quad \forall y\in\mathbb{Y},\ t\in[0,\infty).\end{gathered}\tag{13}$$

Определение 1. Тривиальное решение $v(t,\sigma)\equiv 0$, $\sigma\neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

• стохастически устойчивым, если $\forall\varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0\ \exists\,\delta>0$, что из неравенства $|Qv|_0<\delta$ для $t_0>0$, $y\in\mathbb{Y}$ следует неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\sup_{t\geq 0}|Q(D(t,y),\cdot,i\sigma)v(t,\sigma)|\geq\varepsilon_1\right\}<\varepsilon_2,\tag{14}$$

где D имеет конструкцию $D(\xi(t))\equiv\{d_{kj}(\xi(t))\}^{n,m}_{k,j=1}$, $d_{kj}(\cdot)$ — беровские функции;

• асимптотически стохастически устойчивым, если выполнено условие (14) и существует такое $\delta_1>0$, что для $t_0\geq 0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $|Qv|_0<\delta_1$ имеет место

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\lim_{t\to\infty}|Q(D(t,y),\cdot,i\sigma)v(t,\sigma)|=0\right\}=1.\tag{15}$$

Определение 2. Тривиальное решение $v(t,\sigma)\equiv 0$, $\sigma\neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

• l-устойчивым, если

$$\lim_{|Qv|_0\to 0}\ \sup_{t\geq t_0\geq 0}\ \mathbb{E}\{|Q(D(t,y),\cdot,i\sigma)v(t,\sigma)|^l\}=0,\tag{16}$$

• асимптотически l-устойчивым, если решение l-устойчиво и существует такое $v>0$, что

$$\lim_{t\to\infty}|\mathbb{E}\{|Q(D(y,t),\cdot,i\sigma)v(t,\sigma)|^l\}|=0\tag{17}$$

$\forall t_0>0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $|[Qv]_{t_0}|<\delta$.

Определение 3. Тривиальное решение $v(t,\sigma)\equiv 0$, $\sigma\neq 0$ задачи (10), (11) назовем:

• экспоненциально l-устойчивым, если существуют такие $\delta>0$, $M>0$ и $\gamma>0$, что для произвольных $t\geq t_0\geq 0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $|[Qv]_{t_0}|<\delta$

$$\mathbb{E}\{|Q(D(t,y),\cdot,i\sigma)v(t,\sigma)|^l\}\leq Me^{-\gamma(t-t_0)\,|[Qv]_0|^l};\tag{18}$$

• глобально экспоненциально l-устойчивым, если (18) выполняется для всех $t\geq t_0\geq 0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $[Qv]_0\in\mathbb{R}^1$.

Далее рассмотрим скалярную непрерывную функцию Ляпунова [7, 16] по всем переменным:

$$\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1, \tag{19}$$

для которой выполнено глобальное условие Липшица

$$| \mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y) | \le L | v_1 - v_2 | \tag{20}$$

для всех $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^1$ и условие глобальной ограниченности $\forall y \in \mathbb{Y}$

$$\sup_{t \ge 0} | \mathbb{V}(t, v_1, y) - \mathbb{V}(t, v_2, y) | = \alpha(y) < \infty . \tag{21}$$

Определение 4. Оператор $(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y)$ назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), если функция $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$ непрерывна по s, v, y, ограничена на каждом множестве $[t_1, t_2] \times U_\delta(0) \times \mathbb{Y}$, $U_\delta(0) \equiv | v(t, \sigma) | < \delta$; $\sigma \ne 0$ и выполняется условие: $\forall s \ge 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $v \in \mathbb{R}^1$ найдется такое $\Delta > 0$, что существует

$$\sup_{0 \le t \le \Delta} \frac{1}{t} | \mathbb{E} \{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, \sigma), \xi(t)) - \mathbb{V}(s, v(s, \sigma), \xi(t)) \} | \le K < \infty$$

равномерно по аргументу v, а также существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\mathbb{E} \{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, y), \xi(s)) - \mathbb{V}(s, v, y) \}] \equiv (\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) . \tag{22}$$

Для определения 4 введем обозначение $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_1)$. Если непрерывный функционал $\mathbb{V} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу v и условию равномерной ограниченности по первому аргументу t, то оператор $\mathcal{L}$ полностью определяется правой частью СДУ (10) и слабым инфинитезимальным оператором марковского процесса $\xi(t)$ [15, 16] $\mathcal{L}\mathbb{V} = \widetilde{\mathcal{L}}_1 \mathbb{V} + \widetilde{\mathcal{L}}_2 \mathbb{V}$, где

$$(\widetilde{\mathcal{L}}_2 \mathbb{V})(s, v, y) = (\nabla \mathbb{V})(s, v, y) Q\left(B(y), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbb{V})(s, v, y) Q^2 \left(C(y), \frac{d}{dt}, \beta\sigma \right). \tag{23}$$

Здесь $\nabla \mathbb{V}$ — первая производная ∇_v; $\nabla^2 \mathbb{V}$ — вторая производная $\mathbb{V}_{v^2}$ [16, с. 546–549].

Определение 5. Оператор $\mathcal{L}(\mathbb{V})(s, v, y)$ назовем производной Ляпунова на решениях СДУ (10), (11), а значит, в силу леммы 1 — и на решениях СДУ (1), (2), если функция Ляпунова $\mathbb{V}(s, v, y) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{Y}$ непрерывна по всем трем аргументам, ограничена на каждом множестве $[t_1, t_2] \times \mathbb{U}_r(0) \times \mathbb{Y}$ и выполняются условия определения 4, где $\mathbb{U}_r(0) \equiv \{ v \in \mathbb{R}^1 : || v || < r \}$, $r > 0$. Обозначим это, как и ранее, $\mathbb{V} \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Определение 6. В условиях определения 5 верхней производной Ляпунова [7] назовем соотношение

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{0 < t \le \Delta} \frac{1}{t} [\mathbb{E} \{ \mathbb{V}(s+t, v(s+t, u(s), y), \xi(s)) \} - \mathbb{V}(s, v(s), y)] \equiv (\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y), \tag{24}$$

если для всех достаточно малых $\Delta > 0$ в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0) \times \mathbb{Y}$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta} | \mathbb{E} \{ \mathbb{V}(s+\Delta, v(s+\Delta), \xi(\Delta)) \} - \mathbb{V}(s, v, y) | < g_r(s, v, y) , \tag{25}$$

где $g_r(s, v, y)$ — непрерывная функция своих аргументов и ограничена по второму аргументу v в каждой окрестности $\mathbb{U}_r(0)$.

Отметим, что при наложенных ограничениях на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$ выполняется неравенство Дынкина [15].

Лемма 2 [15]. Если непрерывная по всем аргументам функция Ляпунова

$\mathbb{V}(s, v, y)$ удовлетворяет условиям (20), (21), то выполняется неравенство Дынкина

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau_r(t), v(s+\tau_r(t), v(s, u(s), \xi(\tau_r(t)))), \xi(\tau_r(t)))\} \le$$
$$\le \mathbb{V}(s, v, y) + \mathbb{E}\left\{\int_0^{\tau_r(t)} (\mathcal{L}\mathbb{V})(s+z, v(s+z, u(s), y), \xi(z))dz\right\}. \qquad (26)$$

Доказательство приведено в [16, с. 550, 551].

Исходя из вышеупомянутых жестких условий на функцию Ляпунова $\mathbb{V}$, можно установить следующие вспомогательные неравенства для решения $v(t, \sigma, \omega)$ задачи Коши для СДУ (10), (11), а значит, и для решения $u(t, x, \omega)$ задачи Коши (1), (2) для ЛСДУ в ЧП (1), (2) согласно лемме 1 [16]. Воспользуемся этими условиями и неравенством Гроноулла.

Лемма 3 [16, с. 552, 553]. Пусть выполняются локальные условия Липшица на коэффициенты для искомого решения $u(t, x, \omega)$ уравнения (1), (2), а значит, и на коэффициенты для искомого решения $v(t, \sigma, \omega)$ уравнения (10), (11). Тогда решение задачи (10), (11) ((1), (2)) допускает оценку $\forall T \ge 0$, $s \ge 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $v_0 \in \mathbb{R}^1$ $(u_0 \in \mathbb{R}^1)$:

$$\sup_{0 \le t \le T} |v(t+s, s, v_0, y)| = (\|v_0\| + \alpha KT)e^{KT}, \qquad (27)$$

$$\sup_{t_1, t_2 \in [s, s+T]} |v(t_2, s, v_0, y) - v(t_1, s, v_0, y)| \le$$
$$\le K[(|v_0| + \alpha KT)e^{KT} + \alpha]|t_2 - t_1|, \qquad (28)$$

где в леммах 2, 3 $v(t, s, v_0, y)$ обозначает решение задачи (10), (11) в момент времени $t \in [0, T]$, считая начальным момент s, значение решения v_0 и значение марковского процесса $y \in \mathbb{Y}$.

Исходя из связи u задачи (1), (2) и v задачи (10), (11), для решения u задачи (1), (2) будут выполняться неравенства типа (27), (28).

Теорема 2. Пусть:

1) выполняются локальные условия Липшица на коэффициенты уравнения (10), (11);

2) выполняется условие ограниченности на коэффициенты так называемого «подлинейного» роста;

3) существует функция Ляпунова $\mathbb{V}(s, v, y)$ с оценкой снизу и сверху

$$c_1|v|^{l_1} \le \mathbb{V}(s, v, y) \le c_2|v|^{l_2} \qquad (29)$$

для всех $c_1, c_2 > 0$, $l_2 \ge l_1 > 0$, всех $s \subset \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{V}$, $v \in \mathbb{R}^1$;

4) для функции Ляпунова $\mathbb{V}(s, v, y)$ в силу СДУ (10), (11) выполняется неравенство

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) \le -c_3|v|^{\,l} \qquad (30)$$

для всех $s \ge 0$, $y \in \mathbb{Y}$ и $v \in \mathbb{R}^1$.

Тогда тривиальное решение задачи Коши для СДУ (10), (11) асимптотически l-устойчиво ($l > 1$), а тривиальное решение задачи (1), (2) для ЛСДУ в ЧП асимптотически устойчиво в l.i.m.

Доказательство. Заметим, что в силу линейности СДУ (10) выполняется условие тождественного равенства нулю коэффициентов этого уравнения при $v \equiv 0$. Поэтому в теореме 2 и в приведенных ниже утверждениях будет исследоваться на устойчивость тривиальное решение $v \equiv 0$.

Поскольку $\mathbb{P}\left\{\omega : \lim_{r \to 0} \tau_r(t) = t\right\} = 1$ для всех $t > 0$, в (26) вместо $\tau_r(t)$ можно использовать t.

Значит, вместе с неравенством Дынкина (26) и неравенством (27) для $t \ge \tau$ можно записать неравенство

$$c_1\mathbb{E}\{|v(t+s,s,v_0,y)|^{l_1}\}\le\mathbb{E}\{|\mathbb{V}(s+t,v(s+t,v_0,y),\xi(s))|\}\le$$
$$\le c_2\mathbb{E}\{|v(s+\tau,v_0,y)|^{l_2}\}-c_3\int_\tau^t\mathbb{E}\{|v(s+z,s,v_0,y)|^l\}dz\le$$
$$\le c_2|v_0|^{l_2}\exp\{l_2KT\}-c_3\int_\tau^t\mathbb{E}\{|v(s+z,s,v_0,y)|^l\}dz.$$

Отсюда согласно определению 3 следует l-устойчивость тривиального решения $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ задачи (10), (11) для $l\le l_1$ и сходимости интеграла
$$\int_\tau^\infty\mathbb{E}\{|v(s+z,s,v_0,y)|^l\}dz<\infty. \tag{31}$$

Таким образом, из сходимости интеграла (31) вытекает асимптотическая l-сходимость тривиального решения задачи (10), (11) $(l>1)$.

Далее, согласно лемме 1 существует связь (9) между $v(t,\sigma)$ и $u(t,x,\omega)$, а значит, согласно теореме Планшереля [18, 20] при $l=2$ асимптотическая 2-устойчивость тривиального решения задачи Коши (1), (2) $\forall t_0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $v\in\mathbb{U}_\delta(0)$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 с $l_2=l_1=l>0$. Тогда тривиальное решение $v(t,\sigma,\omega)\equiv 0$ задачи (10), (11), а также тривиальное решение $u(t,x,\omega)\equiv 0$ задачи Коши (1), (2) глобально экспоненциально устойчиво.

Доказательство. На решениях СДУ (10), (11) и с переходной вероятностью $p(t,y,dz)$ марковского процесса $\xi(t)\in\mathbb{R}^1$ определим линейный оператор [15]
$$(T(t)\mathbb{V})(s,v,y)\equiv\int_{\mathbb{Y}}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,v_0,y),z)\}\mathbb{P}(t,y,dz) \tag{32}$$
со свойствами [15, 16], если $\mathbb{V}$ непрерывный по всем переменным.

- Результат действия оператора $T(t)$ на $\mathbb{V}(t,v,\xi)$ является непрерывной функцией по аргументам, т.е. $C(\widetilde{\mathbb{Y}})\to C(\widetilde{\mathbb{Y}})$, где $\widetilde{\mathbb{Y}}\equiv[0,\infty)\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{Y}$.
- Оператор $T(t)$, $t\ge 0$, образует полугруппу
$$T(t_1+t_2)=T(t_1)T(t_2)\ \ \forall t_1,t_2\ge 0.$$
- Семья линейных операторов на фазовом пространстве $\widetilde{\mathbb{Y}}$ определяет стохастически непрерывный марковский процесс C непрерывными справа реализациями.

Обозначив $z(t)\equiv(C(t)\mathbb{V}(s,v,y))$, перепишем неравенство Дынкина (26) в виде
$$z(t_2)\le z(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{E}\{(\mathcal{L}\mathbb{V}(s+t,v(s+t,v_0,y),\xi(t)))\}dt. \tag{33}$$

Если $\mathbb{V}$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то из неравенства (33) и очевидных соотношений
$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s,v,y)\le -c_3|v(0)|^l\le-\frac{c_3}{c_1}\mathbb{V}(s,v,y)$$
получим неравенство
$$z(t_2)-z(t_1)\le-\frac{c_3}{c_1}\int_{t_1}^{t_2}z(t)dt.$$

Таким образом, учитывая доказанное выше неравенство, будем иметь цепочку тривиальных неравенств
$$\mathbb{E}\{|v(s+t,s,v_0,y)|^l\}\le\frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,v_0,y),\xi(t))\}\le$$
$$\le\frac{1}{c_1}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau,v(s+\tau,v_0,y),\xi(t))\}\exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\}\le$$
$$\le\frac{c_2}{c_1}\exp\left\{\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)\right\}\exp\{p_2Kh|v_0|^l\}$$
для всех $v_0\in\mathbb{R}^1$, $s\ge 0$, $y\in\mathbb{Y}$ и $t\ge\tau$.

Очевидно, что согласно лемме 1 при $l=2$ имеем экспоненциальную устойчивость в l.i.m. тривиального решения задачи Коши СДУ в ЧП (1), (2).

Теорема 4. Пусть:

1) выполнены локальные условия Липшица на коэффициенты ЛСДУ в ЧП (1);

2) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям 3), 4) теоремы 2.

Тогда нулевое решение $v(t,\cdot,\omega)\equiv 0$ задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2) асимптотически стохастически устойчиво.

Доказательство. Пусть τ_r — момент первого выхода решения $v(t,x,\omega)$ ЛСДУ (10) из сферы $\mathbb{U}_r(0)$. Тогда для $\forall t\geq 0$ и $\forall r>0$ по формуле Дынкина [15] и определению функции Ляпунова выполняется неравенство

$$c_1\mathbb{E}\{|v(s+\tau_r(t),s,v_0,y)|^l\}\leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+\tau_r(t),v(s+\tau_r(t),s,v_0),\xi(\tau_r(t)))\}\leq$$
$$\leq \mathbb{V}(s,v_0,y)\leq c_1|v_0|^l.$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to 0}\tau_r(t)=t,$ существует $\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,\xi(t)))\}<\infty$ для всех $t\geq 0,$ $v_0\in\mathbb{R}^1,$ $s\geq 0$ и $y\in\mathbb{Y}$.

Пусть $\mathcal{F}_t$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(s)$ для $s\in[0,t]$. Тогда $\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))$ тоже $\mathcal{F}_t$-измеримо, а в силу марковского свойства для произвольного $z\in[0,t]$ выполняется основное равенство в определении марковского процесса

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_{0,}\ y),\xi(t))\,|_{\mathcal{F}_z}\}=$$
$$=\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s_1+(t-z),v(s_1+(t-z),s,v_{1,}\ h),\xi(t-z))\},$$

где правая часть должна быть вычислена при $s_1=s+z,$ $h=\xi(z),$ $v_1=$ $=v(s+z,s,v_0,y)$.

Далее, из неравенства (30) можно получить неравенство

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_{0,}\ y),\xi(t))\,|_{\mathcal{F}_z}\}\leq \mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+z,v(s+z,s,v_0,y),\xi(t))\},$$

а это по определению супермартингала [16] означает, что $\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,\xi(t)))$ — неотрицательный супермартингал для $t\geq 0$. Значит, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))=\eta(\omega)\geq 0$ с вероятностью единица.

Далее, из неравенств (29), (30) теоремы 2 можно получить неравенства

$$\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))\}\leq$$
$$\leq c_2|v_0|^l-c_3\int_0^t\mathbb{E}\{|v(s+s_1,s,v_0,y)|^l\}ds_1\leq$$
$$\leq c_2|v_0|^l-\frac{c_3}{c_1}\int_0^t\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+s_1,v(s+s_1,s,v_0,y),\xi(t_1))|\}ds_1,$$

а это означает, что

$$\mathbb{E}\{\eta(\omega)\}=\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))\}\leq c_2|v_0|^l\lim_{t\to\infty}\exp\left\{-\frac{c_3}{c_1}t\right\}=0.$$

Отсюда сразу следует $\mathbb{P}\{\omega:\eta(\omega)=0\}=1$.

Для завершения доказательства нужно учесть основное неравенство для супермартингалов [16, 20], которое дает неравенства $\forall\varepsilon>0$:

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\sup_{t\geq T}|v(s+t,s,v_0,y)|\geq\varepsilon\right\}\leq$$
$$\leq\mathbb{P}\left\{\omega:\sup_{t\geq T}\frac{1}{T}\mathbb{V}(s+t,v(s+t,s,v_0,y),\xi(t))\geq\varepsilon^l\right\}\leq$$
$$\leq\frac{1}{c_1\varepsilon^l}\mathbb{E}\{\mathbb{V}(s+T,v(s+T,s,v_0,y),\xi(T))\}\leq\frac{c_2|\varphi|^l}{c_1\varepsilon^l}\exp\left\{-\frac{c_3}{c_1}T\right\}$$

для всех $T>0$, $\varepsilon>0$, $v_0 \in \mathbb{R}^1$, $s>0$, $y \in \mathbb{Y}$.

Осталось рассмотреть предел при $T \to \infty$ и теорема 4 доказана.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛСДУ В ЧП С ДИСКРЕТНЫМИ МАРКОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Дискретный марковский параметр ЛСДУ в ЧП (1), (2) может выступать в таких структурных характеристиках.

Рассмотрим скалярный процесс $\xi(t) \in \mathbb{Y}$, который является однородной цепью Маркова с конечным числом состояний $\mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$, причем известны параметры q_{ij} с условиями

$$q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij},$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t+\Delta t) = y_i \,|\, \xi(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) = y_i,\ t \le \tau \le t+\Delta t \,|\, \xi(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t).$$

Пусть эта цепь Маркова $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ является параметром задачи Коши для ЛСДУ в ЧП (1), (2).

Допустим, что в момент $\tau>0$ скачкообразной смены структуры фазовый вектор $u(\tau) \in \mathbb{R}^1$ однозначно определяется состоянием, в котором находилась динамическая система непосредственно перед сменой структуры, вызываемой переходом из состояния $\xi(\tau-0) = y_i$ в состояние $\xi(\tau) = y_j \neq y_i$. Это означает выполнение равенства

$$u(\tau) = \varphi_{ij}(u(\tau-0)),\ i \neq j,$$

где $\varphi_{ij}(u) \in \mathbb{R}^1$, причем $\varphi_{ij}(0) = 0$.

С учетом формулы (23) в случае цепи Маркова слабый инфинитезимальный оператор на решениях ЛСДУ в ЧП (10), (11) имеет вид [15, 18]

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, y) = \frac{\partial \mathbb{V}(s, v, y)}{\partial s} + (\nabla \mathbb{V})(s, v, y) Q\left(B(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbb{V})(s, v, y) Q^2 \left(C(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma \right) +$$
$$+ \sum_{j \neq i}^{k} [\mathbb{V}(s, \varphi_{ij}(v), y_j) - \mathbb{V}(s, v, y_j)] q_{ij}.$$

В этом случае справедливы теоремы 2–4 об устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ (10), (11), а, значит, в силу леммы 1 и устойчивости тривиального решения задачи Коши ЛСДУ в ЧП (1), (2).

Пусть $\xi(t) \in \mathbb{Y}$ — чисто разрывный скалярный марковский процесс $\forall t \in [t_1, t_2]$ такой, что допускает разложение

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(t+\Delta t) \in (\beta, \beta+\Delta\beta) \,|\, \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbb{P}\{\omega : \xi(\tau) \equiv \alpha, \tau \in (t, t+\Delta) \,|\, \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t).$$

Тогда слабый инфинитезимальный оператор на решениях ЛСДУ в ЧП (10), (11) примет вид [15, 18]

$$(\mathcal{L}\mathbb{V})(s, v, \xi(s)) = \frac{\partial \mathbb{V}(s, v, \xi(s))}{\partial s} + (\nabla \mathbb{V}(s, v, \xi(\omega)) Q\left(B(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma) \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbb{V})(s, v, y) Q^2 \left(C(s, y), \frac{d}{ds}, i\sigma \right) +$$
$$+ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\, \mathbb{V}(s, v, \beta) - \mathbb{V}(s, v, \alpha)] p(t, \alpha, \beta) d\beta.$$

Заметим, что и в этом случае имеют место теоремы 2–4 об устойчивости тривиального решения $v(t, \sigma, \omega) \equiv 0$ ЛСДУ (10), (11). Следовательно, в силу леммы 1 справедливы те же утверждения и для тривиального решения $u(t, x, \omega) \equiv 0$ ЛСДУ в ЧП (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1997. — 495 с.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 521 с.
3. Эйдельман С.Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 445 с.
4. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 333 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 251 с.
6. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложение. — Киев: Наук. думка, 1982. — 612 с.
7. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
8. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — Рига: Зинатне, 1989. — 421 с.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 301 с.
10. Гихман И.И. О смешанной задаче для стохастического дифференциального уравнения параболического типа // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 3. — С. 367–377.
11. Гихман И.И. Граничная задача для стохастического уравнения параболического типа // Там же. — 1979. — **31**, № 5. — С. 31–38.
12. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
13. Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 1. — С. 13–20.
14. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Там же. — 1993. — **45**, № 9. — С. 1773–1781.
15. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз., 1969. — 859 с.
16. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.
17. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.
18. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 541 с.
19. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005. — 408 с.
20. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
21. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 463 с.
22. Царьков Е.Ф. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений // Теория вероятностей и ее применение. — 1976. — Вып. 4. — С. 871–875.
23. Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 1. — С. 78–98.

Поступила 30.12.2013