УДК 519.217

В.С. КОРОЛЮК, И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

О ПОВЕДЕНИИ ВТОРОГО МОМЕНТА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Аннотация. Доказано существование сильного решения линейного стохастического дифференциального уравнения с частными производными (ЛСДУ с ЧП) в соответствующем пространстве со случайными параметрами. Получены достаточные условия в терминах коэффициентов ЛСДУ с ЧП асимптотической устойчивости и неустойчивости в среднем квадратическом сильного решения этого уравнения.

Ключевые слова: стохастическое уравнение в частных производных, устойчивость в среднем квадратическом, асимптотическая устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Детерминированные уравнения в частных производных рассмотрены во многих работах отечественных и зарубежных авторов, см., например, [1–3] и билиографию в них.

После введения понятия стохастического дифференциала и интеграла, замены переменных для стохастического дифференциала, определения сильного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) в известных монографиях [4–6] и их дальнейшее распространение на классы стохастических дифференциально-функциональных уравнений [7–9] (см. приведенную обширную библиографию в этих работах) стало возможным исследование асимптотически сильного решения для СДУ с ЧП (см., например, работы [5, 10–12] и др.).

Дальнейшее исследование СДУ с ЧП сопряжено с построением математических моделей сложных реальных систем, которые требуют учитывать случайные параметры в этих уравнениях (см. [6, 7, 12, 13] и др).

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения сильного решения ЛСДУ с ЧП с учетом случайных параметров в правой части [10, 12].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стохастический эксперимент с базовым вероятностным пространством [1, 4, 5, 7] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — фильтрация, где задана функция $u(t, x, \omega)$, измеримая с вероятностью единица по t и x относительно минимальной σ-алгебры $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$ — борелевских множеств на плоскости [13], и для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\}dx < \infty \tag{1}$$

для всех $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — математическое ожидание [14], $T \subseteq [0, \infty)$. Пространство функции $\{u(t, x, \omega)\}$, обладающее свойством интегрируемости (1), обозначим $\mathfrak{M}_T$.

Введем нормы [6, 15]:

$$||u(t, x, \omega)||^2_{L_{2\mathbb{R}^1}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx; \tag{2}$$

$$||u(t, x, \omega)||^2_{L_{2T}} \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt; \tag{3}$$

$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E}\{||u(t, x, \omega)||^2_{L_{2\mathbb{R}^1}}\}, \tag{4}$$

где $L_{2\mathbb{R}^1}$ и L_{2T} — пространства функций $\{u(t, x, \omega)\}$, которые имеют соответствующие нормы (2) и (3).

В пространстве $\mathfrak{M}_T$ следует ввести норму вида

$$||u(t,x,\omega)||^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t)dt = \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2\, dx\right]^2 dt. \tag{5}$$

Обозначим

$$Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj} q^k p^j, \tag{6}$$

где $A \equiv \{a_{kj}\}$ — действительная матрица размера $n \times m$, составленная из элементов $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$.

В пространстве $\mathfrak{M}_T$ рассмотрим подпространство $\mathfrak{M}_{1T} \subseteq \mathfrak{M}_T$, для элементов которого имеет место включение

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T, \tag{7}$$

где $A \equiv \{a_{kj}\}_{k,j=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}^1$.

Далее рассматриваем на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ задачу Коши для линейного стохастического дифференциального уравнения с частными производными (ЛСДУ с ЧП) вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) =$$

$$= \varphi(\xi(\omega)) Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t,\omega)}{dt}, \tag{8}$$

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)\Big|_{t=0} = [Qu]_0, \tag{9}$$

где Q определено (6), матрицы $B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij} \in \mathbb{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij} \in \mathbb{R}^1$, где $\varphi(\cdot)$ — беровская функция [13] с областью значений $\mathbb{R}^1$, $\xi(\omega)$ — случайная величина, заданная плотностью $p_\xi(x)$ (или функцией распределения $F_\xi(x) \equiv \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) < x \;\; \forall x \in \mathbb{R}^1\}$ [14]), $w(t, \omega)$ — одномерный винеровский процесс [11], причем $\xi(\omega)$ не зависит от $w(t, \omega)$.

Под сильным решением задачи Коши (8), (9) будем понимать непрерывную с вероятностью единица по $t \in [0, T]$ функцию $u(t, x, \omega)$, согласованную с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ и такую, что с вероятностью единица для каждой пары (t, x) удовлетворяет интегральному стохастическому уравнению [1, 4, 11]

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) = [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B, ds, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \varphi(\xi(\omega)) Q\left(C, ds, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega)\, dw(s, \omega) \tag{10}$$

с начальными неслучайными условиями (9).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛСДУ с ЧП (8), (9) В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathfrak{M}_{1T}$

Для установления существования сильного решения задачи Коши для (8), (9) докажем вначале вспомогательный результат.

Лемма 1. Преобразование Фурье по x [1] для функции $u(t, x, \omega)$

$$v(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \tag{11}$$

не выводит ее из пространства $\mathfrak{M}_T$ для любого конечного $T \subseteq \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Существование преобразования Фурье следует из того, что $u(t, x, \omega)$ с вероятностью единица лежит в L_{2R^1} для произвольного $t \in [0, T]$ и

$$\mathbb{P}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega) |^2 \, dx > N \right\} \le \frac{\mathbb{E}_u(t)}{N} \to 0$$

при $N \to +\infty$.

Согласно теореме Планшереля [16] имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | v(t, \sigma, \omega) |^2 \, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega) |^2 \, dx,$$

т.е. $\| v \|_{L_{2\mathbb{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| u \|_{L_{2\mathbb{R}^1}}$, а значит, $\mathbb{E}_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}_u(t)$.

Тогда согласно определению нормы в пространстве $\mathfrak{M}_T$ будем иметь $\| v \|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| u \|_{\mathfrak{M}_T}$, что и доказывает лемму 1.

Теорема 1. Пусть для задачи Коши (8), (9) выполняются условия:

1) корни полинома $P(\lambda, i\sigma) \equiv \lambda Q(A, \lambda, i\sigma) + Q(B, \lambda, i\sigma)$ для произвольного $\sigma \ne 0$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda \le \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;

2) $\forall\, t \in [0, T]$ и $C \equiv 0_{k \times n}$ детерминированное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \widetilde{u}(t, x) \right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \widetilde{u}(t, x) = 0 \tag{12}$$

имеет решение $\widetilde{u}(t, x)$ задачи Коши в $L_{2\mathbb{R}^1}$ с начальными условиями

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \widetilde{u}(t, x) = [Q\widetilde{u}]_0; \tag{13}$$

3) случайная величина $\xi(\omega)$ не зависит от $w(t, \omega)$.

Тогда стохастическая задача Коши (8), (9) при $C \ne 0_{k \times n}$ имеет решение в пространстве $\mathfrak{M}_{1T}$.

Доказательство. Поскольку проеобразование Фурье [1] сохраняет норму в $\mathfrak{M}_{1T}$ по лемме 1, достаточно доказать существование сильного решения задачи Коши ЛСДУ для $v(t, \sigma, \omega)$, заданного формулой (11), а именно

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] + Q\left(B, \frac{d}{dt}\, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) =$$

$$= \varphi(\xi(\omega)) Q\left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}. \tag{14}$$

Заметим, что для произвольной действительной матрицы $D \equiv \{ d_{ij} \}_{i,j=1}^{k,n}$ имеем включение $Q\left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_{1T}$ и решение $v(t, \sigma, \omega)$ ЛСДУ (14) при каждом $\sigma \ne 0$ существует и единственно с точностью до стохастической эквивалентности [3, 5, 7]. ЛСДУ (14) следует понимать как интегральное стохастическое уравнение

$$Q\left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma,\omega) = [Qv]_0 + \int_0^t Q(B, ds, i\sigma) v(s,\sigma,\omega) =$$

$$= \varphi(\xi(\omega)) \int_0^t Q(C, ds, i\sigma) v(s,\sigma,\omega)\, dw(s,\omega),$$

для которого выполнены условия, гарантирующие существование и единственность сильного решения с точностью до стохастической эквивалентности [7, теорема 4.1].

Пусть $H(t,\sigma)$ — фундаментальное решение детерминированной однородной невозмущенной задачи Коши (12), (13) для ЛСДУ с ЧП (8), (9) при $C \neq 0_{k\times n}$, тогда сильное решение ЛСДУ (14) можно записать в виде интегрального уравнения [9]

$$v(t,\sigma,\omega) = v_0(t,\sigma) + \varphi(\xi(\omega)) \int_0^t H(t-s) Q(C, ds, i\sigma) v(t,\sigma,\omega), \tag{15}$$

где $v_0(t,\sigma)$ — решение однородной невозмущенной задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma\,\omega) + Q\left(B, \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v(t,\sigma,\omega)\right] = 0.$$

Согласно [1] фундаментальное решение $H(t,\sigma)$ имеет вид

$$H(t,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_\Gamma \Gamma \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda, i\sigma)}, \tag{16}$$

где Γ — контур, охватывающий все нули многочлена $P(\lambda, i\sigma)$.

Применив случайный оператор $\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma)$ к обеим частям (15), получим

$$\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t,\sigma,\omega) = \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v_0(t,\sigma) +$$

$$+ \int_0^t \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) H(t-s,\sigma) \varphi(\xi(\omega)) Q(C, ds, i\sigma) v(s,\sigma,\omega) dw(s,\omega). \tag{17}$$

Рассмотрев квадрат модуля величины левой и правой частей уравнения (17) и использовав неравенство $|a+b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$, получим

$$|\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t,\sigma,\omega)|^2 \le 2 \left\{ |\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v_0(t,\sigma)|^2 + \right.$$

$$\left. +2 \left| \int_0^t \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) H(t-s,\sigma) \varphi(\xi(\omega)) Q(C, ds, i\sigma) v(s,\sigma,\omega) dw(s,\omega) \right|^2 \right\}. \tag{18}$$

Пусть

$$z(t,\sigma) \equiv \mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t,\sigma,\omega)|^2\},$$

где $\mathbb{E}\{\cdot\}$ — операция математического ожидания [14]. Далее, применяя операцию $\mathbb{E}\{\cdot\}$ к левой и правой частям неравенства (18), учитывая свойство интеграла Ито о вычислении $\mathbb{E}\{\cdot\}$ от квадрата интеграла Ито [7, с. 245–249]

$$\mathbb{E}\left\{ \left| \int_0^t f(t,\omega) dw(s) \right|^2 \right\} = \int_0^t \mathbb{E}\{|f(s,\omega)|^2\} ds$$

и учитывая условие 3) теоремы 1, имеем следующее неравенство:

$$z(t,\sigma) \le 2\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\} |Q(C, dt, i\sigma) v_0(t,\sigma)|^2 +$$

$$+2 \int_0^t \mathbb{E}\{|f(s,\omega)|^2\} |Q(C, ds, i\sigma) H(t-s,\sigma)|^2 z(s,\sigma) ds. \tag{19}$$

Условие 1) теоремы 1 дает возможность получить неравенство [1]

$$\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}|Q(C, dt, i\sigma)H(t-s, \sigma)|^2 \le L,$$

а условие 2) определяет равномерную ограниченность

$$\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}|Q(C, dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 \le K.$$

Полученные выше неравенства дают оценку $z(t, \sigma) \le K + L\int\limits_0^T z(s, \sigma)ds$, откуда согласно неравенству Гроноулла [1] имеем экспоненциальную оценку

$$z(t, \sigma) \le Ke^{Lt} \quad \forall\, t \in [0, T] \subseteq [0, \infty). \tag{20}$$

Таким образом, гарантируется включение

$$\varphi(\xi(\omega))Q(C, dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_T. \tag{21}$$

Осталось получить включения (21) для любой действительной матрицы $D \equiv \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$.

Применив случайный оператор $\varphi(\xi(\omega))Q(D, dt, i\sigma)$ к (16), аналогично вышеприведенным рассуждениям можно записать неравенство

$$\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}\mathbb{E}\{|Q(D, dt, i\sigma)v(t,`\sigma, \omega)|^2\} \le$$

$$\le 2\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}|Q(D, dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 +$$

$$+2\int\limits_0^t \mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}|Q(D, dt, i\sigma)H(t-s, \sigma)|^2 z(s, \sigma)ds, \tag{22}$$

где интеграл, как функция верхнего предела интегрирования по $t \in [0, T]$, существует.

Значит, учитывая оценку (20) и условие 1), получим утверждение теоремы 1.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧЕСКОМ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЛСДУ с ЧП

Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть для ЛСДУ с ЧП (8), (9) выполнены условия теоремы 1. Тогда: 1) для произвольной матрицы $C \ne 0_{k\times n}$ имеет место включение

$$\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}Q(C, dt, i\sigma)H(t, \sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}; \tag{23}$$

2) для соответствующей нормы этого пространства верно равенство

$$\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}\|Q(C, dt, i\sigma)H(t, \sigma)\|_{L_{2T}}^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}|Q(C, i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \equiv S(\sigma). \tag{24}$$

Доказательство. Используя условие 1) теоремы 1 и формулу (16), можно вычислить

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty} [Q(C, dt, i\sigma)H(t, \sigma)e^{-i\lambda t}] = \frac{1}{2\pi}\frac{Q(C, i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)} \tag{25}$$

и, умножая на $\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}$ левую и правую части (25), получаем утверждение (23).

Для доказательства (24) применим теорему Планшереля [1]:

$$\|Q(C, dt, i\sigma)H(t, \sigma)\|_{L_{2(0,\infty)}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q(C, i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \equiv S_1(\sigma).$$

Умножив левую и правую части полученного равенства на $\mathbb{E}\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\}$, получим $S(\sigma)$ в формуле (24).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда:

1) если $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma) < 1$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}_U(t) = 0$, где

$$U(t, x, \omega) \equiv \varphi(\xi(\omega)) Q\left(D, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)$$

для произвольной действительной матрицы D;

2) если $S(\sigma) > 1$ на множестве Λ положительной меры Лебега, то $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}_U(t) = +\infty$.

Доказательство. Сначала заметим, что из неравенства (18), вследствие стремления к нулю положительного ядра при $t \to +\infty$, следует стремление к нулю $z(t, \sigma)$ при $S(\sigma) < 1, \sigma \neq 0$.

1. Если в (24) выполняется неравенство $S(\sigma) < 1$, то легко видеть стремление к нулю при $t \to +\infty$ модуля преобразования Фурье $U(t, x, \omega)$ при произвольной действительной матрице D [1]. При этом это стремление равномерно относительно σ, если $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma) < 1$. Осталось перейти к границе под знаком интеграла Лебега и первая часть теоремы 2 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 2 достаточно доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z(t, \sigma) d\sigma = \infty$, поскольку имеет место (24).

Действительно, пусть $S(\sigma) > 1$ на Λ положительной меры Лебега, тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t, \sigma) = +\infty$, поскольку $z(t, \sigma) > 0$.

Теорема 2 доказана.

4. ЗАДАЧА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ

В работе [3] исследуется поведение стержня, на который действует «белый шум». Математической моделью этого процесса будем считать следующее стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных с производной от винеровского процесса, которая с вероятностью единица не существует и названа «белым шумом», а именно:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}. \tag{26}$$

Здесь $a, b, c > 0$ с начальными условиями

$$u(0, x) = f_1(x), \; \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x) \tag{27}$$

и краевыми условиями

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0. \tag{28}$$

Аналогично дискретному случаю [3] определяется статистический запас устойчивости S_a^2 по параметру a, как наиболее допустимая интенсивность процессов с взаимно независимыми значениями, при которой система устойчива в l.i.m., т.е. решение стабилизируется к нулю.

В результате можно подсчитать статистический запас устойчивости [17] $S_{k_1 k_2}$ системы (26)–(28)

$$S_{k_1 k_2} \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{k_1 k_2} \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \tag{29}$$

по параметрам $a_{k_1 k_2}$, $k = k_1 + k_2$.

Если обозначить $P(\lambda,\sigma)\equiv\sum_{k=0}^{m}a_{k_1k_2}\lambda^{k_1}(i\sigma)^{k_2}$, то статистический запас устойчивости $S_{k_1k_2}$ системы вычисляется по формуле

$$S_{k_1k_2}\equiv\left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda|^{k_1}|\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda,\sigma)|}d\lambda\right]^{-1}. \qquad (30)$$

Используя вышеприведенное утверждение (30), найдено [17] статистический запас устойчивости S_a по параметру a системы (26)–(28):

$$S_a\equiv\left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4+a\sigma^2-b\lambda^2)^2+c^2\lambda^2}\right]^{-1}=2ac. \qquad (31)$$

Таким образом, система (26)–(28) устойчива в l.i.m., для которого $\varepsilon^2 S_a^{-1}<1$, т.е. $S_a>\varepsilon^2$.

Пусть на правую часть уравнения (26) в системе (26)–(28) действуют внешние случайные возмущения. Это станет возможным, если систему поместить на платформу, движение которой толчковое и описывается с помощью $\varphi(\xi(\omega))$. Тогда (26) будет иметь вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi(\xi(\omega))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}. \qquad (32)$$

Используя определение статистического запаса устойчивости для системы (32), (27), (28), имеем

$$S_a(\varphi)\equiv\left[\mathbb{E}\{|\varphi(\xi)|^2\}\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4+a\sigma^2-b\lambda^2)^2+c^2\lambda^2}\right]^{-1}=$$

$$=\mathbb{E}\{|\varphi(\xi)|^2\}2ac. \qquad (33)$$

Применяя достаточные условия устойчивости в l.i.m. теоремы 2, приходим к выводу, что система (32), (27), (28) устойчива в l.i.m., если

$$\varepsilon^2 S_a^{-1}(\varphi)<1, \qquad (34)$$

т.е. $S_a(\varphi)>\varepsilon^2$, и неустойчива в l.i.m., если $S_a(\varphi)<\varepsilon^2$.

1. Пусть $\xi(\omega)$ имеет закон распределения

$$P\{\omega:\xi\equiv 1\}=P\{\omega:\xi=-1\}=\frac{1}{2}$$

и $\varphi(\xi(\omega))\equiv\xi(\omega)$. Тогда $E\{\xi\}=0$, $D\{\xi\}=1$ и условие (33) совпадает с условием (31).

2. Если в качестве закона распределения $\xi(\omega)$ выбрать пуассоновский закон $P\{\omega:\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ и $\varphi(\xi)=\xi$, то $\mathbb{E}\xi=D\xi=\lambda$. Значит, условие устойчивости в l.i.m. системы (32), (27), (28) будет иметь вид $2ac\lambda>\varepsilon^2$, а неустойчивости соответственно — $2ac\lambda<\varepsilon^2$.

3. Пусть $\xi(\omega)$ распределена равномерно на $[0,1]$, т.е.

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1, & \forall x\in[0,1],\\ 0, & \forall x\notin[0,1].\end{cases}$$

Известно, что $M\xi=\frac{1}{2}$, $M\xi^2=\frac{1}{3}$. Если $\varphi(\xi)=\xi$, то условие устойчивости в l.i.m. системы (32), (27), (28) примет вид $ac>\frac{3}{2}\varepsilon^2$, а неустойчивости — $ac<\frac{3}{2}\varepsilon^2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в данной работе стохастическая модель сложных систем, по-видимому, является первой попыткой учета в полном объеме случайностей при исследовании реальных процессов, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, в правой части которых учитываются не только диффузионные возмущения типа броуновского процесса [5, 10, 18, 19], но и случайные возмущения иных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1997. — 495 с.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 521 с.
4. Гулинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005. — 408 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. — Киев: Наук. думка, 1980. — 612 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы. — Киев: Наук. думка, 1977. — 251 с.
7. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика: В 3-х томах. Т. 3. Випадкові процеси. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 798 с.
8. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1992. — 301 с.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — Рига: Зинатне, 2989. — 421 с.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Сб. научн. тр. — Киев: Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
11. Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн. — 1985. — **37**, № 1. — С. 13–20.
12. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Там же. — 1993. — **45**, № 9. — С. 1773–1781.
13. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз., 1969. — 859 с.
14. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп’ютерна практика: В 3-х томах. Т. 1. Ймовірність. — Чернівці: Золоті литаври, 2007. — 444 с.
15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 541 с.
16. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969. — 367 с.
17. Эйдельман С.Д. Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 445 с.
18. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 333 с.
19. Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения // Укр. мат. журн. — 1980. — **32**, № 1. — С. 78–98.

Поступила 24.02.2014