УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА

ТОЧНЫЕ НИЖНИЕ ГРАНИЦЫ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА СИСТЕМЫ В ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннотация. Получены точные нижние оценки вероятности $F(v)-F(u), 0<u<v<\infty$, в классе функций распределения $F(x)$ неотрицательных случайных величин, имеющих унимодальную плотность с модой $m<u$ и два первых фиксированных момента.

Ключевые слова: экстремальные ступенчатые функции распределения, линейный функционал в теории надежности, множество функций распределения с унимодальной плотностью и двумя фиксированными моментами, разбиение области параметров.

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой найдены точные верхние границы функционала, указанного в аннотации к данной статье. В [1] собрана также библиография, относящаяся к рассматриваемой задаче, выполнены вспомогательные преобразования, с помощью которых поставленная задача сводится к более простой.

Важная особенность подобных задач в математической теории надежности — наличие параметров, от которых зависят оцениваемые функционалы. Этими параметрами могут быть периоды контроля, профилактик, замен элементов, интервалы времени, математическое ожидание, дисперсия, мода и т.д. Сложность решения таких параметрических задач состоит в том, чтобы найти разбиение области параметров на подобласти, каждой из которых отвечает своя функция распределения, доставляющая супремум или инфимум заданному линейному функционалу.

В настоящей работе автор вводит понятие граничной функции распределения, что облегчает нахождение разбиений области параметров. Основной результат сформулирован в теореме 2, его иллюстрация — в табл. 1, а численный пример содержится в табл. 2.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется найти точные нижние границы интеграла

$$R(G)=\int_0^\infty g(x)dG(x),\ g(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<u,\\ \dfrac{x-u}{x-m}, & u\le x<v,\\ \dfrac{v-u}{x-m}, & x\ge v,\end{cases} = \begin{cases} g_1(x), & 0\le x<v,\\ g_2(x), & x\ge v\end{cases},$$

$$0<m<u<v,$$

в следующем классе K функций распределения (ф.р.):

$$K=\left\{G: G(0-)=0, G(x)=G(x+0), \int_0^\infty x^i dG(x)=s_i,\ i=1,2; 0<s_1^2<s_2<\infty\right\}. \quad (1)$$

К этой задаче сводится нахождение инфимума интеграла

$$I(F)=\int_u^v dF(x), 0<u<v<\infty, \quad (2)$$

в классе A функций распределения неотрицательных случайных величин, имеющих унимодальную плотность с модой m и два первых фиксированных момента: μ_1, μ_2. О связи μ_1, μ_2 с s_1, s_2 см. [1]. Интеграл (2) является такой характеристикой надежности системы, как вероятность отказа системы в интервале времени (u, v). Решение задачи зависит от пяти параметров: u, v, m, s_1, s_2. Рассматривается случай $m< u$. При этом разбиение области параметров, полученное в задаче (1), сохраняется и для задачи (2) при $m< u$ и $\inf\limits_{G\in K} R(G) = \inf\limits_{F\in A} I(F)$ (см. [1]).

Далее в работе часто будут использоваться обозначения, введенные в предыдущих статьях автора:

$$B(u) = \frac{s_2 - s_1 u}{s_1 - u},\ \ m< u< s_1, \tag{3}$$

$$L(y, z) = g_1'(y) + g_2'(z) - \frac{2(g_2(z) - g_1(y))}{z-y},\ \ 0< y< z, \tag{4}$$

$$M(u, y, z) = \frac{g_1'(y)}{y-u} - \frac{g_1(y)-g_1(u)}{(y-u)^2} + \frac{g_1'(y)}{z-y} - \frac{g_2(z)-g_1(y)}{(z-y)^2},\ u< y< z. \tag{5}$$

Напомним смысл выражений (3)–(5).

Точки роста x_1, x_2; $(x_1 < x_2)$ двухточечной ф.р. из класса K связаны моментными условиями таким образом: если $x_1 < s_1$, то $x_2 = B(x_1)$; если $x_2 > B(0)$, то $x_1 = B(x_2)$.

Если точки x_0, y_0 $(x_0 < y_0)$ удовлетворяют соотношению $L(x_0, y_0) = 0$, то они определяют многочлен $U_0(x)$ второй степени, который касается функции $g(x)$ в точках x_0, y_0. И наоборот, если существует многочлен $U_0(x)$ второй степени, который касается функции $g(x)$ в двух точках: x_0, y_0, то эти точки связаны равенством $L(x_0, y_0) = 0$. Как образовалось это равенство? Старший коэффициент многочлена $U_0(x)$ имеет различные формы, например, такие:

$$a_0 = -\frac{g'(x_0)}{y_0 - x_0} + \frac{g(y_0) - g(x_0)}{(y_0 - x_0)^2} = \frac{g'(y_0)}{y_0 - x_0} + \frac{g(y_0) - g(x_0)}{(y_0 - x_0)^2}.$$

Из разности этих форм получаем равенство

$$L(x_0, y_0) = 0 \leftrightarrow g'(x_0) + g'(y_0) - 2\frac{g(y_0) - g(x_0)}{y_0 - x_0} = 0.$$

Все функции распределения (за исключением граничных), которые будут рассмотрены при решении задачи (1), являются семействами функций распределения, так как их точки роста зависят от параметров.

По определению трехточечная ф.р. $G_5(x)$ имеет известную первую точку роста: $x_5 = u$, и две точки: y_5, z_5, которые находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} L(y, z) = 0, \\ M(u, y, z) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

при ограничениях

$$u< B(z)< y< B(u)< v < z. \tag{7}$$

Ограничения (7) обеспечивают неотрицательность скачков p_1, p_2, p_3 в точках роста ф.р. G_5.

Семейство многочленов $U_5(x)$, соответствующее ф.р. $G_5(x)$, определяется из условий: $U_5(x_5) = g(u) = 0$, $U_5(y_5) = g(y_5)$, $U_5(z_5) = g(z_5)$, $U_5'(y_5) = g'(y_5)$,

$U_5'(z_5)=g'(z_5)$. Старший коэффициент $U_5(x)$ имеет несколько различных эквивалентных форм, например:

$$a_5=\frac{g'(y_5)}{y_5-x_5}-\frac{g(y_5)-g(x_5)}{(y_5-x_5)^2}=-\frac{g'(y_5)}{z_5-y_5}+\frac{g(z_5)-g(y_5)}{(z_5-y_5)^2}=$$
$$=\frac{g'(z_5)}{z_5-y_5}-\frac{g(z_5)-g(y_5)}{(z_5-y_5)^2}=\frac{g'(z_5)}{z_5-x_5}-\frac{g(z_5)-g(x_5)}{(z_5-x_5)^2}. \qquad (8)$$

Из (8) легко видеть, что точки y_5, z_5 удовлетворяют системе (6).

В задаче (1), кроме семейства ф.р. G_5, экстремальным будет также семейство ф.р. G_1, оно имеет точки роста $x_1=u, x_2=B(u)$, $u<s_1, B(u)<v$. Соответствующий многочлен $U_1(x)$ имеет только одну форму для своего старшего коэффициента:

$$a_1=\frac{g_1'(B(u))}{B(u)-u}-\frac{g_1(B(u))-g_1(u)}{(B(u)-u)^2},$$

которая вычисляется из следующих условий: $U_1(u)=g_1(u)$, $U_1(B(u))=g_1(B(u))$, $U_1'(B(u))=g_1'(B(u))$.

Наконец, семейство экстремальных ф.р. $G_1^*(x)$ имеет две точки роста: $x_1=u$, $y_1=B(u)$, $B(u)>v$. Соответствующее семейство экстремальных многочленов $U_1^*(x)$ имеет одну форму для своего старшего коэффициента:

$$a_1^*=\frac{g_2'(B(u))}{B(u)-u}-\frac{g_2(B(u))-g_1(u)}{(B(u)-u)^2},\ B(u)>v.$$

У граничных ф.р. $G_{15}(x)$, $G_{51}(x)$ соответствующие им граничные многочлены могут иметь и другие эквивалентные формы старших коэффициентов.

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ МНОГОЧЛЕНЫ

Рассмотрим граничные ф.р., которые встречаются при решении задачи (1). В отличие от семейств экстремальных ф.р. G_1, G_5, G_1^*, точки роста которых изменяются вместе с изменением параметров, граничные ф.р. G_{15} и G_{51} не являются семействами и каждая из них определяется единственным фиксированным набором значений всех параметров.

На границе между двумя соседними областями параметров совпадают две соседние экстремальные ф.р. и старшие коэффициенты соответствующих им многочленов. Обозначим граничные значения параметра u: $u=u_1$ и $u=u_2$. Тогда при $u=u_1$ имеем $G_1=G_5=G_{15}$, где граничная ф.р. G_{15} имеет точки роста:

$$x_{15}=u_1,\ y_{15}=B(u_1),\ z_{15}=z_0, \qquad (9)$$

причем скачок в точке z_0 равен нулю.

Старший коэффициент многочлена U_{15} обозначим a_{15}. Его различные эквивалентные формы получим, полагая в формулах (8) значения (9), а именно:

$$a_{15}=\frac{g'(B(u_1))}{B(u_1)-u_1}-\frac{g(B(u_1))-g(u_1)}{(B(u_1)-u_1)^2}=-\frac{g'(B(u_1))}{z_0-B(u_1)}+\frac{g(z_5)-g(y_5)}{(z_0-B(u_1))^2}=$$

$$=\frac{g'(z_0)}{z_0-B(u_1)}-\frac{g(z_0)-g(B(u_1)}{(z_0-B(u_1))^2}=\frac{g'(z_0)}{z_0-u_1}-\frac{g(z_0)-g(x_5)}{(z_0-u_1)^2}. \qquad (10)$$

По определению многочлен $U_{15}(x)$ касается функции $g(x)$ в точках $B(u_1)$, $B(u_1) < v$ и z_0, $z_0 > v$ и совпадает с $g(x)$ в точке $u = u_1$. Из (4), (5), (10) следует, что граница $u = u_1$ и точка z_0 удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &L(B(u), z) = 0, \\ &M(u, B(u), z) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Аналогично на границе $u = u_2$ имеем $G_5 = G_{51} = G_1^*$ и ф.р. G_{51} имеет точки роста

$$x_5 = u_2, \ \ y_5 = y_0, \ \ z_5 = B(u_2), \ \ y_0 < v, \ \ B(u_2) > v, \tag{11}$$

причем скачок в точке y_0 равен нулю. Старший коэффициент многочлена $U_{51}(x)$, соответствующего граничной ф.р. G_{51}, обозначим a_{51}. Его различные эквивалентные формы получим, подставив в формулу (8) значения (11):

$$a_{51} = \frac{g'(B(u_2))}{B(u_2) - u_2} - \frac{g(B(u_2)) - g(u_2)}{(B(u_2) - u_2)^2} = \frac{g'(B(u_2))}{B(u_2) - y_0} - \frac{g(B(u_2)) - g(y_0)}{(B(u_2) - y_0)^2} =$$

$$= \frac{g'(y_0)}{y_0 - u_2} - \frac{g(y_0) - g(u_2)}{(y_0 - u_2)^2} = -\frac{g'(y_0)}{B(u_2) - y_0} + \frac{g(B(u_2)) - g(y_0)}{(B(u_2) - y_0)^2}. \tag{12}$$

Из (4), (5) и (12) следует, что точки u_2, y_0 удовлетворяют системе уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &L(y, B(u)) = 0, \\ &M(u, y, B(u)) = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Многочлен $U_{51}(x)$ касается функции $g(x)$ в точках $y_0, B(u_2)$ и совпадает с $g(x)$ в точке $u = u_2$.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $M(u, y, z)$

Исследуем свойства функции $M(u, y, z)$, с помощью которой строится разбиение области параметров и доказывается (далее) экстремальность семейств ф.р. G_1, G_5, G_1^*.

Рассмотрим $M(u, B(u), z_0)$, $M(u, y_0, B(u))$ как функции от u:

$$[M(u, B(u), z_0)]_{u=u_1} =$$

$$= \left[\frac{g_1'(B(u))}{B(u) - u} - \frac{g_1(B(u)) - g_1(u)}{(B(u) - u)^2} + \frac{g_1'(B(u))}{z_0 - B(u)} - \frac{g_2(z_0) - g_1(B(u))}{(z_0 - B(u))^2}\right]_{u=u_1} =$$

$$= -\frac{1}{(B(u_1) - m)^2} + \frac{g_1'(B(u_1))}{z_0 - B(u_1)} - \frac{g_2(z_0) - g_1(B(u_1))}{(z_0 - B(u_1))^2} = a_1 - a_{15} = 0. \tag{13}$$

Найдем производную по u от этой функции. Для этого выпишем подготовительные формулы. Так как $B(u) < v$, а $z_0 > v$, то

$$g_1(B(u)) = \frac{B(u) - u}{B(u) - m}; \ g_1'(B(u)) = \frac{u - m}{(B(u) - m)^2}; \ (g_1(B(u)))_u' = B'(u) g_1' B(u) - \frac{1}{B(u) - m};$$

$$(g_1'(B(u)))_u' = \frac{1}{(B(u) - m)^2} + g_1''(B(u)) B'(u); \ g_2(z_0) = \frac{v - u}{z_0 - m}; \ (g_2(z_0))_u' = -\frac{1}{z_0 - m};$$

$$[(M(u, B(u), z_0))_u]_{u=u_1} = \left[\frac{2B'(u)}{(B(u) - m)^3} + \frac{B'(u)}{z_0 - B(u)} \times\right.$$

$$\left.\times \left(g_1''(B(u)) + \frac{2g_1'(B(u))}{z_0 - B(u)} - \frac{2(g_2(z_0) - g_1(B(u)))}{(z_0 - B(u))^2}\right) + \frac{1}{(B(u) - m)^2 (z_0 - m)}\right]_{u=u_1} =$$

$$=\frac{2B'(u_1)}{(B(u_1)-m)^3}+\frac{B'(u_1)}{z_0-B(u_1)}(g_1''(B(u_1)-2a_{15})+\frac{1}{(B(u)-m)^2(z_0-m)}=$$

$$=\frac{2B'(u_1)}{(B(u_1)-m)^3}+\frac{B'(u_1)}{z_0-B(u_1)}\varphi_{15}''(B(u_1))+\frac{1}{(B(u_1)-m)^2(z_0-m)}>0, \qquad (14)$$

где $\varphi_{15}(x)=g(x)-U_{15}(x)$, $B(u_1)<v$. Непосредственно по функции $g(x)$ можно проверить, что $\varphi_{15}''(B(u_1))>0$. Таким образом, функция $M(u,B(u),z_0)$ при переходе через границу $u=u_1$, на которой $M(u_1,B(u_1),z_0)=0$, меняет знак $-$ на $+$.

Исследуем поведение функции $M(u, y_0, B(u))$, $y_0<v$, $B(u)>v$. На границе $(u=u_2)$ имеем $M(u_2, y_0, B(u_2))=0$ в силу равенства различных форм старшего коэффициента a_{51} граничного многочлена U_{51} (см. (12)):

$$[M(u, y_0, B(u))]_{u=u_2}=\left[\frac{g'(y_0)}{y_0-u}-\frac{g(y_0)-g(u)}{(y_0-u)^2}+\frac{g'(y_0)}{B(u)-y_0}-\frac{g(B(u))-g(y_0)}{(B(u)-y_0)^2}\right]_{u=u_2}=$$

$$=-\frac{1}{(y_0-m)^2}+\left[\frac{g'(y_0)}{B(u)-y_0}-\frac{g(B(u))-g(y_0)}{(B(u)-y_0)^2}\right]_{u=u_2}=a_{51}-a_1^*=0. \qquad (15)$$

При $u=u_2$ совпадают ф.р. G_5 и G_1^*, они имеют одни и те же точки роста: u_2, $y_0, B(u_2)$ и $G_5=G_1^*=G_{51}$. Соответствующий граничный многочлен $U_{51}(x)$ касается $g(x)$ в точках $y_0, B(u_2)$. Отсюда $L(y_0, B(u_2))=0$. Старшие коэффициенты граничных многочленов совпадают, поэтому старший коэффициент a_1^* имеет такие же различные формы, как и a_{51}. В частности, записывая $U_1^*(x)$ в форме $U_1^*(x)=g(y_0)+g'(y_0)(x-y_0)+a_1^*(x-y_0)^2$, получаем

$$U_1^*(B(u))=g_2(B(u))=g(y_0)+g'(y_0)(B(u)-y_0)+a_1^*(B(u)-y_0)^2,$$

откуда

$$a_1^*=-\frac{g'(y_0)}{B(u)-y_0}+\frac{g(B(u))-g(y_0)}{(B(u)-y_0)^2},$$

что и записано в (15).

Найдем производную от $M(u, y_0, B(u))$ по u при $u=u_2$.

Выпишем вспомогательные формулы:

$$g_1'(y_0)=\frac{u-m}{(y_0-m)^2};\ (g_1'(y_0))_u'=\frac{1}{(y_0-m)^2};\ g_2(B(u))=\frac{v-u}{B(u)-m};$$

$$(g_2(B(u)))_u'=-\frac{1}{B(u)-m}+g_2'(B(u))B'(u);\ (g_1(y_0))_u'=-\frac{1}{y_0-m};$$

$$[(M(u, y_0, B(u))_u']_{u=u_2}=$$

$$=\left[-\frac{B'(u)}{(B(u)-y_0)^2}L(y_0, B(u))+\frac{1}{(y_0-m)^2(B(u)-m)}\right]_{u=u_2}=$$

$$=\frac{1}{(y_0-m)^2(B(u)-m)}>0. \qquad (16)$$

Таким образом, функция $M(u, y_0, B(u))$ при переходе через границу $u=u_2$ меняет знак $-$ на $+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

Известно, что для линейного функционала $R(G)=\int_0^\infty g(x)dG(x), G\in K$ ($g(x)$ — непрерывная, ограниченная функция, кусочно дважды дифференцируемая) справедливо равенство

$$\inf_{G\in K} R(G)=\inf_{G\in E} R(G),$$

где E — множество крайних распределений выпуклого множества K. Оно содержит одно-, двух- или трехступенчатые ф.р. Каждой такой ф.р. $G_i(x)$ соответствует многочлен $U_i(x)$ степени, не выше второй, который совпадает с функцией $g(x)$ в точках роста ф.р. $G_i(x)$ и касается $g(x)$ в некоторых из них. Обозначим $\varphi_i(x)=g(x)-U_i(x)$.

Справедлива теорема 1 [2].

Теорема 1. Для того чтобы инфимум линейного функционала $R(G), G\in E$, достигался на некоторой ф.р. $G_i\in E$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x\ge 0$: $\varphi_i(x)\ge 0$.

Теорема 1 будет использоваться при доказательстве основной теоремы 2.

Теорема 2. Если $s_1<u$, то $\inf R(G)=0, G\in E$. Если $m<u<s_1$, то:

1) в области, определяемой неравенством $M(u, B(u), z_0)<0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф.р. $G_1(x)$ с точками роста $x_1=u, x_2=B(u), B(u)<v$;

2) в области параметров, определяемой неравенствами $M(u, B(u), z_0)>0$, $M(u, y_0, B(u))<0$, инфимум $R(G), G\in K$, достигается на ф.р. $G_5(x)$ с точками роста $x_1=u, x_2=y_5, x_3=z_5$;

3) в области, определяемой неравенством $M(u, y_0, B(u))>0$, точная нижняя грань функционала $R(G), G\in K$, достигается на ф.р. $G_1^*(x)$ с точками роста $x_1=u, x_2=B(u), B(u)>v$.

Доказательство. Если $s_1<u$, то существует ф.р. с точками роста $x_1=0$, $x_2=u, x_3=n$, на которой функционал $R(G)$ стремится к нулю, если $n\to\infty$. Следовательно, при $s_1<u$, $m<u$ $\inf\int_u^v dF(x)=0, F\in A$.

1. Докажем, что в первой области параметров экстремальным будет семейство ф.р. $G_1(x)$ с точками роста $u, B(u), B(u)<v$. Соответствующее G_1 семейство многочленов U_1 определяется так:

$$U_1(u)=g(u),\ U_1(B(u))=g(B(u)),\ U_1'(B(u))=g'(B(u)).$$

Его старший коэффициент равен:

$$a_1=\frac{g_1'(B(u))}{B(u)-u}-\frac{g_1(B(u))-g(u)}{(B(u)-u)^2}=-\frac{1}{(B(u)-m)^2}.$$

Рассмотрим функцию $\varphi_1(x)=g_1(x)-U_1(x)$. Если $x\in(0,u)$, то $\varphi_1(x)\ge 0$. Пусть $x\in(u,v)$. Докажем, что $\forall x\in(u,v):\varphi_1(x)\ge 0$.

Вычислим

$$\varphi_1''(x)=g_1''(x)-U_1''(x)=-\frac{2(u-m)}{(x-m)^3}+\frac{2}{(B(u)-m)^2}.$$

Функция $\varphi_1''(x)$ монотонно возрастает, так как $\varphi_1'''(x)=g_1'''(x)>0$. Из $\varphi_1''(u+0)<0$, $\varphi_1''(v-0)>0$ следует, что $\varphi_1''(x)$ имеет один корень: $x=x_0$, причем $\forall x\in(u,x_0)$: $\varphi_1''(x)<0$ и $\forall x\in(x_0,v):\varphi_1''(x)>0$. Легко проверить, что $\varphi_1''(B(u))>0$, т.е. $B(u)\in(x_0,v)$. Тогда

$$\forall x\in(x_0,v):(\varphi_1''(x)>0,\ \varphi_1(B(u))=\varphi_1'(B(u))=0)\to\varphi_1(x)\ge 0,\ \varphi_1(x_0)>0,$$

$$\forall x\in(u,x_0,):\{\varphi_1''(x)<0,\ \varphi_1(u)=0,\ \varphi_1(x_0)>0\}\to\varphi_1(x)\ge 0.$$

Итак, $\varphi_1(x)\ge 0\ \forall x\in(u,v)$.

Пусть теперь $x\in(v,\infty)$. По условию в первой области $M(u,B(u),z_0)<0$. Из (13) и (14) следует, что это неравенство равносильно $a_1<a_{15}$, где a_{15} — старший коэффициент граничного многочлена $U_{15}(x)$. Этот многочлен совпадает с функцией $g(x)$ в точке $x=u$ и касается $g(x)$ в точках $x=B(u)$, $x=z_0$. Тогда для функции $\varphi_{15}(x)=g_2(x)-U_{15}(x)$ имеем

$$\{\varphi_{15}''(x)>0,\ \varphi_{15}(z_0)=\varphi_{15}'(z_0)=0\}\to\varphi_{15}(x)\ge 0\ \ \forall x>v.$$

Образуем разность $V(x)=U_{15}(x)-U_1(x)$. Имеем

$$\{V''(x)=a_{15}-a_1>0, V(z_0)=V'(z_0)=0\}\to V(x)\ge 0\ \forall x>v.$$

Далее, $\varphi_1(x)=g_2(x)-U_1(x)=\varphi_{15}(x)+V(x)\ge 0.$ Следовательно, $\varphi_1(x)\ge 0$, $x>v$. Объединив все части доказательства, получим $\varphi_1(x)\ge 0, x\ge 0$, что и доказывает экстремальность ф.р. G_1 в области 1 (согласно теореме 1).

2. Во второй области параметров, задаваемой неравенствами $M(u,B(u),z_0)>0$, $M(u,y_0,B(u))<0$, существует семейство ф.р. $G_5(x)$. Это следует из указанных неравенств и теорем о неявных функциях [3, с. 181, 188; 4, с. 145, 146], а именно, при каждом фиксированном наборе значений параметров из области 2 существует единственное решение системы (6), (7), представляющее собой точки роста ф.р. $G_5: u, y_5, z_5$.

Докажем экстремальность семейства G_5. С ф.р. $G_5(x)$ связан многочлен $U_5(x)$, совпадающий с $g(x)$ в точке $x=u$ и касающийся $g(x)$ в точках $y=y_5$, $z=z_5$, $y_5<v<z_5$. Его старший коэффициент равен

$$a_5=\frac{g_1'(y_5)}{y_5-u}-\frac{g(y_5)-g(u)}{(y_5-u)^2}=-\frac{1}{(y_5-m)^2}.$$

Пусть $x\in(0,u)$. Тогда $\varphi_5(x)=-U_5(x)$. Многочлен $U_5(x)$ можно записать в виде

$$U_5(x)=g_1(y_5)+g_1'(y_5)(x-y_5)+a_5\frac{(x-y_5)^2}{2};$$

$$U_5'(x)=g_1'(y_5)+a_5(x-y_5);\to U_5'(x)>0, x\in(0,u).$$

Из $U_5(u)=0$ и $U_5'(x)>0, x\in(0,u)$ следует $U_5(x)\le 0\leftrightarrow\varphi_5(x)\ge 0, x\in(0,u)$.

В интервале $x\in(u,v)$ выполняются следующие неравенства:

$$\varphi_5''(u)<0,\ \varphi_5''(v)>0,\ \varphi_5''(y_5)>0,\ \varphi_5'''(x)>0$$

(это можно проверить непосредственным вычислением). Поэтому доказательство $\varphi_5(x)\ge 0, x\in(u,v)$, повторяет доказательство $\varphi_1(x)\ge 0, x\in(u,v)$.

При $x>v$ для $\varphi_5(x)=g_2(x)-U_5(x)$ справедливо

$$\{\varphi_5(z_5)=\varphi_5'(z_5)=0,\ \varphi_5''(x)=g_2''(x)-2a_5>0, x>v\}\to\varphi_5(x)\ge 0,\ \ x>v.$$

Объединив все части доказательства, получим $\varphi_5(x) \geq 0, x \geq 0$, что и доказывает экстремальность ф.р. $G_5(x)$ в области 2 (согласно теореме 1).

3. Доказательство экстремальности семейства ф.р. $G_1^*(x)$ с точками роста $u, B(u), v < B(u)$ аналогично доказательству экстремальности семейства $G_1(x)$.

Заметим, что в данной задаче экстремальными семействами ф.р. могут быть только ф.р., указанные в областях 1–3. Действительно, основываясь на исследованиях в [5–8], рассмотрим, какие могут быть переходы от ф.р. G_1, G_5, G_1^*. От ф.р. G_1, где $B(u) < v$, невозможно перейти к ф.р. G_2, так как из непосредственной проверки неравенства $L(u, B(u)) > 0$ следует, что оно выполняется для всех возможных значений параметров. Также от ф.р. G_1 невозможно перейти к ф.р. G_4, которая имеет точки роста $x_4 = u$, y_4 — корень уравнения $M(u, y, Q) = 0$, $z_4 = Q$, $F(Q+0) = 1$, поскольку в данном примере точки Q не существует. Остается единственный возможный переход от ф.р. G_1 к ф.р. G_5 при условии изменения знака $M(u, B(u), z_0)$ с – на + в окрестности точки u_1, $M(u_1, B(u_1), z_9) = 0$.

От ф.р. G_5 невозможно перейти к ф.р. G_2, так как $L(u, B(u)) > 0$ для всех значений параметров и, следовательно, ф.р. G_2 не существует. Также невозможен переход $G_5 \to G_4$, так как G_4 не существует. Кроме того, $L(u, y_5) > 0$ для всех значений параметров и поэтому невозможен переход $G_5 \to G_7$. Остается единственный возможный переход $G \to G_1^*$ при условии изменения знака $M(u, y_0, B(u))$ с – на +.

Таким образом, задачи (1) и (2) решены полностью для случая $m < u$.

Аналитическое решение задачи (1) представлено в табл. 1 (инфимум функционала $R(G)$, $G \in K$, в зависимости от параметров: $0 < s_1^2 < s_2$, $0 < m < u < s_1$).

Вероятности p_2, p_3 находятся из моментных условий

$$p_2 = \frac{-s_2 + s_1(u + z_5) - uz_5}{(y_5 - u)(z_5 - y_5)}, \quad p_3 = \frac{s_2 - s_1(u + y_5) + uy_5}{(z_5 - u)(z_5 - y_5)}.$$

Для иллюстрации результатов табл. 1 приведем численный пример нахождения инфимума функционала $R(G), G \in K$, в зависимости от параметров (табл. 2: исходные данные — $s_1 = 8, s_2 = 70, m = 2, v = 12, u < s_1$). Числа в средней колонке табл. 2 получены в результате вычислений на персональном компьютере по определенной программе. Числа для $x = u$ все точные, они задаются в первой колонке таблицы. Числа для y, z, p_1, p_2, p_3 имеют одну или две, или три точные цифры. Значения $B(u)$ вычислены по формуле (3) с необходимым количеством точных цифр.

Таблица 1

Эквивалентные разбиения области параметров $0 < u < s_1$	Точки роста экстремальной ф.р.	Инфимум функционала $R(G)$
Область 1: $m < u < u_1$ $M(u, B(u), z_0) < 0$	$u, B(u)$; $B(u) < v$	$\frac{s_1 - u}{B(u) - m}$
Область 2: $u_1 < u < u_2$ $M(u, B(u), z_0) > 0$, $M(u, y_0, B(u)) < 0$	u, y_5, z_5	$\frac{y_5 - u}{y_5 - m} p_2 + \frac{v - u}{z_5 - m} p_3$
Область 3: $u_2 < u < s_1$ $M(u, y_0, B(u)) > 0$	$u, B(u)$; $v < B(u)$	$\frac{(v - u)(s_1 - u)}{(B(u) - m)(B(u) - u)}$

Т а б л и ц а 2

Значения параметра u	Точки роста экстремальных ф.р. x, y, z и скачки в них $p_1, p_2\ p_3$	Значения $B(u)$
3	$x=3,\ y=9.19,\ z=9.25,$ $p_1=0.19,\ p_2=0.67,\ p_3=0.13$	$B(3)=9.2$
3.5	$x=3.5,\ y=9.31,\ z=9.34,$ $p_1=0.23,\ p_2=0.17,\ p_3=0.6$	$B(3.5)=9.33$
4	$x=4,\ y=9.5,\ z=9.516,$ $p_1=0.27,\ p_2=0.73,\ p_3=0.00$	$B(4)=9.5$
5.09	$x=5.09,\ y=9.92,\ z=10.06,$ $p_1=0.41,\ p_2=-0.00,\ p_3=0.59$	$B(5.09)=10.6$
5.1	$x=5.1,\ y=10.06,\ z_0=13.375,$ $p_1=0.42,\ p_2=0.58,\ p_3=0.00$	$B(5.1)=10.07$
6	$x=6.,\ y=9.94,\ z=13.4,$ $p_1=0.57,\ p_2=0.35,\ p_3=0.08$	$B(6)=11$
6.4	$x=6.4,\ y=9.87,\ z=13.4,$ $p_1=0.66,\ p_2=0.22,\ p_3=0.12$	$B(6.4)=11.75$
6.6	$x=6.6,\ y=9.84,\ z=13.42,$ $p_1=0.72,\ p_2=0.14,\ p_3=0.14$	$B(6.6)=12.28$
6.89	$x=6.89,\ y_0=9.75,\ z=13.47,$ $p_1=0.83,\ p_2=0.01,\ p_3=0.16$	$B(6.89)=13.4$
6.91	$x=6.91,\ y=13.5,\ z=13.56,$ $p_1=0.83,\ p_2=0.15,\ p_3=0.01$	$B(6.91)=13.5$
6.93	$x=6.93,\ y=13.55,\ z=13.62,$ $p_1=0.84,\ p_2=0.03,\ p_3=0.13$	$B(6.93)=13.6$
7	$x=7,\ y=13.94,\ z=14,$ $p_1=0.857,\ p_2=-0.00,\ p_3=0.143$	$B(7)=14$
7.4	$x=7.4,\ y=17.9,\ z=18.1,$ $p_1=0.94,\ p_2=0.03,\ p_3=0.03$	$B(7.4)=18$

Заметим, что при $3 \le u < u_1$, $u_1 = 5.1$ семейством экстремальных ф.р. является ф.р. $G_1(x)$ с точками роста u, $B(u)$, $B(u) < v$. В вычислениях имеем три точки роста, однако, легко заметить, что две из них очень близки между собой и близки к $B(u)$. Точно это же наблюдаем при $u: u_2 < u < 7{,}4$, $u_2 = 6.89$. Только здесь $B(u) > v$ и ф.р. есть $G_1^*(x)$. Для $u: u_1 \le u \le u_2$ экстремальным семейством ф.р. является ф.р. $G_5(x)$ с точками роста $x = u$, $y = y_5$, $z = z_5$. В табл. 2 $z_0 = 13.375$, $y_0 = 9.75$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стойкова Л.С. Точные верхние границы вероятности отказа системы в интервале времени при неполной информации о функции распределения // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 72–83.
2. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 551 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. — М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. — Т. 2. — 464 с.
4. Стойкова Л.С. О необходимых и достаточных условиях существования крайних распределений $F_5 - F_7$ в задаче получения обобщенных неравенств Чебышева // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 2. — С. 142–149.
5. Стойкова Л.С. Обобщенные неравенства Чебышева и их применение в математической теории надежности // Там же. — 2010. — № 3. — С. 139–143.
6. Коваленко И.Н., Стойкова Л.С. О некоторых экстремальных задачах теории надежности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1986. — № 6. — С. 19–23.
7. Стойкова Л.С., Сакович Г.Н. Точні верхні оцінки для функції розподілу в класі одновершинних розподілів з фіксованими моментами // Доп. АНУРСР. Сер. А. — 1988. — № 1. — С. 28–31.
8. Голодников А.Н., Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. Оценивание параметров надежности в условиях недостаточной информации // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 3. — С. 109–125.

Поступила 26.03.2014