УДК 519.572

И.Н. КОВАЛЕНКО

О ДВУХЦИКЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Ласло Лакатош [1, 2] ввел в рассмотрение систему обслуживания, в которой время ожидания V требования увеличивается до величины W, кратной T. Эта постановка задачи взята из авиации: величина T интерпретируется как время обхода самолетом круга, на который он отправляется в случае занятости взлетно-посадочной полосы. В настоящей статье изучается схема обслуживания, в которой V увеличивается до величины $T_1 x + T_2 y$, где T_1 и T_2 — заданные числа (времена обхода двух кругов), x и y — зависимые от V целые числа (количества их обходов). Доказана эргодическая теорема для соответствующей вложенной цепи Маркова. Приведен алгоритм вычисления x и y по заданному значению V.

Ключевые слова: системы массового обслуживания, системы с повторными вызовами, системы типа Лакатоша, процесс посадки самолетов.

Венгерский математик Ласло Лакатош ввел в рассмотрение систему массового обслуживания типа FCFS, в которой время ожидания V требования увеличивается до величины, кратной постоянной величине T, и назвал ее циклической системой обслуживания [1, 2]. Постановка задачи взята из изучения процесса обслуживания потока самолетов, заходящих на посадку в аэропорту с единственной взлетно-посадочной полосой (ВПП). Если в момент приближения самолета ВПП занята, самолет направляется в зону ожидания, где совершает обход «круга» (орбиты) за постоянное время T. Таким образом, вместо номинального времени ожидания V фактическое время ожидания равно $W = T\,]V/T[$, т.е. V увеличивается на некоторую случайную величину $\gamma = W - V$, среднее значение которой составляет примерно $T/2$ при относительно малом T. Системы типа Лакатоша, обобщающие его вероятностные модели, изучены в работах [3, 4].

Естественно изучить систему обслуживания типа Лакатоша, в которой можно добиться значительно меньшего значения γ. Одним из возможных подходов является применение системы с двумя «кругами» (орбитами) с временем прохождения T_1 и T_2. В такой системе

$$W = T_1 x + T_2 y,$$

где x и y — целые числа; они равны количеству обходов первого и второго «кругов». Если T_1 и T_2 — несоизмеримые величины, т.е. $T_1 = a\Delta$, $T_2 = b\Delta$, где a и b — целые числа с наибольшим общим делителем единица, то $\gamma \le \Delta$ при достаточно большом V.

Изученная в представленной статье система типа $GI/G/1$ с дисциплиной обслуживания FCFS и двумя «кругами» в зоне ожидания названа нами «двухциклической системой обслуживания».

Приведен алгоритм статистического моделирования вложенной цепи Маркова (W_n) процесса обслуживания. Найдено условие эргодичности цепи (W_n) для несколько более общей системы, в которой $W_n = s(V_n)$, где $s(t)$ — произвольная детерминированная неубывающая функция. Использована известная теорема Tweedie об оценке среднего времени пребывания случайной последовательности в множестве состояний.

ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассматривается одноканальная система обслуживания с повторными заявками (retrial queue) с дисциплиной обслуживания в порядке очереди (FCFS) и переменным (зависимым от других величин) числом циклов нахождения требования на орбите.

Обозначим $(t_n,\ n \ge 0)$ входящий поток требований, $(Y_n, n \ge 0)$ — последовательность длительностей обслуживания требований, $(W_n, n \ge 0)$ — последовательность длительностей ожидания требованиями начала обслуживания. Обозначим также $Z_n = t_n - t_{n-1}, V_n = (W_{n-1} + Y_{n-1} - Z_n)_+$. При $n \ge 1$ выполняется следующее уравнение:

$$W_n = s(W_{n-1} + Y_{n-1} - Z_n) = s(V_n), \tag{1}$$

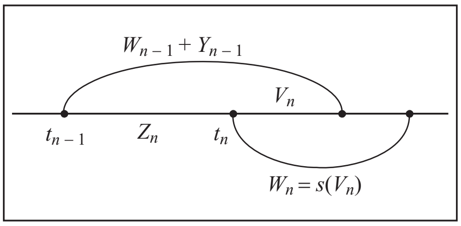

Рис. 1

где $s(t)$ — детерминированная неубывающая функция, удовлетворяющая условию $s(t) \ge t,\ t \ge 0$, и равная 0 при $t \le 0$ (рис. 1).

Формула (1) служит основанием алгоритма статистического моделирования последовательности (W_n).

Введем величину

$$\gamma(t) = s(t) - t \ge 0.$$

Тогда уравнение (1) можно переписать так:

$$W_n - W_{n-1} = Y_{n-1} - Z_n + \gamma(W_{n-1} + Y_{n-1} - Z_n).$$

Положим

$$\bar{\gamma} = \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \mathrm{E}\,\{\gamma(t + Y_0 - Z_1)\}. \tag{2}$$

Предположим, что $Y_{n-1} - Z_n, n \ge 1,$ — независимые случайные величины с общей функцией распределения $C(x) = \mathrm{P}\{Y_0 - Z_1 \le x\}, x \in \Re$, и конечным математическим ожиданием $\bar{c} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dC(x)$.

Из формулы (2) следует соотношение

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \mathrm{E}\,\{W_n - W_{n-1} | W_{n-1} = t\} \le \bar{\gamma} + \bar{c}. \tag{3}$$

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Теорема. Предположим, что существуют числа $\nu > 0, \varepsilon > 0,\ \theta > 0$, для которых выполняются неравенства

$$\mathrm{E}\{\gamma(t + \mathrm{Y}_0 - Z_1)\} + \bar{c} \le -\varepsilon,\ t \ge \nu, \tag{4}$$

$$C(\varepsilon) < 1,$$

$$C(-\theta) > 0, \tag{5}$$

$$\theta - \varepsilon \ge d \overset{\text{def}}{=} \sup(\gamma(t),\ 0 < t \le \nu). \tag{6}$$

Тогда случайная последовательность $(W_n, n \ge 0)$ является эргодической однородной цепью Маркова на множестве состояний $\Re_+$.

Замечание. Если все W_n кратны $\Delta > 0$, то условие $t \to \infty$ в формулах (2), (3) следует понимать как $t = n\Delta,\ n \to \infty$.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что $(W_n, n \geq 0)$ — однородная цепь Маркова. Существование чисел ν и ε, удовлетворяющих условию (4), вытекает из неравентсва (3), если $\bar{\gamma} + \bar{c} < 0$. Множество моментов времени $\{n \geq 0\}$ разбивается на чередующиеся отрезки Γ_k с количеством элементов τ_k, на которых $W_n \geq \nu$, и отрезки Γ'_k с количеством элементов τ'_k, на которых $W_n < \nu$.

Вначале рассмотрим отрезок $\Gamma'_k = \{n, n+1, \dots\}$. Пусть $w_n < \nu$ — фиксированное значение W_n. Пусть также $r =]\nu / \varepsilon[$. Если $Y_n - Z_{n+1} > \varepsilon, \dots, Y_{n+r-1} - Z_{n+r} > \varepsilon$, то $W_{n+r} > \nu$; следовательно, $\tau'_k \leq r$. Если данная цепочка неравенств не выполняется и $\tau'_k > r$, то рассмотрим событие $\{Y_{n+r} - Z_{n+r+1} > \varepsilon, \dots, Y_{n+2r-1} - Z_{n+2r} > \varepsilon\}$, в случае выполнения которого $\tau'_k \leq 2r$. Продолжая этот процесс, получим неравенство

$$\mathrm{P}\{\tau'_k > ir \mid w_n\} \leq (1 - (1 - C(\varepsilon))^r)^i, \ \ i \geq 0,$$

справедливое при любом $w_n < \nu$.

Просуммировав это неравенство по i, получим оценку

$$\mathrm{E}\{\tau'_k \mid w_n\} \leq r / (1 - C(\varepsilon))^r.$$

Если перескок W_n из Γ'_k в Γ_l происходит на m-м шаге, т.е. $W_{m-1} < \nu$, $W_m \geq \nu$, то $W_m \leq \nu + d + |Y_{m-1} - Z_m|$; следовательно,

$$\mathrm{E}\{W_m \mid W_{m-1} = w_{m-1} < \nu\} \leq \nu + d + \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dC(x).$$

Рассмотрим стоящие подряд отрезки $\Gamma'_k = \{n, n+1, \dots, n + \tau'_k - 1\}$ и $\Gamma_l = \{m, m+1, \dots\}$. Для нас важно оценить $\mathrm{E}\{W_m\}$ на основании свойств τ'_k. На основании известной теоремы Tweedie [5] (см. также [7, гл. 1])

$$\mathrm{E}\{\tau_l\} \leq \mathrm{E}\{W_m\} / \varepsilon.$$

Индекс m случаен, в зависимости от значения τ'_k. Можно записать неравенство

$$\mathrm{E}\{W_m\} \leq r \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\tau'_k > ir\} \left(\nu + d + \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dC(x) \right) \leq$$

$$\leq r \left(\nu + d + \int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dC(x) \right) / (1 - C(\varepsilon))^r.$$

Если отрезок Γ_0 начальный, т.е. $\Gamma_0 = \{0, 1, \dots\}$, то при фиксированном $W_0 = w_0$ имеем $\mathrm{E}\tau_0 \leq w_0 / \varepsilon$, на основании той же теоремы Tweedie. Из найденных неравенств следует, что $\mathrm{E}\{\tau_k\}$ и $\mathrm{E}\{\tau'_k\}$ конечны. Все они равномерно ограничены, за исключением, возможно, $\mathrm{E}\{\tau_0\}$.

Снова рассмотрим отрезок $\Gamma'_k = \{m, m+1, \dots\}$, и пусть фиксировано $W_m = w_m < \nu$. Если $Y_m - Z_{m+1} \leq -\theta \leq -(d + \varepsilon)$, то либо $0 < W_{m+1} \leq s(W_m - d - \varepsilon) \leq$ $\leq (W_m - d - \varepsilon) + d = W_m - \varepsilon$, либо $W_{m+1} = 0$. Следовательно, при r-кратном повторении неравенств $Y_n - Z_{n+1} \leq -\theta$ будет $W_{m+r} = 0$. Итак, для любого интервала $\Gamma'_k = \{m, m+1, \dots\}$, независимо от предыдущего,

$$\mathrm{P}\{W_{m+r} = 0\} \geq C^r(-\theta) > 0 \tag{7}$$

по условию (5).

Наконец, заметим, что

$$P\{W_{n+1}=0 \mid W_n=0\} \ge C(0) \ge C(-\theta) > 0. \qquad (8)$$

Из равномерной ограниченности $E\{\tau_k\}$, $E\{\tau'_k\}$ и неравенств (7), (8) следует, что случайная последовательность $(W_n, n \ge 0)$ представляет собой эргодическую возвратную последовательность, для которой событие $\{W_n=0\}$ является рекуррентным событием (см. [6, гл. XIII]).

Теорема доказана.

ЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА ЛАКАТОША

Данная система характеризуется тем, что $s(t)=\Delta\,]\,t/\Delta\,[$, $t \ge 0$, где $\Delta > 0$ — постоянное число (в обозначении Лакатоша $\Delta = T$). Это число интерпретируется как время пребывания требования на орбите между попытками попасть на обслуживание.

Предположим, что W_0 — величина, кратная Δ. Тогда и все W_n будут кратны Δ. В предположении, что случайная величина $Y_0 - Z_1$ имеет плотность вероятности $c(t)$, справедлива формула

$$\lim_{m\to\infty} E\{\gamma(m\Delta + Y_0 - Z_1)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} (k\Delta - x)\, c(x)\, dx. \qquad (9)$$

Если же $Y_0 - Z_1$ кратно Δ, то $\gamma(m\Delta + Y_0 - Z_1) = 0$ с вероятностью 1. В некоторых случаях выражение (9) может быть представлено в замкнутом виде.

Пример. Пусть Y_0, Z_1 — независимые экспоненциальные величины с параметрами μ и λ соответственно. Тогда

$$c(x) = \begin{cases} (\lambda\mu/(\lambda+\mu))e^{\lambda x} & \text{при } x<0, \\ (\lambda\mu/(\lambda+\mu))e^{-\mu x} & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Из формулы (9) получаем

$$\lim_{m\to\infty} E\{\gamma(m\Delta + Y_0 - Z_1)\} =$$

$$= \mu e^{-\lambda\Delta}(e^{\lambda\Delta} - 1 - \lambda\Delta)/(\lambda+\mu)(1-e^{-\lambda\Delta}) +$$

$$+ \lambda(e^{-\mu\Delta} - 1 + \mu\Delta)/(\mu(\lambda+\mu)(1-e^{-\mu\Delta})). \qquad (10)$$

При этом

$$\bar{c} = (\lambda - \mu)/(\lambda\mu). \qquad (11)$$

С использованием формул (10), (11) легко показать, что условие эргодичности имеет вид

$$\lim_{m\to\infty} E\{\gamma(m\Delta + Y_0 - Z_1)\} + \bar{c} < 0. \qquad (12)$$

Условие (12) с помощью элементарного преобразования приводится к условию

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda\Delta}(1-e^{-\mu\Delta})}{1-e^{-\lambda\Delta}},$$

полученному в статье Л. Лакатоша [2].

ДВУХЦИКЛИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть имеется одноканальная система обслуживания с ожиданием типа FCFS с характеристиками $C(x)$, $s(t)$, W_n, определенными выше в общем случае. Двухциклической системой обслуживания назовем систему определенного выше типа, для которой функция $s(t)$ при $t \geq 0$ определяется формулой

$$s(t) = T_1 x + T_2 y,$$

где T_1, T_2 — положительные числа; $(x, y) = \arg\min (T_1 i + T_2 j \geq t)$, $i, j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. В интерпретации с посадкой самолетов T_1 и T_2 означают длительности облета самолетом двух «кругов», x и y — количества облетов первого и второго «круга».

Пусть V_n — время от момента t_n до момента окончания обслуживания $n-1$-го требования, если это время положительно, и нуль в противном случае. Полагаем $N_n =]V_n / \Delta[= N$, где $\Delta > 0$ — заданное число. Пусть, далее, $T_1 > T_2 > 0$ — заданные числа, кратные Δ: $T_1 = a\Delta$, $T_2 = b\Delta$, где a, b — натуральные числа, причем н.о.д. $(a, b) = 1$. Любому целому N сопоставим $\delta_N = 1$, если уравнение $ax + by = N$ разрешимо в целых неотрицательных числах; в противном случае полагаем $\delta_N = 0$. Если указанное уравнение разрешимо, из множества решений выбираем (x_N, y_N), у которого x_N максимально. Так, при $a = 3$, $b = 2$, $N = 10$ имеем два решения: $(0, 5)$ и $(2, 2)$ — полагаем $(x_{10}, y_{10}) = (2, 2)$.

При статистическом моделировании или выборе (x_N, y_N) в реальном масштабе времени полезно заранее рассчитать таблицу троек (δ_N, x_N, y_N). Это можно сделать по рекуррентной формуле.

Полагаем:

$$\delta_N = 0, \; N < 0;$$

$$(\delta_0, x_0, y_0) = (1, 0, 0);$$

$$\delta_N = 0, \; 0 < N < b;$$

$$(\delta_b, x_b, y_b) = (1, 0, 1),$$

$$\delta_N = \delta_{N-a} + (1 - \delta_{N-a})\delta_{N-b}, \text{ если } N > b:$$

$$x_N = \delta_{N-a}(x_{N-a} + 1) + (1 - \delta_{N-a})\delta_{N-b} x_{N-b}, \text{ если } N > b, \; \delta_N = 1,$$

$$y_N = \delta_{N-a} y_{N-a} + (1 - \delta_{N-a})\delta_{N-b}(y_{N-b} + 1), \text{ если } N > b, \; \delta_N = 1.$$

Указанными формулами определяется (x_N, y_N) для тех N, для которых уравнение $ax + by = N$ имеет решение в целых неотрицательных числах. Для остальных N, т.е. таких, для которых $\delta_N = 0$, можно также определить (x_N, y_N), как (x_M, y_M), где $M = r(N)$ — минимальное число, большее N, для которого $\delta_M = 1$. Очевидно, вместо точного равенства $ax + by = N$ для таких N будет

$$N < ax_N + by_N < N + b.$$

Вычисление (x_N, y_N) для $N : \delta_N = 0$ можно производить справа налево по рекуррентной формуле

$$(x_{N-1}, y_{N-1}) = (x_N, y_N), \text{ если } \delta_N = 0,$$

начиная со значения $N_0 = (a-1)(b-1)$.

Функция $s(t)$ рассчитывается по формуле

$$s(t) = T_1 x_{r(N)} + T_2 y_{r(N)},$$

где

$$N =]\, t / \Delta\, [\,,$$

$$r(N) = \min\,(r \geq N : \delta_r = 1).$$

Справедлива оценка

$$t \leq s(t) \leq \Delta / (]\, t / [+\, b - 1).$$

При больших N вычисление (δ_N, x_N, y_N) можно упростить, использовав следующий прием. Пусть $N = ka + l$, где $k > 0$, $(a-1)(b-1) \leq l \leq (a-1)b$. Из заранее вычисленной таблицы выбираем значение вектора (δ_l, x_l, y_l) (где, очевидно, $\delta_l = 1$) и полагаем

$$(\delta_N, x_N, y_N) = (1, k + x_l, y_l)\,.$$

Таким образом, в таблицу троек (δ_N, x_N, y_N) нужно записывать лишь их значения при $N \leq (a-1)b$.

Следствие теоремы. Пусть выполнены условия

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} (k\Delta - x) c(x) dx + \bar{c} < 0,$$

$$C(-\theta) > 0$$

для некоторого $\theta > (b-1)\Delta$. Тогда в двухциклической системе обслуживания цепь Маркова $(W_n, n \geq 0)$ эргодична.

Доказательство состоит в проверке условий теоремы. Существенно используется тот факт, что для любого $N \geq (a-1)(b-1)$ уравнение $ax + by = N$ имеет решение в целых неотрицательных числах, коль скоро a и b — взаимно простые натуральные числа.

Автор благодарен Ю.С. Мишуре за указание электронных статей [8, 9], в которых приводится доказательство этого факта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lakatos L. On a simple continuous cyclic-waiting problem // Annales Univ. Sci. Bud. Sect. Comp. — 1994. — **14**. — P. 105–113.
2. Lakatos L. On a cyclic-waiting queueing system // Theory of Stochastic Processes. — 1996. — **2**, N 18. — P. 176–180.
3. Koba E.V. On a $GI/G/1$ retrial queueing system with a FIFO queueing discipline // Theory of Stochastic Processes. — 2002. — **24**, N 8. — P. 201–207.
4. Коба Е.В. Условия устойчивости некоторых типовых систем обслуживания с возвращением заявок // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 1. — С. 124–127.
5. Tweedie R.L. Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Marcov chains on a general state space // Stoch. Processes Appl. — 1975. — **3**, N 4. — P. 385–403.
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 527 с.
7. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Едиториал УРСС, 1999. — 440 с.
8. What are the subsemigroups of $(N, +)$?: — http://math.stackexchange.com/questions/164164/what-are-the-subsemigroups-of-mathbb-n.
9. Shallit J. The Frobenius Problem and its generalizations. — http://cs.uwaterloo.ca/~shallit/Talks/frob6.pdf.

Поступила 06.05.2014