

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ¹

Аннотация. Предложены конструктивные алгоритмы эллипсоидального оценивания вектора состояния семейств линейных и достаточно широкого класса нелинейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами. Алгоритмы основаны на использовании аппарата опорных функций и аппроксимации в общем случае невыпуклых множеств эллипсоидами.

Ключевые слова: динамическая система, нелинейность, неопределенность, помехи измерений, вектор состояния, робастные методы эллипсоидального оценивания.

ВВЕДЕНИЕ

Определение оценки вектора состояния нелинейных динамических объектов при измерении его при наличии помех — необходимый этап реализации того или иного алгоритма управления ими. В силу ряда причин для оценки вектора состояния линейных динамических систем при измерениях с ограниченными помехами в настоящее время благодаря работам А.Б. Куржанского [1, 2], F.G. Schwerpe [3], Ф.Л. Черноусько [4, 5] и других авторов наибольшее распространение получили эллипсоидальные оценки. При этом используются различные критерии выбора аппроксимирующих эллипсоидов, такие как минимум объема эллипсоида, след его матрицы и т.д.

Сложнее обстоит дело с определением оценок вектора состояния нелинейных динамических систем при измерении его в условиях наличия ограниченных помех. В настоящее время в немногих работах рассматривается решение этой проблемы для некоторых специальных классов нелинейных функций, в частности квадратичных (см., например, [6]).

Настоящая работа представляет существенное обобщение и дальнейшее развитие общей схемы определения эллипсоидальных оценок вектора состояния нелинейных дискретных систем, изложенной в [7], и предлагается метод определения эллипсоидальных и интервальных оценок минимального объема для семейств линейных и достаточно широкого класса семейств нелинейных дискретных систем.

1. ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Задано уравнение семейства дискретных управляемых систем

$$X_{n+1} = AX_n + BU_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $X_n \in \mathbf{R}^m$, $X_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})^T$ — вектор фазового состояния; $U_n \in \mathbf{R}^k$ — вектор управления; A — $m \times m$ -матрица, для векторов-строк A_i^T которой заданы их оценки \mathbf{A}_i

$$A_i^T \in \mathbf{A}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{A}_i — заданное выпуклое множество; B — заданная $m \times k$ -матрица.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Целевой Комплексной программы НАН Украины по научным космическим исследованиям на 2012–2016 гг.

Из (2) следует оценка матрицы A

$$A \in \mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_m. \quad (3)$$

Примем, что для вектора X_n задана его эллипсоидальная оценка

$$X_n \in \mathbf{E}_n = E[\hat{X}_n, H_n] = \{X \in \mathbf{R}^m : \theta(X, \hat{X}_n, H_n) \leq 1\}, \quad (4)$$

где $\theta(X, \hat{X}_n, H_n) = (X - \hat{X}_n)^T H_n^{-1} (X - \hat{X}_n)$, \hat{X}_n — центр эллипсоида и H_n — положительно-определенная симметрическая $m \times m$ -матрица $H_n^T = H_n > 0$.

Задано уравнение измерения

$$y_n = h^T X_n + z_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где y_n — скалярный измеряемый выход системы, h — известный вектор $\|h\| \neq 0$, z_n — помеха измерения, для которой задана оценка

$$z_n \in \mathbf{z} = \{z : |z| \leq \Delta\}. \quad (6)$$

Здесь Δ — априорно заданный уровень интенсивности помех измерений.

Ставится задача: по гарантированной оценке

$$X_{n+1} \in \mathbf{S}_{n+1} = \{X \in \mathbf{R}^m : |h^T X - y_{n+1}| \leq \Delta\} \quad (7)$$

множества вектора состояний, совместимых с результатом измерений y_{n+1} , и множеству $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ прогнозных оценок

$$X_{n+1} \in \bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ A \in \mathbf{A}}} (AX_n + BU_n) \quad (8)$$

определить гарантированную апостериорную оценку

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}. \quad (9)$$

Определение множества \mathbf{X}_{n+1} сопряжено, прежде всего, с труднопреодолимыми сложностями вычислительного характера, порождаемыми проблемами построения множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ по соотношению (8). Если оценка $X_n \in \mathbf{X}_n$, где \mathbf{X}_n — эллипсоидальное множество \mathbf{E}_n вида (4), наиболее часто используемое в такого рода исследованиях, то при этом множество $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$, вообще говоря, невыпуклое множество достаточно сложной структуры. Его определение может потребовать больших вычислительных затрат (см., например, [8–10]), реализация которых в режиме «on line» во многих случаях затруднительна. Но даже если множество $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ определено, то трудности вычислительного характера, связанные с реализацией операции пересечения множеств $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ и гиперполосы (слоя) $\mathbf{S}_{n+1} \subseteq \mathbf{R}^m$, остаются. Одним из возможных способов их преодоления является аппроксимация множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ эллипсоидом, но эта задача не менее сложная, чем определение самого множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Точное определение множества \mathbf{X}_{n+1} представляет собой трудную задачу и связано с большим объемом вычислений. Но даже если эта задача решена, то так как в общем случае множество \mathbf{X}_{n+1} , вообще говоря, невыпуклое, то оно «неудобно» для дальнейшего использования. Поэтому, отказавшись от точного определения множества \mathbf{X}_{n+1} , поставим задачу определения его оценки сверху в классе эллипсоидальных множеств, в каком-либо смысле оптимальных. Для этого введем в рассмотрение интервальные множества [11], называемые также параллелотопами [12, 13],

$$\bar{\mathbf{X}}_{i,n+1} = \{x_i : x_{i,n+1} \leq x_i \leq \bar{x}_{i,n+1}\}; \quad i = \bar{1}, m, \quad (10)$$

где

$$\underline{x}_{i,n+1} = \underline{v}_{i,n+1} + B_i^T U_n, \quad i = \overline{1, m}; \quad \bar{x}_{i,n+1} = \bar{v}_{i,n+1} + B_i^T U_n, \quad i = \overline{1, m}; \quad (11)$$

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ A_i^T \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^T X_n\}, \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ A_i^T \in \mathbf{A}_i}} \{A_i^T X_n\}, \quad i = \overline{1, m}; \quad (12)$$

B_i^T — i -я строка матрицы B .

Отметим, что множества $\bar{x}_{i,n+1}, i = \overline{1, m}$, — проекции множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ на соответствующие координатные оси Ox_j .

Утверждение 1. Множество

$$\bar{\mathbf{X}}'_{n+1} = \bar{x}_{1,n+1} \times \dots \times \bar{x}_{m,n+1}, \quad (13)$$

определяемое соотношениями (10)–(13), есть интервальная оценка сверху минимального объема множества прогнозных оценок $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} \subseteq \bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$.

Справедливость утверждения 1 непосредственно следует из способа его построения.

Получим конструктивное решение задачи построения интервального множества $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$. Так как функции $\varphi_i = A_i^T X_n$ билинейные, а ограничения $\mathbf{A}_i, i = \overline{1, m}$, выпуклые, то оптимизационные задачи (12) определения величин $\underline{v}_{i,n+1}$ и $\bar{v}_{i,n+1}$ являются комбинаторными задачами определения (перебором по $i = \overline{1, m}$) экстремумов линейных функций при выпуклых квадратичных ограничениях (4).

Пусть для каждого из компонентов векторов-строк $A_i^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$, $i = \overline{1, m}$, матрицы A заданы интервальные ограничения $\underline{a}_{is} \leq a_{is} \leq \bar{a}_{is}, s = \overline{1, m}$, на их возможные реализации. Тогда $A_i \in \mathbf{A}_i, i = \overline{1, m}$, где множества \mathbf{A}_i — интервальные множества, «ориентированные» по координатным осям и имеющие число вершин $N = 2^m$, векторы координат которых A_{is} определяются соответствующими ограничениями \underline{a}_{is} и \bar{a}_{is} . При этом множества \mathbf{A}_i и соотношения (12) могут быть представлены в виде

$$\mathbf{A}_i = \text{conv}_{s=1, 2^m} \{A_{is}\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (14)$$

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ s=1, 2^m}} \{A_{is}^T X_n\}, \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ s=1, 2^m}} \{A_{is}^T X_n\}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Эти задачи при фиксированном векторе A_{is} и множестве-эллипсоиде \mathbf{E}_n в соотношении (4) аналогичны задачам определения опорных функций выпуклых множеств [14] и имеют аналитические решения [4, 15]:

$$\begin{aligned} \underline{v}_{i,s}(n+1) &= A_{is}^T \hat{X}_n - \sqrt{A_{is}^T H_n A_{is}}, \quad i = \overline{1, m}, \\ \bar{v}_{i,s}(n+1) &= A_{is}^T \hat{X}_n + \sqrt{A_{is}^T H_n A_{is}}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как размерность m в (16) невелика, методом полного перебора всех вариантов находим величины

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{s=1, 2^m} \underline{v}_{i,s}(n+1), \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{s=1, 2^m} \bar{v}_{i,s}(n+1), \quad i = \overline{1, m}, \quad (17)$$

и с учетом формул (10)–(13) — искомые границы $\underline{x}_{i,n+1}$ и $\bar{x}_{i,n+1}$ интервалов $\bar{x}_{i,n+1}$. В итоге получаем интервальную оценку сверху $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$ прогнозного множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1} \subseteq \bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$.

При использовании вместо прогнозного множества $\overline{\mathbf{X}}_{n+1}$ его оценки сверху — интервального множества $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1} = \{X_{n+1} : x_{i,n+1} \in \overline{x}_{i,n+1}, i = \overline{1, m}\}$ — операция пересечения множеств (9) заменяется операцией пересечения множеств $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ и \mathbf{S}_{n+1} , в результате выполнения которой по априорной оценке $X_n \in \mathbf{X}_n = \mathbf{E}_n$ получаем апостериорную оценку вектора состояния

$$X_{n+1} \in \overline{\mathbf{X}}'_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}. \quad (18)$$

Реализация операции пересечения (18) «хороших» множеств — интервального множества-параллелопада $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ и гиперполосы \mathbf{S}_{n+1} — весьма трудоемка и, что также существенно, в результате ее выполнения получаем отличное от интервального «усеченное» множество с варьируемым числом его вершин N , где $m+1 \leq N \leq 2^m$, «неудобное» для дальнейшего его использования.

Громоздкость выполнения операции пересечения интервального множества $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ с гиперполосой \mathbf{S}_{n+1} и последующей аппроксимации полученного «неудобного» множества интервальным множеством делает целесообразным использование эллипсоидальной аппроксимации сверху интервального множества $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$. Это позволяет существенно упростить получение окончательной апостериорной оценки вектора состояния динамической системы в классе эллипсоидальных множеств. Так как задача определения эллипсоида, описанного вокруг интервального множества $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$, имеет не единственное решение, то ставится задача: найти эллипсоид минимального объема вида (4), аппроксимирующий интервальное множество $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$, заданное соотношениями (10)–(17), при эллипсоидальной оценке вектора $X_n \in \mathbf{E}_n$.

2. ОПТИМАЛЬНЫЙ ЭЛЛИПСОИД, ОПИСАННЫЙ ВОКРУГ ИНТЕРВАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Для интервального множества $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ введем такие его характеристики:

$$\tilde{x}_{i,n+1} = 0.5(\overline{x}_{i,n+1} + x_{i,n+1}) \text{ и } \mu_{i,n+1} = 0.5(\overline{x}_{i,n+1} - x_{i,n+1}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (19)$$

Формулы (19) определяют центр параллелопада $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$ и половины длин его ребер. Будем искать аппроксимирующий эллипсоид $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}$ в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}_{n+1} = E[\tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_{n+1}] = \{X \in \mathbf{R}^m : \theta(X, \tilde{X}_n, \tilde{H}_n) \leq 1\}, \quad (20)$$

где $\theta(X, \tilde{X}_n, H_n) = (X - \tilde{X}_{n+1})^T \tilde{H}_{n+1}^{-1} (X - \tilde{X}_{n+1})$, $\tilde{X}_{n+1}^T = (\tilde{x}_{1,n+1}, \tilde{x}_{2,n+1}, \dots, \tilde{x}_{m,n+1})$ — центр эллипсоида и матрица $\tilde{H}_{n+1} = \text{diag}\{\tilde{h}_{11,n+1}, \tilde{h}_{22,n+1}, \dots, \tilde{h}_{mm,n+1}\}$, $\tilde{h}_{ii,n+1} > 0 \forall i = \overline{1, m}$.

Наложим требование, чтобы поверхность эллипсоида проходила через все вершины параллелопада $\overline{\mathbf{X}}'_{n+1}$. В силу симметрии это требование будет выполняться, если поверхность будет проходить, например, через вершину с координатами $X_{M,n+1}^T = (\overline{x}_{1,n+1}, \dots, \overline{x}_{m,n+1})$. Это условие определяется соотношением

$$(X_M - \tilde{X})^T \tilde{H}^{-1} (X_M - \tilde{X}) = 1. \quad (21)$$

Для упрощения записей текущий индекс n здесь и всюду далее, где это не может привести к их неоднозначному пониманию, опущен. Подставив в (21) определенные выше значения \tilde{X} , \tilde{H} и X_M , получим уравнение

$$\frac{\mu_1^2}{\tilde{h}_{11}} + \frac{\mu_2^2}{\tilde{h}_{22}} + \dots + \frac{\mu_m^2}{\tilde{h}_{mm}} = 1. \quad (22)$$

Как известно [4], многомерный объем эллипсоида вида (20) пропорционален квадратному корню из $\det \tilde{H}$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим от размерности пространства. Поэтому будем искать аппроксимирующий эллипсоид из оптимизационной задачи: $\min \det \tilde{H} = \min \tilde{h}_{11} \tilde{h}_{22} \cdots \tilde{h}_{mm}$ при ограничении (22). Соответствующая функция Лагранжа [16] имеет вид

$$L = \tilde{h}_{11} \tilde{h}_{22} \cdots \tilde{h}_{mm} + \lambda \left(\frac{\mu_1^2}{\tilde{h}_{11}} + \frac{\mu_2^2}{\tilde{h}_{22}} + \dots + \frac{\mu_m^2}{\tilde{h}_{mm}} - 1 \right),$$

где λ — неопределенный множитель. Дифференцируя функцию Лагранжа по \tilde{h}_{ii} , $i = \overline{1, m}$, приравнявая соответствующие производные нулю и опуская промежуточные выкладки, находим

$$\tilde{h}_{22} = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} \tilde{h}_{11}, \quad \tilde{h}_{33} = \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} \tilde{h}_{11}, \dots, \quad \tilde{h}_{mm} = \frac{\mu_m^2}{\mu_1^2} \tilde{h}_{11}. \quad (23)$$

Подставив выражения для \tilde{h}_{ii} , $i = \overline{2, m}$, из (23) в уравнение ограничений (22), находим $\tilde{h}_{11} = m\mu_1^2$. В результате подстановки $\tilde{h}_{11} = m\mu_1^2$ в (23) для элементов матрицы \tilde{H}_{n+1} оптимального аппроксимирующего эллипсоида получаем

$$\tilde{h}_{11} = m\mu_1^2, \quad \tilde{h}_{22} = m\mu_2^2, \quad \dots, \quad \tilde{h}_{mm} = m\mu_m^2. \quad (24)$$

Формулы (19), (20) и (24), определяющие центр $\tilde{X}_{n+1}^T = (\tilde{x}_{1i, n+1}, \tilde{x}_{2, n+1}, \dots, \tilde{x}_{m, n+1})$ и матрицу $\tilde{H}_{n+1} = m \text{diag}\{\mu_{1, n+1}^2, \mu_{2, n+1}^2, \dots, \mu_{m, n+1}^2\}$, решают поставленную задачу построения оптимального эллипсоида \tilde{E}_{n+1} вида (20), аппроксимирующего (содержащего) интервальное множество \tilde{X}'_{n+1} . С учетом введенных выше обозначений сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. Центр \tilde{X}_{n+1} и матрица \tilde{H}_{n+1} эллипсоида минимального объема $\tilde{E}_{n+1} = E[\tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_{n+1}]$ (20), аппроксимирующего интервальное множество \tilde{X}'_{n+1} (12) оценки сверху множества прогнозных значений $\bar{X}_{n+1} \subseteq \tilde{X}'_{n+1}$ векторов состояния A -параметрического семейства систем (1) $A \in \mathbf{A}$, для $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \dots \times \mathbf{A}_m$ (3) при $X_n \in \mathbf{E}_n$, где $\mathbf{E}_n = E[\hat{X}_n, H_n]$ — эллипсоид (4), имеют вид

$$\tilde{X}_{n+1} = 0,5 \{(\bar{x}_{1, n+1} + \underline{x}_{i, n+1}), (\bar{x}_{2, n+1} + \underline{x}_{2, n+1}), \dots, (\bar{x}_{m, n+1} + \underline{x}_{m, n+1})\}, \quad (25)$$

$$\tilde{H}_{n+1} = \frac{m}{4} \text{diag}\{(\bar{x}_{1, n+1} - \underline{x}_{i, n+1})^2, (\bar{x}_{2, n+1} - \underline{x}_{2, n+1})^2, \dots, (\bar{x}_{m, n+1} - \underline{x}_{m, n+1})^2\}. \quad (26)$$

Утверждение 2 решает задачу построения эллипсоида минимального объема \tilde{E}_{n+1} , аппроксимирующего интервальное множество \tilde{X}'_{n+1} оценки прогнозных состояний семейства систем (1) в $(n+1)$ -й момент времени для $X_n \in \mathbf{E}_n$. Иными словами, дает эллипсоидальную оценку сверху \tilde{E}_{n+1} отображений семейством систем (1) эллипсоида \mathbf{E}_n . Заметим, что последовательное выполнение указанных отображений без выполнения операций их пересечения с множествами \mathbf{S}_{n+1} из (7) определит построение дискретных аналогов множеств достижимости или интегральных воронок [17].

Пересечения эллипсоидов \tilde{E}_{n+1} с множествами \mathbf{S}_{n+1} , совместимыми с результатами измерений, могут иметь вид эллипсоидального сегмента или слоя [4].

Алгоритмам построения эллипсоидов, содержащих эти пересечения $\mathbf{E}_{n+1} \supset \tilde{\mathbf{E}}_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}$ и оптимальных по критериям объема, следа матрицы и другим критериям, посвящено значительное количество работ (см., например [4, 15, 18, 19] и библиографию в них). Очевидно, что для векторов состояния систем (1) при выполнении априорного предположения $X_n \in \mathbf{E}_n = E[\hat{X}_n, H_n]$ гарантированно выполняются включения-оценки $X_{n+1} \in \mathbf{E}_{n+1} = E[\hat{X}_{n+1}, H_{n+1}]$. Не вдаваясь в подробности, заметим, что общая структура указанных алгоритмов имеет вид

$$\hat{X}_{n+1} = \psi(\tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_{n+1}, y_{n+1}, \Delta, p, q), \quad (27)$$

$$H_{n+1} = \Psi(\tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_n, y_{n+1}, \Delta, p, q), \quad (28)$$

где y_{n+1} — результат измерений (5) в момент дискретного времени $n+1$, Δ , p и q — априорно заданные ограничения на интенсивность помех измерения (6), векторы параметров алгоритмов оценивания (27), (28) и математической модели объекта управления (1). Начальные значения \hat{X}_0 и H_0 предполагаются априорно заданными и такими, что неизвестный вектор состояния $X_0 \in \mathbf{E}_0 = E[\hat{X}_0, H_0]$. Центры \tilde{X}_{n+1} и \tilde{H}_{n+1} матрицы эллипсоидов вычисляются по приведенной выше схеме с использованием формул (25), (26). Функции $\psi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ определяется конкретно выбранным алгоритмом оценивания из [4, 15, 18].

Однако практика применения этих алгоритмов для оценивания векторов состояния и идентификация выявила ряд их недостатков, в частности, оказались чувствительными к вычислительным погрешностям. Если пересечение $\mathbf{D}_{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}$ эллипсоида прогнозных оценок с множеством состояний, совместимых с результатом измерений, окажется «малым», то в результате вычислительных погрешностей матрица H_{n+1} , вычисленная по формуле (28) соответствующего алгоритма из [4, 15, 18], может не быть положительно-определенной. Очевидно, что для оцениваемого вектора состояния X_{n+1} должно иметь место включение $X_{n+1} \in \mathbf{D}_{n+1}$. В силу вычислительных погрешностей может оказаться, что \mathbf{D}_{n+1} будет пустым множеством $\mathbf{D}_{n+1} = \emptyset$. К появлению пустого пересечения может привести и сбой в измерениях, в результате которого в некоторый момент времени « n » нарушится априорное предположение (6) о свойствах помех — окажется, что $|z_n| > \Delta$. Появление малого или пустого пересечения $\mathbf{D}_{n+1} = \emptyset$ может быть вызвано и нарушением априорного предположения о том, что неизвестный вектор состояния $X_0 \in E[\hat{X}_0, H_0]$, где $E[\hat{X}_0, H_0]$ — задаваемый для работы алгоритмов (27), (28) начальный эллипсоид.

Для устранения перечисленных недостатков в серии работ [19–22] предложены робастные методы эллипсоидального оценивания вектора состояния или параметров дискретных и непрерывных динамических систем, обладающие свойством нечувствительности (робастности) к вычислительным погрешностям и нарушению перечисленных априорных предположений. Эти свойства соответствуют понятию грубости динамических систем, введенному академиками А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным в [23]. Модификация некоторых из вышеназванных указанных робастных методов эллипсоидального оценивания предложена в работе [24].

Общая схема получения перечисленных робастных методов эллипсоидального оценивания достаточно простая и в явном или неявном виде заключается в следующем. В используемых здесь обозначениях при каждом $n = 0, 1, \dots$ вычисляется «в метрике эллипсоида» $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1} = E[\tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_{n+1}]$ расстояние ρ_{n+1} от его центра \tilde{X}_{n+1} до множества \mathbf{S}_{n+1} . Это расстояние определяется из простой

оптимизационной задачи

$$\rho_{n+1} = \min_{X \in \mathbf{S}_{n+1}} \theta(X, \tilde{X}_{n+1}, \tilde{H}_{n+1}), \quad (29)$$

решение которой получено в [20] и имеет вид

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } |\tilde{y}_{n+1}| - \Delta \leq 0, \\ \varepsilon_{n+1}^{-2} (|\tilde{y}_{n+1}| - \Delta)^2 & \text{при } |\tilde{y}_{n+1}| - \Delta < 0, \end{cases} \quad (30)$$

где $\varepsilon_{n+1}^2 = h^T \tilde{H}_{n+1} h$, $\tilde{y}_{n+1} = y_{n+1} - h^T \tilde{X}_{n+1}$. Из рис. 1 и формулы (20) непосредственно следует, что пересечение $\mathbf{D}_{n+1} \neq \emptyset$ (на рисунке это заштрихованная область) при $0 \leq \rho_{n+1} \leq 1$ и $\mathbf{D}_{n+1} = \emptyset$ при $\rho_{n+1} > 1$. При «малом» пересечении, т.е. при $\rho_{n+1} \approx 1$, $\rho_{n+1} < 1$, вследствие компьютерных вычислительных погрешностей может оказаться, что матрица H_{n+1} , вычисленная по соответствующим вышеуказанным алгоритмам, не будет положительно-определенной. Поэтому, если вычисленное по формулам (30) значение $\rho_{n+1} > \delta$, где δ —

параметр алгоритмов вида (27), (28), в последних вместо матрицы \tilde{H}_{n+1} используется матрица $\gamma_{n+1} \tilde{H}_{n+1}$. Величина γ_{n+1} является функцией расстояния ρ_{n+1} , $\gamma_{n+1} = \gamma(\rho_{n+1}) > 1$. При этом происходит «расширение» исходного эллипсоида $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}$. Расширенный эллипсоид изображен на рис. 1 тонкой линией. Выбором параметра алгоритма δ и функции $\gamma_{n+1} = \gamma(\rho_{n+1})$ устраняется критическое влияние вычислительных погрешностей и появление пустого пересечения $\mathbf{D}_{n+1} = \emptyset$.

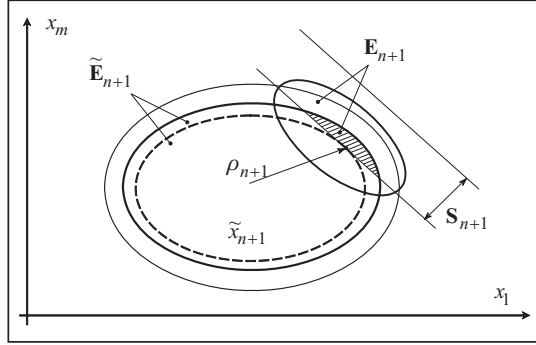


Рис. 1. Геометрическая иллюстрация робастного алгоритма эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}$ с гиперполосой \mathbf{S}_{n+1}

параметр алгоритмов вида (27), (28), в последних вместо матрицы \tilde{H}_{n+1} используется матрица $\gamma_{n+1} \tilde{H}_{n+1}$. Величина γ_{n+1} является функцией расстояния ρ_{n+1} , $\gamma_{n+1} = \gamma(\rho_{n+1}) > 1$. При этом происходит «расширение» исходного эллипсоида $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}$. Расширенный эллипсоид изображен на рис. 1 тонкой линией. Выбором параметра алгоритма δ и функции $\gamma_{n+1} = \gamma(\rho_{n+1})$ устраняется критическое влияние вычислительных погрешностей и появление пустого пересечения $\mathbf{D}_{n+1} = \emptyset$.

3. ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СЕМЕЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть задано уравнение семейства управляемых нелинейных систем

$$X_{n+1} = F(X_n, L) + BU_n, \quad (31)$$

где $F(X_n, L) = (f_1(X_n, L), f_2(X_n, L), \dots, f_m(X_n, L))^T$ — нелинейная вектор-функция X_n , линейно зависящая от вектора параметров L , такая, что при $X_n = 0$ имеем $F(0, L) = 0$, обозначения B и U_n соответствуют принятым в уравнении (1). Функции $f_i(X_n, L)$, $i = 1, m$, предполагаются выпуклыми.

Примем, что для вектора X_n задана его эллипсоидальная оценка (4), а уравнение измерений, так же, как и выше, имеет вид (5). Требуется решить задачу: по оценкам (6), (7) и прогнозной оценке

$$X_{n+1} \in \bar{\mathbf{X}}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ L \in \mathbf{L}}} F(X_n, L) + BU_n, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{L}^T = (l_1, \dots, l_s), \quad \mathbf{L} = \mathbf{I}_1 \times \mathbf{I}_2 \times \dots \times \mathbf{I}_s, \quad \mathbf{I}_i = \{l_i : l_i \leq l_i \leq \bar{l}_i\}, \quad s \leq m, \quad i = \overline{1, s}, \quad (33)$$

определить гарантированную апостериорную оценку

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}. \quad (34)$$

Точное определение множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$, получаемого операцией пересечения (32), для широкого класса вектор-функций $F(\cdot)$ — трудноразрешимая задача. Поэтому аппроксимируем множество $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ интервальным множеством минимального объема, воспользовавшись методом, схема которого описана выше,

$$\bar{\mathbf{X}}'_{n+1} = \bar{\mathbf{x}}_{1,n+1} \times \dots \times \bar{\mathbf{x}}_{m,n+1}, \quad (35)$$

где

$$\bar{\mathbf{x}}_{i,n+1} = \{x_i : \underline{x}_{i,n+1} \leq x_i \leq \bar{x}_{i,n+1}\}, \quad (36)$$

$$\underline{x}_{i,n+1} = \underline{v}_{i,n+1} + B_i^T U_n, \quad \bar{x}_{i,n+1} = \bar{v}_{i,n+1} + B_i^T U_n, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ L \in \mathbf{L}}} f_i(X_n, L), \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ L \in \mathbf{L}}} f_i(X_n, L), \quad i = \overline{1, m}. \quad (37)$$

В отличие от рассмотренной процедуры определения интервальной оценки множества, определяемого соотношением (10)–(13), для определения величин $\underline{x}_{i,n+1}$ и $\bar{x}_{i,n+1}$ необходимо решать задачи определения экстремумов нелинейных функций.

Лишь в некоторых частных случаях, например для квадратичных функций, задачи (37) имеют аналитические решения, но в общем случае решения этих задач могут быть определены лишь с помощью существующих стандартных пакетов оптимизации.

При использовании интервальной аппроксимации $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$ множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ операция пересечения множеств (34) заменяется операцией

$$X_{n+1} \in \overset{\circ}{\mathbf{X}}_{n+1} = \bar{\mathbf{X}}'_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}, \quad (38)$$

в результате выполнения которой получаем апостериорную оценку $\overset{\circ}{\mathbf{X}}_{n+1}$.

Как отмечалось ранее, реализация операции пересечения множеств (38) весьма трудоемка и, что также существенно, в результате ее выполнения получаем «усеченное» интервальное множество с варьируемым числом его вершин, «неудобное» для дальнейшего его использования. Громоздкость выполнения операции пересечения интервального множества $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$ с гиперполосой \mathbf{S}_{n+1} и необходимость последующей аппроксимации полученного множества интервальным множеством оправдывает использование эллипсоидальной аппроксимации интервального множества $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$, позволяющей существенно упростить получение окончательной апостериорной эллипсоидальной оценки вектора состояния нелинейной динамической системы. Процедура определения эллипсоида $\tilde{\mathbf{E}}_{n+1}$ минимального объема, описанного вокруг интервального множества, подробно приведена выше. Тогда для получения апостериорной оценки вектора состояния X_{n+1} вместо операции пересечения множеств (38) следует выполнить операцию

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}_{n+1} \cap \mathbf{S}_{n+1}, \quad (39)$$

алгоритмы реализации которой, как отмечалось выше, изложены в [19–22].

В приложениях во многих случаях вид нелинейных функций $f_i(X_n, L)$ неизвестен, для них известны лишь те или иные их априорные оценки. В связи с этим рассмотрим оценки нелинейных («секториальных») функций, которые, начиная с работы А.И. Лурье и В.Н. Постникова [25], широко использовались при анализе нелинейных непрерывных, а впоследствии и дискретных систем управления. Итак, рассмотрим функции скалярного аргумента $f_i(\sigma_{i,n})$, которые удовлетворяют ограничениям

$$\underline{k}_i \sigma_{i,n}^2 \leq \sigma_{i,n} f_i(\sigma_{i,n}) \leq \bar{k}_i \sigma_{i,n}^2; \quad i = \overline{1, m}, \quad (40)$$

где $\sigma_{i,n} = C_i^T X_n$, C_i — заданный вектор.

Построение интервального множества \bar{X}'_{n+1} в этом случае выполним по изложенной выше схеме (см. формулы (35)–(37)). Для этого перепишем неравенства (40) в эквивалентной форме

$$\underline{k}_i \sigma_i \leq f_i(\sigma_i) \leq \bar{k}_i \sigma_i, \text{ если } \sigma_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \quad (41)$$

$$\bar{k}_i \sigma_i \leq f_i(\sigma_i) \leq \underline{k}_i \sigma_i, \text{ если } \sigma_i \leq 0, i = \overline{1, m}. \quad (42)$$

При этом границы интервалов $\bar{x}_{i,n+1}$ определяются формулами (36) при

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ l \in \mathbf{L}}} l \sigma_{i,n}, \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ l \in \mathbf{L}}} l \sigma_{i,n}, \quad (43)$$

$$\sigma_{i,n} = C_i^T X_n, \quad L = \{\underline{k}_i, \bar{k}_i\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Согласно формулам (4) и (16) для минимума $\underline{\sigma}_{i,n}$ и максимума $\bar{\sigma}_{i,n}$ функции $\sigma_{i,n} = C_i^T X_n$ при $X_n \in \mathbf{E}_n$ получаем

$$\underline{\sigma}_{i,n} = C_i^T \hat{X}_n - \sqrt{C_i^T H_n C_i}, \quad \bar{\sigma}_{i,n} = C_i^T \hat{X}_n + \sqrt{C_i^T H_n C_i}. \quad (44)$$

Из формулы (43) и геометрических соображений, очевидно, что в зависимости от координат \hat{X}_n и матрицы H_n эллипсоида \mathbf{E}_n и вектора C_i знаки величин $\underline{\sigma}_{i,n}$ и $\bar{\sigma}_{i,n}$ могут быть как одинаковые (положительные и отрицательные), так и различные. При этом согласно (43) и (44) имеем

$$\underline{v}_{i,n+1} = \min_{\substack{\theta \in \Sigma_{i,n} \\ l \in \mathbf{L}}} l \theta, \quad \bar{v}_{i,n+1} = \max_{\substack{\theta \in \Sigma_{i,n} \\ l \in \mathbf{L}}} l \theta, \quad (45)$$

$$\Sigma_{i,n} = \{\underline{\sigma}_{i,n}, \bar{\sigma}_{i,n}\}, \quad L = \{\underline{k}_i, \bar{k}_i\}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Границы интервалов $\bar{x}_{i,n+1}$ получаем согласно формуле (36) при подстановке в нее $\underline{v}_{i,n+1}$ и $\bar{v}_{i,n+1}$ из (45).

4. ОЦЕНКИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА СЕМЕЙСТВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим широко исследуемый, особенно в приложениях, класс нелинейных систем, состоящий из линейной и нелинейной частей

$$X_{n+1} = AX_n + F(X_n, L) + BU_n, \quad (46)$$

где в общем случае для матрицы A задана ее оценка (3), B — заданная $m \times k$ -матрица, а вектор-функция $F(X_n, L)$, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, линейно зависит от вектора параметров L , для которого задана его оценка $L \in \mathbf{L}$, где \mathbf{L} — выпуклое множество.

Для семейства систем (1), (3), (46) и оценок (4), (2) при уравнениях измерений (5)–(7) требуется определить апостериорную оценку вектора X_{n+1} . Эту задачу можно решать двумя различными способами. Первый из них состоит в том, чтобы для вектор-функции $AX_n + F(X_n, L)$ определять прогнозную оценку вектора состояния X_n — множество \bar{X}_{n+1} , точнее говоря, аппроксимирующее его множество, так, как это было выполнено для системы (31). Второй способ решения задачи основан на представлении множества

$$\bar{X}_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ L \in \mathbf{L}}} [AX_n + F(X_n, L)] + BU_n$$

в виде суммы множеств по Минковскому [26]

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}'_{n+1} + \bar{X}''_{n+1},$$

где

$$\bar{\mathbf{X}}'_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ A \in \mathbf{A}}} AX_n + BU_n, \quad \bar{\mathbf{X}}''_{n+1} = \bigcup_{\substack{X_n \in \mathbf{E}_n \\ L \in \mathbf{L}}} F(X_n, L).$$

Рассмотрим сначала тот важный частный случай, когда матрица A является однозначно заданной и без потери общности постоянной. При этом множество $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1} = \mathbf{E}'_{n+1}$ — эллипсоид вида (4)

$$\mathbf{E}'_{n+1} = \{X \in \mathbf{R}^m : \theta(X, \hat{X}'_{n+1}, H'_{n+1}) \leq 1\},$$

где $H'_{n+1} = AH_n A^T$, $\hat{X}'_{n+1} = A\hat{X}_n + BU_n$ [4, 22].

В силу изложенных выше причин множество $\bar{\mathbf{X}}''_{n+1}$ сначала аппроксимируем описанным выше способом — интервальным множеством вида (35), которое затем аппроксимируем эллипсоидом минимального объема

$$\mathbf{E}''_{n+1} = \{X \in \mathbf{R}^m : \theta(X, \hat{X}''_{n+1}, H''_{n+1}) \leq 1\},$$

центр \hat{X}''_{n+1} и матрица H''_{n+1} которого определяются формулами (25), (26) по предварительно вычисленным значениям $\bar{x}_{i,n+1}$ и $\underline{x}_{i,n+1}$, $i = \overline{1, m}$. Тогда прогнозную оценку вектора X_{n+1} получим в виде суммы по Минковскому двух эллипсоидальных множеств

$$X_{n+1} \in \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{E}'_{n+1} + \mathbf{E}''_{n+1},$$

которая в общем случае не является эллипсоидом. Эта сумма содержится [3, 4] в p -параметрическом семействе эллипсоидов $E[\hat{X}_{n+1}, H_{n+1}]$ вида (4), где

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= \hat{X}'_{n+1} + \hat{X}''_{n+1}, \\ H_{n+1} &= (1+p)H'_{n+1} + (1+p^{-1})H''_{n+1} \end{aligned}$$

при всех значениях параметра $p > 0$. При соответствующем выборе этого параметра получаются оптимальные эллипсоиды по критерию минимума определителя матрицы H_{n+1} (объема эллипсоида), ее следа и др. [3, 4, 18].

Так как при использовании второго способа решения задачи составная часть $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$ множества $\bar{\mathbf{X}}_{n+1}$ определена аналитически, а при первом способе решения задачи сначала она подвергается интервальной, а затем — эллипсоидальной аппроксимации, поэтому второй способ решения задачи представляется предпочтительным.

Вернемся теперь к рассмотрению того общего случая, когда для матрицы A задана лишь ее оценка (3). В этом случае, как отмечалось выше, определение множества $\bar{\mathbf{X}}'_{n+1}$ общего вида сопряжено со значительными трудностями. Поэтому его необходимо сначала аппроксимировать интервальным множеством минимального объема и далее аппроксимировать его эллипсоидом минимального объема. В этом случае преимущество второго способа определения прогнозной оценки вектора X_{n+1} теряется и поэтому для определения его прогнозной оценки следует воспользоваться общей схемой решения задачи с применением вычислительных методов оптимизации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе известной схемы, использующей прогнозную оценку и результат прямых измерений с ограниченными помехами, получены конструктивные решения задач восстановления вектора состояния семейств линейных и достаточно широкого класса нелинейных дискретных систем при его полных и неполных измерениях.

Рассмотрено использование как интервальных, так и эллипсоидальных оценок и показана целесообразность использования предлагаемой двухэтапной процедуры построения эллипсоидальных прогнозных оценок для семейств линейных и нелинейных систем, состоящей из определения на первом этапе интервальной оценки минимального объема с последующей аппроксимацией ее на втором этапе эллипсоидом минимального объема.

Громоздкость выполнения операции пересечения интервального множества с гиперполосой и необходимость последующей аппроксимации полученного множества интервальным множеством минимального объема оправдывает использование эллипсоидальной аппроксимации интервального множества, позволяющей существенно упростить получение апостериорной эллипсоидальной оценки вектора состояния семейств линейных и нелинейных динамических систем.

Впервые получены алгоритмы эллипсоидального оценивания вектора состояния динамических систем с широко распространенной в теории и приложениях интерпретацией свойств неопределенности их математической модели нелинейностями, удовлетворяющими секторным ограничениям на их возможные действительные реализации.

Использование предложенных робастных методов эллипсоидальной аппроксимации пересечения эллипсоида с полосой позволило получить достаточно удобные алгоритмы оценивания векторов состояния семейств линейных и широкого класса нелинейных дискретных динамических систем. Полученные алгоритмы сохраняют работоспособность при отличии действительных свойств неопределенности (свойств помех измерения, параметров математической модели динамической системы) от используемых в алгоритмах их априорно предполагаемых свойств, что всегда имеет место в реальных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.
2. Избранные труды А. Б. Куржанского. Выдающиеся ученые Московского университета. — М.: Изд-во МГУ, 2009 — 756 с.
3. Schweppe F. C. Recursive state estimation: unknown but bounded error and system inputs // IEEE Trans. Automat Control. — 1968. — **AC-13**, N 1. — P. 22–28.
4. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. — М.: Наука, 1988. — 320 с.
5. Кинёв А. Н., Рокитянский Д. Я., Черноусько Ф. Л. Эллипсоидальные оценки фазового состояния линейных систем с параметрическими возмущениями и неопределенной матрицей наблюдений // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 1. — С. 5–15.
6. Filippova T. F. Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // J. Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement Volume. — 2011. — P. 410–419.
7. Волосов В. В., Кунцевич В. М. Определение эллипсоидальных оценок вектора состояния нелинейных дискретных систем при измерениях с ограниченными помехами // Тр. X Междунар. Четаевской конф. — Казань, 12–16 июня 2012 г. — 2012. — **2**. — С. 177–184.
8. Тютюшкин А. И., Моржин О. В. Численное исследование множеств достижимости нелинейных управляемых дифференциальных систем // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 6. — С. 160–170.
9. Малышев В. В., Тychинский Ю. Д. Построение множеств достижимости и оптимизация маневров искусственного спутника Земли с двигателями малой тяги в сильном гравитационном поле // Изв. РАН Теория и системы управления. — 2005. — № 4. — С. 124–132.
10. Сизова А. А. Метод построения областей достижимости для нелинейных управляемых систем // Изв. вузов. Приборостроение. — 2009. — № 7. — С. 43–49.

11. Кунцевич В.М., Куржанский А.Б. Области достижимости линейных и некоторых классов нелинейных дискретных систем и управление ими // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2010. — № 1. — С. 5–21.
12. Костюсова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелограммов // Вычислительные технологии. — 1998. — 3, № 2. — С. 11–20.
13. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. — М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. — 468 с.
14. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 470 с.
15. Волосов В.В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем // Автоматика. — 1991. — № 3. — С. 24–32.
16. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1980. — 520 с.
17. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмурт. ун-та. — 2011. — Вып. 4. — С. 23–39.
18. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Эллипсоидальное оценивание по обобщенному критерию // Автоматика и телемеханика. — 1991. — № 9. — С. 133–145.
19. Волосов В.В. К построению параметрических семейств эллипсоидальных оценок и их оптимизации в задачах нестохастической идентификации параметров и состояния многомерных дискретных объектов управления // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 4. — С. 37–53.
20. Волосов В.В., Тютюнник Л.И. Разработка и исследование робастных алгоритмов гарантированного эллипсоидального оценивания состояния многомерных линейных дискретных динамических систем. Часть 1 // Там же. — 1997. — № 4. — С. 31–43.
21. Ефименко Н.В., Новиков А.К. Регуляризованные эллипсоидальные наблюдатели и их применение в задаче определения ориентации космического аппарата // Там же. — 1998. — № 6. — С. 145–154.
22. Волосов В.В., Тютюнник Л.И. Робастные алгоритмы эллипсоидального оценивания состояния непрерывных и дискретных нестационарных динамических систем с неконтролируемыми возмущениями и помехами в каналах измерения // Кибернетика и вычисл. техн. — 2002. — Вып. 135. — С. 3–8.
23. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. — 1937. — 34, № 5.
24. Сальников Н.Н. Об одной модификации алгоритмов оценивания параметров линейной регрессии с помощью эллипсоидов // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2012. — № 2. — С. 65–85.
25. Лурье А.И., Постников В.Н. К теории устойчивости регулируемых систем // Прикладная математика и механика. — 1944. — 8, № 3. — С. 246–248.
26. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004. — 416 с.

Поступила 02.09.2014