СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

В.С. КИРИЛЮК

УДК 519.21

ТЕОРИЯ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ПОРТФЕЛИ И ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА[1]

Аннотация. Показано, как поиск оптимальных решений в рамках теории ожидаемой полезности сводится к минимизации некоторой меры риска. С помощью аппарата полиэдральных когерентных мер риска поиск оптимальных портфельных решений в полученных задачах сводится к решению соответствующих проблем линейного программирования.

Ключевые слова: теория ожидаемой полезности, полиэдральная когерентная мера риска, Conditional Value-at-Risk, спектральная мера риска, оптимизация портфеля.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением [1]. Здесь описано использование аппарата полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР) для поиска оптимальных портфельных решений для проблем, обусловленных применением теории ожидаемой полезности. Рассмотрена взаимосвязь этой теории и мер риска. В частности, она изучена для теории ожидаемой полезности (при некоторых свойствах функции полезности) и для двойственной теории выбора. Поиск оптимальных решений для таких проблем с непрерывно распределенными случайными величинами (с.в.) сводится к минимизации соответствующей спектральной меры риска.

Изучены дискретные аппроксимации задач минимизации спектральных мер риска, в которых непрерывные с.в. аппроксимируются дискретными распределениями с конечным набором событий-сценариев. Показано, как проблема минимизации спектральной меры риска портфеля для дискретно распределенных с.в. сводится к соответствующей задаче линейного программирования (ЛП).

Рассмотрена ожидаемая полезность в робастной постановке Гилбоа–Шмейдлера. Проблемы поиска оптимальных портфельных решений в этой постановке для конечных дискретно распределенных с.в. тоже сведены к соответствующим проблемам ЛП. Это сделано для случая полиэдрального множества неопределенности относительно сценарных вероятностей и кусочно-линейной функции полезности, а также для случая гладкой строго вогнутой функции полезности и неточных сценарных вероятностей.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ

Традиционно в финансовых приложениях выбор решений осуществляется по соотношению вознаграждение–риск, в котором решения оцениваются с помощью некоторых функций вознаграждения и риска. В классических моделях

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Международного проекта в рамках сотрудничества с Международным институтом системного анализа (IIASA), распоряжение Президиума НАН Украины №212 от 28.02.2012.

Марковица в этом качестве использовались средняя доходность и дисперсия [2] (полудисперсия [3]), ныне для оценки риска используются более современные меры (см., например, [1]). Подразумевается, что выбором оптимального по соотношению вознаграждение–риск решения инвестор неявно максимизирует некоторую свою функцию полезности.

Другой подход, более близкий к экономическим приложениям, связан с определением функции полезности в явном виде и предполагает оценку решений в этой преобразованной шкале полезности. Идеи Бернулли о предпочтении на множестве лотерей [4] легли в основу теории ожидаемой полезности. Нейман и Моргенштерн предложили для нее аксиоматический подход [5], который развил и завершил Сэвидж [6], сформулировавший условия, при которых предпочтения на множестве с.в. описываются в терминах ожидаемой полезности $u(.)$ по некоторой вероятностной мере P. Например, для с.в. X и Y:

$$X \geq Y \Leftrightarrow \exists P, u(.): E_P[u(X)] \geq E_P[u(Y)], \tag{1}$$

где $E_P[.]$ — математическое ожидание по вероятностной мере P.

Однако, как впоследствии показали парадоксы Але [7] и Эллсберга [8], такая модель несовершенна. Позднее парадокс Эллсберга для соотношения (1) разрешил Шмейдлер введением аппарата неаддитивных вероятностей [9], а также совместно с Гилбоа [10] в рамках классической аксиоматики теории вероятности с помощью следующего робастного варианта соотношения (1):

$$X \geq Y \Leftrightarrow \exists Q, u(.): \inf\{E_P[u(X)]: P \in Q\} \geq \inf\{E_P[u(Y)]: P \in Q\}, \tag{2}$$

где Q — некоторое выпуклое множество вероятностных мер.

Вариант робастного соотношения типа (2) предложили также Иваненко и Лабковский в [11], в котором множество вероятностных мер Q назвали «статистическими закономерностями».

Отметим, что парадокс Але разрешен в двойственной теории выбора [12, 13], в которой предпочтения на множестве с.в. формулируются с помощью двойственной функции $g(.)$ в виде интеграла Шоке [14]:

$$X \geq Y \Leftrightarrow U_g(X) \geq U_g(Y), \tag{3}$$

где

$$U_g(X) = -\int_{-\infty}^{0} [1 - g(\bar{F}_X(x))]dx + \int_{0}^{+\infty} g(\bar{F}_X(x))dx, \tag{4}$$

$\bar{F}_X(x) = P\{X > x\}$ — декумулятивная функция распределения, $g: [0,1] \to [0,1]$ — некоторая непрерывная возрастающая функция, $g(0) = 0,\ g(1) = 1$.

Далее изучим, как при определенных условиях поиск оптимальных решений в рамках отношений порядка в виде (1), (2) и (3), (4) можно свести к минимизации некоторой меры риска. Начнем с классической теории ожидаемой полезности (1).

2. ОЖИДАЕМАЯ ПОЛЕЗНОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА РИСКА

В [15] показано, что при некоторых свойствах функции $u(.)$ существует взаимно-однозначное соответствие между ожидаемой полезностью и спектральной мерой риска. Это позволяет свести поиск оптимальных решений в рамках классической теории ожидаемой полезности к минимизации соответствующей спектральной меры риска.

Напомним, что функция квантиля для с.в. X определяется как $q_X(\alpha) = \inf\{z / F_X(z) \geq \alpha\}$, где $F_X(.)$ — кумулятивная функция распределения X. Если при этом $q_X(\alpha) = \sup\{z / F_X(z) \leq \alpha\}$, то квантиль однозначно задается уравнением $F_X(u) = \alpha$. Тогда $F_X^{-1}(\alpha)$ существует и $F_X^{-1}(\alpha) = q_X(\alpha)$.

В работе [16] для с.в. X введена спектральная мера риска $M_\varphi(X)$, которая имеет вид

$$M_{\varphi}(X) = -\int_0^1 \varphi(p) q_X(p) dp, \tag{5}$$

где $q_X(p)$ — функция квантиля, а функция $\varphi:[0,1] \to R$ называется спектром риска и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(.) \geq 0$; $\varphi(.)$ — убывающая функция; $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$.

Утверждение 1 [15]. Если множество образов непрерывной с.в. X является подмножеством определения непрерывно дифференцируемой и строго вогнутой функции полезности $u(.)$, функция распределения $F_X(x)$ монотонно возрастает и функция квантиля $F_X^{-1}(p)$ существует, то существует взаимно-однозначное соответствие между ожидаемой полезностью функции $u(.)$ и индуцированной спектральной мерой риска, которое устанавливается такой процедурой.

1. Определим функцию $v(x) = u(x) - u(0)$, которая удовлетворяет следующим свойствам: $v(0) = 0$; непрерывно дифференцируема; непрерывно возрастает по x; строго вогнута.

2. Вычислим $E[v(x)/x]$ и введем функцию $w(x) = v(x)/E[v(x)/x]$.

3. Положим $\psi(x) = w(x)/x$ и определим функцию $\varphi(p) = \psi(F_X^{-1}(p))$.

4. Определим спектральную меру риска

$$M_{\varphi}(X) = -\int_0^1 \varphi(p) F_X^{-1}(p) dp. \tag{6}$$

Непосредственно из приведенной процедуры следует, что

$$E[u(X)] = -M_{\varphi}(X),$$

поэтому максимизация ожидаемой полезности решения сводится к минимизации построенной спектральной меры риска.

Замечание 1. Спектральная мера риска является согласованной со стохастическим доминированием второго порядка [16]. Это означает, что ожидаемая полезность решений, выбираемых посредством минимизации спектральной меры риска, не ухудшается ни для одной вогнутой неубывающей функции полезности [17].

3. ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ВЫБОРА И СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА РИСКА

Как и ранее, будем полагать, что функция распределения $F_X(p)$ непрерывной с.в. X монотонно возрастает и ее функция квантиля $F_X^{-1}(p)$ существует. В соответствии с [18] перепишем $U_g(X)$ из соотношения (4) с учетом обозначения

$$h(u) = 1 - g(1-u). \tag{7}$$

Получим

$$U_g(X) = -\int_{-\infty}^{0} h(F_X(x)) dx + \int_0^{+\infty} [1 - h(F_X(x))] dx = \int_0^1 F_X^{-1}(p) dh(p). \tag{8}$$

Заметим, что $U_g(X)$ при $h(p) = p$ есть не что иное, как математическое ожидание $E[X]$. Поэтому в соответствии со сложившейся терминологией представление $U_g(.)$ называется деформированной мерой риска [19, 20].

Если функция $h(u)$ дифференцируема, то (8) можно представить как

$$U_g(X) = \int_0^1 \varphi(p) F_X^{-1}(p) dp, \tag{9}$$

где

$$\varphi(p) = \frac{dh(p)}{dp}. \tag{10}$$

В случае, когда функция $h(t)$ является вогнутой, представления деформированной меры (8) и спектральной меры (9), (10) по сути эквивалентны [21].

Следуя [15], для построения соответствующей меры риска используем принцип премии за риск, которая, собственно, и описывает меру риска. Рассмотрим равенство $U_g(X+\pi)=0$. Тогда, как нетрудно видеть, деформированная мера риска есть

$$\rho_g(X)=\pi=-U_g(X). \tag{11}$$

Учитывая соотношение (9), окончательно получаем

$$\rho_g(X)=-\int_0^1 F_X^{-1}(p)dh(p)=-\int_0^1 \varphi(p)F_X^{-1}(p)dp, \tag{12}$$

где функции $h(.)$ и $\varphi(.)$ взаимосвязаны соотношением (10), а функции $h(.)$ и $g(.)$ — соотношением (7).

Как следует из (11), максимизация полезности $U_g(.)$ сводится к минимизации построенной спектральной меры риска. Таким образом, для поиска оптимальных решений в рамках двойственной теории выбора [13] достаточно минимизировать индуцированную спектральную меру риска из соотношения (12).

4. МИНИМИЗАЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ МЕРЫ РИСКА ПОРТФЕЛЯ

Ранее показано, как при некоторых условиях в рамках классической теории ожидаемой полезности и двойственной теории выбора поиск оптимальных решений для непрерывно распределенных с.в. сводится к минимизации индуцированной спектральной меры риска в виде (6) и (12) соответственно.

Будем считать, что непрерывно распределенные с.в. с достаточной точностью аппроксимируются дискретными с.в. с конечным множеством событий-сценариев, например, эмпирическими распределениями [22]. Покажем, как вычислять портфель с минимальной спектральной мерой для такого случая с помощью аппарата ПКМР.

Определение ПКМР для конечных дискретно распределенных с.в. вводилось в [23] как

$$\rho(X)=\sup\{E_P[-X]: P\in Q_\rho\}, \tag{13}$$

где Q_ρ — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер, представленное в виде

$$Q_\rho=\{p: Bp\le c,\ p\ge 0\}, \tag{14}$$

B и c — матрица и вектор соответствующих размерностей.

Замечание 2. Соотношение (13) определяет когерентную меру риска (КМР), введенную в основополагающей работе [24], в то время как условие (14) обеспечивает ее полиэдральность.

Как и в [1], разделим описание множества Q_ρ в (14) на стандартную (обязательную) и содержательную части. Представим матрицу B и вектор c как

$$B=\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где B_0 и c_0, описывающие упомянутые выше неравенства, являются стандартными

$$B_0=\begin{pmatrix} 1\ldots 1 \\ -1\ldots -1 \end{pmatrix},\ c_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

а B_1 и c_1 описывают содержательную часть в соотношении (15), которая и определяет собственно меру риска в виде соотношений (13)–(16).

Напомним следующие полезные факты из [1].

Пример 1. Рассмотрим меру Conditional Value-at-Risk (*CVaR*), введенную в [25]. Для конечных дискретно распределенных с.в. $CVaR_\alpha$ является ПКМР и представляется в виде (13)–(16), где матрица B_1 и вектор c_1 имеют простой вид

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{1}{1-\alpha} p_0, \tag{17}$$

где I — единичная матрица, p_0 — вектор сценарных вероятностей.

Пример 2. Для конечных дискретно распределенных с.в. спектральная мера риска (5) имеет вид [1]

$$M_\varphi(X) = \sum_{i=1^n} \lambda_i CVaR_{\alpha_i}(X), \tag{18}$$

где соответствующие λ_i и α_i определяются для n сценариев и спектра риска $\varphi(.)$ следующим образом. Упорядочим посценарные значения с.в. X в порядке убывания, перенумеровав в соответствии с ним события-сценарии и их вероятности. Обозначим последние p_i^*, $i = 1, \ldots, n$. Как известно из [1],

$$\alpha_i = 1 - \sum_{j=1}^{i} p_j^*,\ i = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

$$\lambda_1 = \left(\int_0^{p_1^*} \varphi(p)dp - \frac{p_1^*}{p_2^*} \int_{p_1^*}^{p_1^*+p_2^*} \varphi(p)dp \right),\ \lambda_n = \frac{1}{p_n^*} \int_{p_1^*+\ldots+p_{n-1}^*}^{1} \varphi(p)dp, \tag{20}$$

$$\lambda_i = \frac{p_1^* + \ldots + p_i^*}{p_i^*} \left(\int_{p_1^*+\ldots+p_{i-1}^*}^{p_1^*+\ldots+p_i^*} \varphi(p)dp - \frac{p_i^*}{p_{i+1}^*} \int_{p_1^*+\ldots+p_i^*}^{p_1^*+\ldots+p_{i+1}^*} \varphi(p)dp \right),\ i = 2, \ldots, n-1. \tag{21}$$

В случае, когда вероятности всех сценариев равны $\frac{1}{n}$, выражения для параметров представления $M_\varphi(.)$ значительно упрощаются

$$\alpha_i = 1 - \frac{i}{n},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\lambda_i = i \left(\int_{(i-1)/n}^{i/n} \varphi(p)dp - \int_{i/n}^{(i+1)/n} \varphi(p)dp \right),\ i = 1, \ldots, n-1,\ \lambda_n = n \int_{(n-1)/n}^{1} \varphi(p)dp.$$

Из утверждения 1 [1] следует, что такая мера риска есть $CVaR_{\alpha_*}(X)$, где

$$\frac{1}{1-\alpha_*} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i}.$$

Таким образом, спектральная мера риска является ПКМР, представленной в виде (13)–(16), где

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0, \tag{22}$$

α_i, λ_i, $i = 1, \ldots, n$, описываются соотношениями (19)–(21).

Рассмотрим теперь проблему оптимизации портфеля. Пусть распределение доходности компонент портфеля z_j, $j = 1, \ldots, k$, описывается матрицей H размерности $n \times k$, где j-й столбец описывает распределение j-й компоненты. Вектор $u = (u_1, \ldots, u_k)$, описывающий структуру портфеля, рассматривается как переменная, причем $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$. Необходимо найти такую структуру портфеля u, которая минимизирует его спектральную меру риска.

Таким образом, при известных распределениях с.в. рассматривается проблема минимизации ПКМР $\rho(.)$ в виде (13)–(16), (22), (19)–(21):

$$\min_{\sum_1^n u_i = 1,\, u \geq 0} \rho(Hu). \tag{23}$$

Для задачи (23) нетрудно сформулировать прямое следствие теоремы 1 из [1], позволяющее свести поиск оптимального портфеля к соответствующей задаче ЛП.

Утверждение 2. Оптимальным портфелем задачи (23), (13)–(16), (22), (19)–(21) является компонента u решения (v, u) следующей проблемы ЛП:

$$\begin{gathered} \min_{(v,u)} \quad < c, v >, \\ -B^{\mathrm{T}} v - Hu \le 0 \\ \sum u_i = 1 \\ v \ge 0,\ u \ge 0 \end{gathered}$$

а значения в решениях по функциям этих задач совпадают.

5. РОБАСТНЫЙ ВАРИАНТ ОЖИДАЕМОЙ ПОЛЕЗНОСТИ ГИЛБОА–ШМЕЙДЛЕРА

Вернемся к соотношению (2). Вводя обозначение

$$r(Z) = \inf \{E_P[Z] : P \in Q\}, \tag{24}$$

получаем

$$r(u(X)) = \inf \{E_P[u(X)] : P \in Q\}. \tag{25}$$

С учетом (24), (25) соотношение (2) имеет вид

$$X \ge Y \Leftrightarrow r(u(X)) \ge r(u(Y)). \tag{26}$$

Это соотношение также можно представить в другом, эквивалентном виде,

$$X \ge Y \Leftrightarrow \sup \{E_P[-u(X)] : P \in Q\} \le \sup \{E_P[-u(Y)] : P \in Q\}.$$

Обратимся теперь к определению КМР $\rho(.)$ в соотношении (13). Как нетрудно видеть, КМР для $u(X)$ есть

$$\rho(u(X)) = \sup \{E_P[-u(X)] : P \in Q\}. \tag{27}$$

В таких обозначениях соотношение (26) имеет вид

$$X \ge Y \Leftrightarrow \rho(u(X)) \le \rho(u(Y)). \tag{28}$$

Следовательно, в описанном варианте ожидаемой полезности (2) решения принимаются в соответствии с одним из эквивалентных отношений предпочтения (26) или (28), в которых критерии $r(u(.))$ и $\rho(u(.))$ описываются соответственно соотношениями (25) и (27).

Первый критерий $r(u(.))$ можно интерпретировать как гарантированную ожидаемую полезность (вознаграждение); второй критерий $\rho(u(.))$ — с точностью до постоянной как потенциально утраченную полезность (вознаграждение).

Действительно, добавив к $\rho(u(X))$ некоторую константу эталонной полезности u_0, получим равенство

$$u_0 + \sup \{E_P[-u(X)] : P \in Q\} = \sup \{E_P[u_0 - u(X)] : P \in Q\},$$

правая часть которого представляет потенциальную утраченную полезность по сравнению с эталонной u_0. Поэтому естественно считать, что $r(u(X))$ описывает вознаграждение при выборе X, а $\rho(u(X))$ — его риск.

Оптимизация портфеля для робастного варианта ожидаемой полезности с кусочно-линейной функцией полезности. Как показано ранее, оптимальное решение определяется одним из двух эквивалентных (с точностью до знака) критериев: $r(u(X))$ и $\rho(u(.))$. Выберем в этом качестве меру риска $\rho(u(.))$. Если функция полезности $u(.)$ является кусочно-линейной, а мера риска $\rho(.)$ есть ПКМР, то задачи поиска оптимальных решений можно свести к проблемам ЛП. Опишем это.

Итак, пусть имеется неубывающая вогнутая кусочно-линейная функция полезности $u(.)$, представленная в виде $u(x) = \min\{a_j x + b_j,\ j = 1, \dots, m\}$, где $a_j \ge 0$, $j = 1, \dots, m$, и $\exists\, j_* : 1 \le j_* \le m$, что $a_{j_*} > 0$, тогда $-u(x) = \max\limits_{1 \le j \le m} \{-a_j x - b_j\}$.

Выпишем для дискретно распределенной с.в. X в соответствии с (27) меру риска

$$\rho(X) = \max\ \{E_P[\max_{1\le j\le m}\{-a_j X - b_j\}] : P \in Q\}.$$

Более точно, если Q — полиэдральное множество, представленное в виде (14), то имеем

$$\rho(X) = \max\{E_P[\max_{1\le j\le m}\{-a_j X - b_j\}] : Bp \le 0,\ p \ge 0\}. \tag{29}$$

Для вектора x — посценарного распределения с.в. X, введем вектор-функцию

$$w(x) = (-u(x_1), \ldots, -u(x_n)), \tag{30}$$

где

$$-u(x_i) = \max_{1\le j\le m}\{-a_j x_i - b_j\},\ i = 1, \ldots, n.$$

С ее использованием соотношение (29) приобретает вид $\rho(X) = \max\{< w(x), p > : Bp \le c,\ p \ge 0\}$. Тогда для портфеля с матрицей доходностей компонент H и структурой портфеля u задача минимизации такой меры риска формулируется как

$$\min_{\sum_{i=1}^k u_i = 1,\ u \ge 0}\ \max_{Bp \le c,\ p \ge 0}\ < w(Hu)\, p >. \tag{31}$$

Эту проблему можно свести к некоторой задаче ЛП.

Утверждение 3 [26]. Решением задачи минимизации меры риска портфеля (31), (30) есть компонента u решения (u, v) следующей задачи ЛП:

$$\begin{array}{ll}\min_{(u,v)} & < c, v >,\\ \sum_{i=1}^k u_i = 1,\ u \ge 0,\ v \ge 0 & \\ -B^{\mathrm{T}} v - a_1 Hu - b_1 e \le 0 & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ -B^{\mathrm{T}} v - a_m Hu - b_m e \le 0 & \end{array}$$

где $e = (1, \ldots, 1)'$ — единичный вектор. Решения этих задач по функции совпадают.

Доказательство состоит в замене внутренней подзадачи проблемы (31) ее двойственной

$$\max_{Bp \le c,\ p \ge 0}\ < w(Hu), p > \Leftrightarrow \min_{B^{\mathrm{T}} v \ge w(Hu),\ v \ge 0}\ < c, v >,$$

а также замене неравенства «≥» для $\max_{1\le j\le m}\{-a_j Hv - b_j e\}$ из представления функции $w(.)$ на такие же неравенства для всех его компонент $1 \le j \le m$.

Оптимизация портфеля для робастного варианта ожидаемой полезности с гладкой строго вогнутой функцией полезности. Вернемся к ситуации, когда ожидаемая полезность с гладкой строго вогнутой функцией полезности сводилась к спектральной мере риска (6) с помощью процедуры, описанной в утверждении 1. Тогда

$$X \ge Y \Leftrightarrow E[u(X)] \ge E[u(Y)] \Leftrightarrow M_\varphi(X) \le M_\varphi(Y),$$

где

$$M_\varphi(X) = -E[u(X)]. \tag{32}$$

Обратимся теперь к робастному варианту ожидаемой полезности в виде (26), (25)

$$X \ge Y \Leftrightarrow \inf\ \{E_P[u(X)] : P \in Q\} \ge \inf\ \{E_P[u(Y)] : P \in Q\}.$$

Учитывая (32), нетрудно получить для него соотношение с помощью спектральной меры риска в виде

$$X \ge Y \Leftrightarrow \sup\{M_\varphi(X) : P \in Q\} \le \sup\{M_\varphi(Y) : P \in Q\}. \tag{33}$$

Покажем далее, как построить необходимый робастный вариант спектральной меры риска из этого соотношения, предполагая, что непрерывная с.в. с достаточной точностью аппроксимируется дискретным распределением.

Воспользуемся аппаратом ПКМР. Напомним соответствующую конструкцию робастных ПКМР для конечных дискретно распределенных с.в. Для этого определение ПКМР из [23] уточнялось в [27] следующим образом:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in a_\rho(P_0)\}, \tag{34}$$

где многозначное отображение (м.о.) $a_\rho(.)$ с выпуклыми многогранными образами определяет меру риска $\rho(.)$ по исходной вероятностной мере P_0. Например, если риск оценивается средними убытками, то $a_\rho(P_0) = \{P_0\}$ и $\rho(X) = E_{P_0}[-X]$. Для меры $CVaR$ такая зависимость $a_\rho(.)$ от P_0 (вектора сценарных вероятностей p_0) описана в явном виде в соотношении (17).

В случае, когда P_0 не идентифицирована, а известно лишь, что $P_0 \in Q$, по исходной мере риска (34) и множеству неопределенности Q в [27] строилась ее робастная конструкция вида

$$\rho_{\rho,Q}(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in a_\rho(Q)\}, \tag{35}$$

где
$$a_\rho(Q) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{P_0 \in Q} a(P_0)\right),\ \overline{\text{co}} \text{ — выпуклая замкнутая оболочка.}$$

Пример 3. Рассмотрим случай, когда риск оценивается $CVaR_\alpha$ при неточных сценарных вероятностях, представленных покоординатными оценками снизу и сверху в виде соответствующих векторов p_l и p_u. Тогда множество Q имеет вид

$$Q = \left\{ p : p \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_l \le p \le p_u \right\}. \tag{36}$$

В этом случае, как отмечалось в [1],

$$a_{CVaR_\alpha}(Q) = \left\{ p : p \ge 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ Ip \le \frac{p_u}{1-\alpha} \right\},$$

и $\rho_{CVaR_\alpha, Q}(.)$ можно описать в стандартном для ПКМР виде соотношениями (14)–(16), где

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha}.$$

В силу представления ПКМР как супремума линейного функционала на выпуклом множестве в соотношении (34) нетрудно видеть, что $\sup\{\rho(X) : P \in Q\} = \rho_{\rho,Q}(X)$. Следовательно, в таких терминах соотношение (33) имеет вид

$$X \ge Y \Leftrightarrow \rho_{M_\varphi, Q}(X) \le \rho_{M_\varphi, Q}(Y), \tag{37}$$

где $\rho_{M_\varphi, Q}(.)$ — робастный вариант конструкции (35) для спектральной меры риска $M_\varphi(.)$, полученной с помощью процедуры, описанной в утверждении 1.

Таким образом, в случае робастного варианта ожидаемой полезности (26), (25) поиск оптимального портфеля сводится к минимизации робастного варианта спектральной меры риска портфеля.

Построение робастного варианта ПКМР в виде (35) не является тривиальной задачей (см. замечание 7 из [1]). Однако в простейшем случае, когда множество Q описывается в виде множества сценарных вероятностей с простейшими ограничениями снизу и сверху (случай неточных вероятностей), сделать это достаточно легко.

Итак, пусть имеется сведение отношения предпочтения в виде ожидаемой полезности с гладкой строго вогнутой функцией полезности к отношению предпочтения для соответствующей спектральной меры риска в виде (32). Затем с.в.

аппроксимируется дискретным распределением (по множеству сценариев), для которого эту меру риска можно представить как выпуклую комбинацию мер $CVaR$ в виде (18)–(20) или в соответствии с утверждением 1 [1] — как $CVaR_{\alpha*}(X)$, где $\alpha*$ описывается с помощью соотношений (19)–(21).

Если при этом множество Q из (33) является множеством неточных вероятностей (36), то индуцированная робастная спектральная мера риска $\rho_{M_\varphi, Q}(.)$ из (37) есть не что иное, как $\rho_{CVaR_{\alpha*}, Q}(.)$, которая описывается в виде (13)–(16), где

$$B_1 = I, c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha*}, \tag{38}$$

$\dfrac{1}{1-\alpha*} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda_i}{1-\alpha_i}$ и α_i, λ_i, $i = 1, \ldots, n$, описываются соотношениями (19)–(21).

Теперь для поиска оптимальных портфелей в соответствии с (33) для простых множеств Q в виде (36) можем сформулировать некоторое следствие теоремы 1 [1].

Итак, пусть имеется проблема минимизации робастной спектральной меры риска $\rho_{M_\varphi, Q}(.)$ портфеля, которая описана в виде робастной меры $\rho_{CVaR_{\alpha*}, Q}(.)$ в форме (13)–(16), (38), (19)–(21)

$$\min_{\sum_1^n u_i = 1,\, u \geq 0} \rho_{CVaR_{\alpha*}, Q}(Hu). \tag{39}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Оптимальным портфелем в проблеме (39), (13)–(16), (38), (19)–(21) является компонента u решения (v, u) проблемы ЛП

$$\begin{gathered} \min_{(v,u)} \quad < c, v >, \\ -B^{\mathrm{T}} v - Hu \leq 0 \\ \sum u_i = 1 \\ v \geq 0,\, u \geq 0 \end{gathered}$$

а значения в решениях по функциям этих задач совпадают.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для экономических приложений, где используется теория ожидаемой полезности, обсуждается сведение поиска оптимальных решений к минимизации соответствующей меры риска. Так, для ряда таких задач индуцированной мерой является спектральная мера риска.

Показано, что для случая конечных дискретно распределенных с.в., представляющих естественную аппроксимацию непрерывных с.в., полученные задачи минимизации спектральной меры риска для портфеля можно решить стандартными средствами ЛП. Аппарат ПКМР позволяет свести такие проблемы к соответствующим задачам ЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение–риск // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 5. — С. 85–103.

2. Markowitz H.M. Portfolio selection // J. Finance. — 1952. — **7**(1). — P. 77–91.

3. Markowitz H.M. Portfolio selection: Efficient diversification of investments. — New York: Wiley, 1959. — 344 p.

4. Bernoulli D. Specimen teoriae novae de mensura sortis // Comment Acad. Sci. Imp. Petropolitanae. — 1738. — **V**. — P. 175–192.

5. V o n N e u m a n n J., M o r g e n s t e r n O. Theory of games and economic behavior. — Princeton: Princeton University Press, 1944. — 625 p.
6. S a v a g e L. J. The foundation of statistics. — New York: Wiley, 1954. — 294 p.
7. A l l a i s M. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine // Econometrica. — 1953. — **21**. — P. 503–546.
8. E l l s b e r g D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms // Quart. J. Econ. — 1961. — **75**. — P. 643–669.
9. S c h m e i d l e r D. Subjective probability and expected utility without additivity // Econometrica. — 1989. — **57**. — P. 571–587.
10. G i l b o a I., S c h m e i d l e r D. Maxmin expected utility with non-unique prior // J. Math. Economics. — 1989. — **18**. — P. 141–153.
11. И в а н е н к о В. И., Л а б к о в с к и й В. А. Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — Киев: Наук. думка, 1990. — 136 с.
12. Q u i g g i n J. Generalized expected utility theory: The rank-dependent expected utility model. — Boston: Kluwer Acad., 1993. — 208 p.
13. Y a a r i M. E. The dual theory of choice under risk // Econometrica. — 1987. — **55**. — P. 95–115.
14. C h o q u e t G. Theory of capacities // Annales de l'Institut Fourier Grenoble. — **5**. — 1955. — P. 131–295.
15. W a c h t e r H. P., M a z z o n i T. Consistent modeling of risk averse behavior with spectral risk measures // Europ. J. Operational Research. — 2013. — **229**(2). — P. 487–495.
16. A c e r b i C. Spectral measuers of risk: a coherent representation of subjective risk aversion // J. Banking & Finance. — 2002. — **26**(7). — P. 1505–1518.
17. R o t h s c h i l d M., S t i g l i t z J. Increasing risk I: a definition // J. Econ. Theory. — 1970. — **2**. — P. 225–243.
18. D i s t o r t i o n risk measures in portfolio optimization / E.N. Sereda, E.M. Bronshtein, S.T. Rachev, F.J. Fabozzi, W. Sun, S.V. Stoyanov // Handbook of Portfolio Construction. Contemporary Applications of Markowitz Techniques, (J.B.Guerard, ed.). — New York: Springer, 2010. — P. 649–673.
19. W a n g S. S., Y o u n g V. R., P a n j e r H. H. Axiomatic characterization of insurance prices // Insurance: Math. and Econ. — 1997. — **21**(2). — P. 173–183.
20. W a n g S. S. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks // J. Risk and Insurance. — 2000. — **67**(1). — P. 15–36.
21. T s a n a k a s A. a n d D e s l i E. Risk measures and theories of choice // British Actuarial J. — 2003. — **9**. — P. 959–991.
22. Е р м о л ь е в Ю. М., К н о п о в П. С. Метод эмпирических средних в задачах стохастического программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 3–18.
23. К и р и л ю к В. С. О когерентных мерах риска и задачах оптимизации портфеля // Теорія оптимальних рішень. — К: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2003. — Вип. 2 . — С. 111–119.
24. A r t z n e r P., D e l b a e n F., E b e r J. M., H e a t h D. Coherent measures of risk // Math. Finance. — 1999. — **9**. — P. 203–228.
25. R o c k a f e l l a r R. T., U r y a s e v S. Optimization of conditional value-at-risk // J. Risk. — 2000. — **2**. — P. 21–41.
26. К и р и л ю к В. С., Б а б а н и н А. С. Полиэдральные меры риска и робастные решения // Теорія оптимальних рішень. — К: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2008. — Вип. 7. — С. 66–72.
27. К и р и л ю к В. С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 120–133.

Поступила 21.05.2013