УДК 517.95:519.86:539.3

В.А. СТОЯН, К.В. ДВИРНИЧУК

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ. II. УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ДИСКРЕТНО ЗАДАННОМ ЖЕЛАЕМОМ СОСТОЯНИИ[1]

Аннотация. Решены задачи управления трехмерным полем поперечных динамических смещений точек произвольной в плане толстой упругой плиты. Желаемое состояние плиты задано вектором линейных дифференциальных преобразований функции ее поперечных динамических смещений. Рассмотрены случаи, когда управление выполняется поверхностно распределенными усилиями, начально определенными и граничными воздействиями, выбранными во всех допустимых комбинациях. Исследованы вопросы точности и однозначности полученных решений.

Ключевые слова: управление, толстые упругие плиты, динамические системы, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой сформулированы проблемы исследования пространственной динамики упругих плит конечной толщины, а также поставлены задачи управления этой динамикой посредством поверхностно распределенных усилий и начально-краевых возмущающих факторов. Предполагается, что некоторые из этих внешнединамических управляющих факторов доступны для наблюдения и решение задачи по среднеквадратическому критерию согласуется с ними. В [1] решены задачи управления непрерывно наблюдаемыми плитами для вывода их состояния в окрестность заранее заданных значений, однако не решены задачи управления плитами, желаемое пространственно-временное состояние которых задано дискретно. Проблемы управления такими плитами при дискретно определенных начально-краевых наблюдениях за ними исследованы в настоящей работе.

Далее приведены решения задач построения одного, двух и одновременно трех из доступных для этого управляющих факторов: поверхностных внешнединамических нагрузок, начальных и краевых возмущающих факторов; даны оценки точности и однозначности полученных решений, а также исследована соответствующая им трехмерная картина поперечных смещений плиты. В основу исследования, как и в [1, 2], положена математическая модель [3] динамики толстых упругих плит и методика [4, 5] решения задач динамики распределенных пространственно-временных систем, сформулированных некорректно по количеству и качеству начально-краевых условий.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ДИСКРЕТНО НАБЛЮДАЕМЫХ ТОЛСТЫХ УПРУГИХ ПЛИТ

Исследуем динамику определенной в [1, 2] упругой плиты, которая плоскостями $z=\pm h$ декартовой системы координат x, y, z вырезана из упругого цилиндра $\Gamma(x, y)$. Как и в [1, 2], будем полагать, что временная координата $t \in [0, T]$, а граничные поверхности плиты находятся под воздействием нормальных $q_1^{\pm}(x, y, t)$ и касательных $q_2^{\pm}(x, y, t)$ к ним динамических усилий.

Будем исходить из того, что трехмерная функция $w(x, y, z, t)$ смещений точек плиты удовлетворяет соотношениям [3]

$$Q^{(l)}(\partial_x, \partial_y, \partial_t) w_k^{(l)}(x, y, z, t) = d_k^{(l)}(\partial_x, \partial_y, z, \partial_t) q_k^{(l)}(x, y, t) \ (k, l = \overline{1, 2}), \quad (1)$$

[1]Окончание. Начало в № 3, 2014.

где

$$Q^{(1)}(\partial_x,\ \partial_y, \partial_t) =$$

$$= (\Delta + D_2^2)((\lambda + 2\mu)D_1^2 - \lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 4\mu\Delta D_1^2 \frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2),$$

$$Q^{(2)}(\partial_x,\ \partial_y, \partial_t) =$$

$$= (\Delta + D_2^2)(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(hD_2) + 4\mu\Delta D_2^2 \cos(hD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2},$$

$$d_1^{(1)}(\partial_x, \partial_y,\ z, \partial_t) = D_1^2\left[(\Delta + D_2^2)\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2} - 2\Delta\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\frac{\sin(zD_2)}{D_2}\right],$$

$$d_2^{(1)}(\partial_x,\ \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= 2d\left[\frac{1}{\mu}((\lambda + 2\mu)D_1^2 - \lambda\Delta)\cos(hD_1)\frac{\sin(zD_2)}{D_2} - 2D_1^2\frac{\sin(zD_1)}{D_1}\cos(hD_2)\right],$$

$$d_1^{(2)}(\partial_x, \partial_y,\ z, \partial_t) = (\Delta + D_2^2)\cos(zD_1)\cos(hD_2) - 2\Delta\cos(hD_1)\cos(zD_2),$$

$$d_2^{(2)}(\partial_x,\ \partial_y, z, \partial_t) =$$

$$= 2d\left[2D_2^2\cos(zD_1)\frac{\sin(hD_2)}{D_2} + \frac{1}{\mu}(\lambda\Delta - (\lambda + 2\mu)D_1^2)\frac{\sin(hD_1)}{D_1}\cos(zD_2)\right]$$

при $w_k^{(l)}(x,\ y,\ z,\ t)$ $(k,\ l = \overline{1,2})$ таких, что $\sum\limits_{k,\ l=1}^{2} w_k^{(l)}(x,\ y,\ z,\ t) = w(x,\ y,\ z,\ t)$. Здесь λ и μ — константы Ляме, которыми характеризуются упругие свойства слоя;

$$q_1^{(1)}(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x,\ y,\ t) + q_1^-(x,\ y,\ t)),$$

$$q_2^{(1)}(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2}(q_2^+(x,\ y,\ t) - q_2^-(x,\ y,\ t)),$$

$$q_1^{(2)}(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2}(q_1^+(x,\ y,\ t) - q_1^-(x,\ y,\ t)),$$

$$q_2^{(2)}(x,\ y,\ t) = \frac{1}{2}(q_2^+(x,\ y,\ t) + q_2^-(x,\ y,\ t));$$

операторы d, Δ, Δ_m, D_m^2 $(m = \overline{1,2})$ соотношениями

$$d(u + v) = \partial_x u + \partial_y v,\ \ \Delta = d(\partial_x + \partial_y),$$

$$\Delta_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}\Delta + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\Delta_2,\ \ \Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2,\ \ D_m^2 = \Delta_m - \frac{1}{c_m^2}\partial_t^2\ \ (m = \overline{1,2})$$

определяются производными $\partial_x, \partial_y, \partial_t$ по пространственным координатам x, y и времени t от смещений $u(x,\ y,\ z,\ t)$, $v(x,\ y,\ z,\ t)$ точек слоя в направлении координатных осей Ox, Oy, удельной плотностью ρ материала слоя, скоростями $c_2 = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$, $c_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ распространения упругих волн расширения и сдвига; $Q^{(l)}(\partial_x,\ \partial_y, \partial_t)$ $(l = \overline{1,2})$ и $d_k^{(l)}(\partial_x,\ \partial_y, z, \partial_t)$ $(k,\ l = \overline{1,2})$ — операторы, дифференциальное содержание которых получим в результате разложения функций $\dfrac{\sin(zD_m)}{D_m}$, $\cos(zD_m)$ в ряды по степеням zD_m и возврата символам Δ, D_m^2 $(m=\overline{1,2})$ их дифференциального содержания.

Кроме того, будем считать, что функция $w(x, y, z, t)$ допускает следующие начально-краевые наблюдения за ней:

$$L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}} = W_{rj}^0 \quad (j=\overline{1, J_r},\ r=\overline{1, R_0}), \tag{2}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma} = W_{\rho j}^\Gamma \quad (j=\overline{1, J_\rho},\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}), \tag{3}$$

где $\sigma=(x, y, z)$, $s=(\sigma, t)$, $\Sigma_0\subseteq S_0$, $\Sigma_\Gamma\subseteq S_\Gamma^T=\Gamma(x, y)\times[-h, h]\times[0, T]$, S_0 — пространственная область плиты.

Остановимся на проблемах решения задач управления рассматриваемой плитой по достижении функцией $w(s)$ значений W_{ij} таких, что

$$W_{ij}=L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma} \quad (j=\overline{1, J_i},\ i=\overline{1, I}), \tag{4}$$

где $\Sigma\subseteq S_0^T=S_0\times[0, T]$. Управляющими факторами будем считать функции $q_k^\pm(\xi)$ $(k=\overline{1,2})$ (или, что эквивалентно, $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$), а также функции

$$W_r^0(\sigma)=L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma\in\Sigma_0}} \quad (r=\overline{1, R_0}), \tag{5}$$

$$W_\rho^\Gamma(s)=L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\big|_{s\in\Sigma_\Gamma} \quad (\rho=\overline{1, R_\Gamma}), \tag{6}$$

выбранные по одной, по две и три одновременно. Здесь и далее $\xi=(x, y, t)$, а $L_r^0(\partial_t)$ $(r=\overline{1, R_0})$, $L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$, $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{1, I})$ — заданные линейные дифференциальные операторы.

Соотношения (5), (6) будем считать определяющими для построения начально-краевых управляющих факторов $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ при $w(s)$, найденным согласно критерию

$$\Phi\to\min_{w(s)}, \tag{7}$$

при этом

$$\Phi=\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{j=1}^{J_r}\left(L_r^0(\partial_t)\,w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}}-W_{rj}^0\right)^2+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{j=1}^{J_\rho}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma}-W_{\rho j}^\Gamma\right)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\left(L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}-W_{ij}\right)^2 \tag{8}$$

(управляющими факторами являются функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ поверхностно распределенных динамических усилий);

$$\Phi=\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\sum_{j=1}^{J_\rho}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w(s)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma}-W_{\rho j}^\Gamma\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\left(L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}-W_{ij}\right)^2 \tag{9}$$

(управление выполняется функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ начальных внешнединамических возмущений совместно с функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ или без них);

$$\Phi=\sum_{r=1}^{R_0}\sum_{j=1}^{J_r}\left(L_r^0(\partial_t)w(s)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}}-W_{rj}^0\right)^2+\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\left(L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}-W_{ij}\right)^2 \tag{10}$$

(управление выполняется функциями $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ краевых внешнединамических возмущений совместно с функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ или без них);

$$\Phi=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\Big(L_i(\partial_s)w(s)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}-W_{ij}\Big)^2 \qquad (11)$$

(управляющими факторами являются функции $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ начально-краевых внешнединамических возмущений совместно с функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ или без них).

Учитывая, что на определенные согласно (1) смещения $w_k^{(l)}(s)$ $(k,l=\overline{1,2})$, кроме поверхностно распределенных динамических усилий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$, влияют и наблюдаемые согласно (2), (3) начально-краевые возмущающие факторы $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$, решение (1) представим в виде

$$w_k^{(l)}(s)=w_{\infty k}^{(l)}(s)+w_{0k}^{(l)}(s)+w_{\Gamma k}^{(l)}(s)\ \ (k,l=\overline{1,2}), \qquad (12)$$

где

$$w_{\infty k}^{(l)}(s)=\int_S G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)q_k^{(l)}(\xi')d\xi'\ \ (k,l=\overline{1,2}) \qquad (13)$$

при непрерывно определенных поверхностных возмущениях $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ $S=(S_0\cap(\{z=h\}\cup\{z=-h\}))\times[0,T]$ и

$$w_{\infty k}^{(l)}(s)=\sum_{m=1}^{M_k^{(l)}}G_k^{(l)}(\xi-\xi_{km}^{(l)},z)q_{km}^{(l)}\ \ (k,l=\overline{1,2}), \qquad (14)$$

если эти возмущения имеют дискретный характер и определены в точках $\xi_{km}^{(l)}\in\Xi_k=\Xi_k^+\cup\Xi_k^-$ $(m=\overline{1,M_k^{(l)}},\ k,l=\overline{1,2})$, а $\Xi_k^\pm=\{q_{km}^\pm\in S^\pm=(S_0\cap(z=\pm h))\times$ $\times[0,T],\ m=\overline{1,M_k^\pm}\}$, $M_k^{(l)}=M_k^++M_k^-$.

Считая, что составляющими $w_{0k}^{(l)}(s)$ и $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ $(k,l=\overline{1,2})$ описывается влияние начально-краевых воздействий (2), (3) на состояние плиты, определяем их (соответственно (13), (14)) соотношениями

$$w_{0k}^{(l)}(s)=\int_{S^0}G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)\,q_{0k}^{(l)}(\xi')d\xi',$$

$$w_{\Gamma k}^{(l)}(s)=\int_{S^\Gamma}G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi')d\xi'\ \ (k,l=\overline{1,2}) \qquad (15)$$

или

$$w_{0k}^{(l)}(s)=\sum_{m=1}^{M_{0k}^{(l)}}G_k^{(l)}(\xi-\xi_{km}^{0(l)},z)\,q_{0km}^{(l)},$$

$$w_{\Gamma k}^{(l)}(s)=\sum_{m=1}^{M_{\Gamma k}^{(l)}}G_k^{(l)}(\xi-\xi_{km}^{\Gamma(l)},z)\,q_{\Gamma km}^{(l)}\ \ (k,l=\overline{1,2}) \qquad (16)$$

при

$$\xi_{km}^{0(l)}\in\Xi_k^0=\Xi_k^{0+}\cup\Xi_k^{0-}\ \ (m=\overline{1,M_{0k}^{(l)}}),$$

$$\xi_{km}^{\Gamma(l)}\in\Xi_k^\Gamma=\Xi_k^{\Gamma+}\cup\Xi_k^{\Gamma-}\ \ (m=\overline{1,M_{\Gamma k}^{(l)}})\ (k,l=\overline{1,2}),$$

где

$$\Xi_k^{0\pm}=\{\xi_{km}^{0\pm}\in S^{0\pm}=(S_0\cap\{z=\pm h\})\times(-\infty,0],\ m=\overline{1,M_{0k}^\pm}\},$$

$$\Xi_k^{\Gamma\pm}=\{\xi_{km}^{\Gamma\pm}\in S^{\Gamma\pm}=((R^3\setminus S_0)\cap\{z=\pm h\})\times[0,T],\ m=\overline{1,\ M_{\Gamma k}^{\pm}}\},$$

а $M_{0k}^{(l)}=M_{0k}^{+}+M_{0k}^{-}$, $M_{\Gamma k}^{(l)}=M_{\Gamma k}^{+}+M_{\Gamma k}^{-}$, $S^0=S^{0+}\cup S^{0-}$, $S^{\Gamma}=S^{\Gamma+}\cup S^{\Gamma-}$.

Функции $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ или векторы

$$\bar{q}_{0k}^{(l)}=col(q_{0km}^{(l)},\ m=\overline{1,\ M_{0k}^{(l)}}),$$

$$\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}=col(q_{\Gamma km}^{(l)},\ m=\overline{1,\ M_{\Gamma k}^{(l)}})$$

их значений

$$q_{0km}^{(l)}=q_{0k}^{(l)}(\xi_{km}^{0(l)})\ \ (\xi_{km}^{0(l)}\in\Xi_k^0,\ m=\overline{1,\ M_{0k}^{(l)}}),$$

$$q_{\Gamma km}^{(l)}=q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi_{km}^{\Gamma(l)})\ \ (\xi_{km}^{\Gamma(l)}\in\Xi_k^{\Gamma},\ m=\overline{1,\ M_{\Gamma k}^{(l)}}),$$

как и функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,\ l=\overline{1,2})$ поверхностно определенных внешнединамических воздействий $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k=\overline{1,2})$, а также векторы $\bar{q}_k^{(l)}=col(q_{km}^{(l)}=q_k^{(l)}(\xi_{km}^{(l)})$, $m=\overline{1,\ M_k^{(l)}})$ $(k,\ l=\overline{1,2})$, если эти воздействия являются управляющими, определим согласно (7) или (что эквивалентно)

$$\Phi\to\min_{q(\xi)}, \qquad (17)$$

$$\Phi\to\min_{\bar{q}}, \qquad (18)$$

где

$$q(\xi)=col((((q_k^{(l)}(\xi),\ \xi\in S),\ (q_{0k}^{(l)}(\xi),\ \xi\in S^0),$$

$$(q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)\ \xi\in S^{\Gamma})),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}), \qquad (19)$$

$$\bar{q}=col(((\bar{q}_k^{(l)},\ \bar{q}_{0k}^{(l)},\ \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}). \qquad (20)$$

При решении задачи построения вектор-функции $q(\xi)$ или вектора $\bar{q}$ управляюще-моделирующих факторов $q_k^{(l)}(\xi)$, $\bar{q}_k^{(l)}$ и $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k,\ l=\overline{1,2})$, как и в [1, 2], будем исходить из следующего интегрального представления [6] математической модели (1):

$$w_k^{(l)}(s)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G_k^{(l)}(\xi-\xi',\ z)q_k^{(l)}(\xi')d\xi'\ \ (k,\ l=\overline{1,2}), \qquad (21)$$

где

$$G_k^{(l)}(\xi-\xi',\ z)=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d_k^{(l)}(p_1,\ p_2,\ z,\ q)}{Q^{(l)}(p_1,\ p_2,\ q)}e^{p_1(x-x')+p_2(y-y')+q(t-t')}dp_1dp_2dq$$

$$(k,\ l=\overline{1,2})$$

является аналогом функции Грина толстого упругого слоя, исследуемого на бесконечном временном интервале, методика практического построения которой базируется на теории интегральных вычетов [7] и детально описана в [8].

ДИНАМИКА ПЛИТ, УПРАВЛЯЕМЫХ ПОСРЕДСТВОМ ПОВЕРХНОСТНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим задачу определения поверхностно распределенных динамических усилий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,\ l=\overline{1,2})$, которые при заданных соотношениями (2), (3) внешнединамических возмущениях $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1,R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1,R_\Gamma})$ согласовали бы состояние $w(s)$ упругой плиты по среднеквадратическому критерию (7), (8) со значениями W_{ij} $(j=\overline{1,J_i}$, $i=\overline{1,I})$, заданными согласно (4).

Представляя функцию $w(s)$, удовлетворяющую [4, 5] уравнению (1), соотношениями (12), (13), (15), задачу построения функций управляющих поверхностных динамических воздействий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ сведем к задаче (17) при $q(\xi)$, определенном согласно (19). Для решения задачи (17), (19), (8) соотношения (12), (13), (15) подставим в (2)–(4). В результате задачу определения составляющих $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k,l=\overline{1,2})$ вектор-функции $q(\xi)$ сведем к решению системы линейных интегральных уравнений

$$\int\limits_{(\cdot)} A(\xi')q(\xi')d\xi' = \overline{W}, \tag{22}$$

в которой знаком $(\cdot)$ обозначено интегрирование по области изменения аргумента подынтегральной функции,

$$A(\xi)=str((((A_{k1}^{(l)}(\xi),\ \xi\in S),\ (A_{k2}^{(l)}(\xi),\ \xi\in S^0),$$

$$(A_{k3}^{(l)}(\xi),\ \xi\in S^\Gamma)),\ k=\overline{1,2}),\ l=\overline{1,2}),$$

$$A_{kn}^{(l)}(\xi)=col(A_{kin}^{(l)}(\xi),\ i=\overline{1,3})\ (n=\overline{1,3},k,l=\overline{1,2}), \tag{23}$$

$$\overline{W}=col(W,W^0,W^\Gamma), \tag{24}$$

при этом

$$W=col((W_{ij},\ j=\overline{1,J_i}),\ i=\overline{1,I}),$$

$$W^0=col((W_{rj}^0,\ j=\overline{1,J_r}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$W^\Gamma=col((W_{\rho j}^\Gamma,\ j=\overline{1,J_\rho}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$A_{k1n}^{(l)}(\xi')=col\Big(\Big(L_i(\partial_s)G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)\big|_{s=s_{ij}\in\Sigma},\ j=\overline{1,J_i}\Big),\ i=\overline{1,I}\Big),$$

$$A_{k2n}^{(l)}(\xi')=col\left(\left(L_r^0(\partial_t)G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}},\ j=\overline{1,J_r}\right),r=\overline{1,R_0}\right),$$

$$A_{k3n}^{(l)}(\xi')=col\left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G_k^{(l)}(\xi-\xi',z)\big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma},\ j=\overline{1,J_\rho}\right),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}\right)$$

$$(k,l=\overline{1,2},\ n=\overline{1,3}).$$

Решением (22) таким, что

$$\left\|\int\limits_{(\cdot)} A(\xi)q(\xi)d\xi-\overline{W}\right\|^2\to\min_{q(\xi)}, \tag{25}$$

будет [4, 5]

$$q(\xi)\in\Omega=\{q(\xi): q(\xi)=A^{\mathrm T}(\xi)P_1^+\overline{W}+v(\xi)-A^{\mathrm T}(\xi)P_1^+A_v\} \tag{26}$$

при произвольной интегрируемой в области изменения своих аргументов вектор-функции

$$v(\xi)=col((((v_k^{(l)}(\xi),\xi\in S),(v_{0k}^{(l)}(\xi),\xi\in S^0),(v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi),\xi\in S^\Gamma)),k=\overline{1,2}),l=\overline{1,2}),$$

при матрице P_1^+, псевдообратной к

$$P_1 = \sum_{k,\,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi)(A_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} d\xi + \int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi)(A_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{k3}^{(l)}(\xi)(A_{k3}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} d\xi \right)$$

и
$$A_v = \sum_{k,\,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi) v_k^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi) v_{0k}^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{k3}^{(l)}(\xi) v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) d\xi \right).$$

Заметим, что при Φ, определенном в (8):

$$\min_{w(s)} \Phi = \min_{q(\xi)} \left\| \int_{(\cdot)} A(\xi) q(\xi) d\xi - \overline{W} \right\|^2 = \overline{W}^{\mathrm T} \overline{W} - \overline{W}^{\mathrm T} P_1 P_1^+ \overline{W}, \tag{27}$$

а $v(\xi) \equiv 0$, если

$$\lim_{N \to \infty} \det[A^{\mathrm T}(\xi_i) A(\xi_j)]_{i,\,j=1}^{N} > 0. \tag{28}$$

Из (26) находим управляющие функции

$$q_k^{(l)}(\xi) \in \Omega_k^{(l)} = \{ q_k^{(l)}(\xi) : q_k^{(l)}(\xi) = (A_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} P_1^+ (\overline{W} - A_v) + v_k^{(l)}(\xi) \ \ \forall v_k^{(l)}(\xi) \}$$
$$(\xi \in S) \ \ (k,\, l = \overline{1,2}) \tag{29}$$

поверхностно распределенных динамических воздействий и функции

$$q_{0k}^{(l)}(\xi) \in \Omega_{0k}^{(l)} = \{ q_{0k}^{(l)}(\xi) : q_{0k}^{(l)}(\xi) = (A_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} P_1^+ (\overline{W} - A_v) + v_{0k}^{(l)}(\xi)$$
$$\forall v_{0k}^{(l)}(\xi) \} \ \ (\xi \in S^0),$$
$$q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) \in \Omega_{\Gamma k}^{(l)} = \{ q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) : q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) = (A_{k3}^{(l)}(\xi))^{\mathrm T} P_1^+ (\overline{W} - A_v) + v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$$
$$\forall v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) \} \ \ (\xi \in S^\Gamma) \ \ (k,\, l = \overline{1,2}),$$

согласно (17), (8) моделирующие начально-краевые динамические возмущения (2), (3).

Если управляющие динамические воздействия $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ по переводу рассматриваемой плиты в состояние, определенное согласно (4), представлены векторами $\overline{q}_k^{(l)} = col(q_{km}^{(l)},\, m = \overline{1,\, M_k^{(l)}})$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ значений $q_{km}^{(l)}$ $(m = \overline{1,\, M_k^{(l)}})$ функций $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ в точках $\xi_{km}^{(l)} \in \Xi_k$ $(m = \overline{1,\, M_k^{(l)}})$, то составляющие $w_{\infty k}^{(l)}(\xi)$, $w_{0k}^{(l)}(\xi)$ и $w_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ функций $w_k^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ состояния плиты выберем в виде (14), (16). В результате чего решение рассматриваемой задачи сведется к построению вектора $\overline{q}$ согласно критерию (18), (8). После подстановки (12), (14), (16) в (2)–(4) для определения компонент $\overline{q}_k^{(l)}$, $\overline{q}_{0k}^{(l)}$, $\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k,\, l = \overline{1,2})$ вектора $\overline{q}$ получим систему линейных алгебраических уравнений

$$B\overline{q} = \overline{W}, \tag{30}$$

в которой при определенном ранее векторе $\overline{W}$

$$B = str(((B_{k1}^{(l)},\ B_{k2}^{(l)},\ B_{k3}^{(l)}),\ k = \overline{1,2}),\ l = \overline{1,2}),$$
$$B_{kn}^{(l)} = col(B_{kin}^{(l)},\ i = \overline{1,3}) \ \ (n = \overline{1,3},\ k,\, l = \overline{1,2}), \tag{31}$$

при этом

$$B_{k1n}^{(l)} = col\left(\left(str\left((L_i(\partial_s)G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{n(l)}, z)\Big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}, m = \overline{1, M_{nk}^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_i}\right), i = \overline{1, I}\right),$$

$$B_{k2n}^{(l)} = col\left(\left(str\left(L_r^0(\partial_t)G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{n(l)}, z)\Big|_{\substack{t=0\\ \sigma=\sigma_j^0\in\Sigma_0}}, m = \overline{1, M_{nk}^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_r}\right), r = \overline{1, R_0}\right),$$

$$B_{k3n}^{(l)} =$$

$$= col\left(\left(str\left(L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)G_k^{(l)}(\xi - \xi_{km}^{n(l)}, z)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma}, m = \overline{1, M_{nk}^{(l)}}\right), j = \overline{1, J_\rho}\right), \rho = \overline{1, R_\Gamma}\right)$$

при $\xi_{km}^{1(l)} = \xi_{km}^{(l)}$, $\xi_{km}^{2(l)} = \xi_{km}^{0(l)}$, $\xi_{km}^{3(l)} = \xi_{km}^{\Gamma(l)}$, $M_{1k}^{(l)} = M_k^{(l)}$, $M_{2k}^{(l)} = M_{0k}^{(l)}$, $M_{3k}^{(l)} = M_{\Gamma k}^{(l)}$, $k, l = \overline{1,2}$, $n = \overline{1,3}$.

Решением (30) таким, что

$$\| B\bar{q} - \overline{W} \|^2 \to \min_{\bar{q}}, \tag{32}$$

будет [4, 5]

$$\bar{q} \in \Omega = \{\bar{q} : \bar{q} = B^{\mathrm{T}} P_2^+ \overline{W} + \bar{v} - B^{\mathrm{T}} P_2^+ B\bar{v}\} \tag{33}$$

при произвольном векторе

$$\bar{v} = col(((\bar{v}_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}}, \bar{v}_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}, \bar{v}_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

и $P_2 = BB^{\mathrm{T}}$. Откуда

$$\begin{aligned} &\bar{q}_k^{(l)} \in \Omega_k^{(l)} = \{\bar{q}_k^{(l)} : \bar{q}_k^{(l)} = (B_{k1}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ \overline{W} + \bar{v}_k^{(l)} - (B_{k1}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ B\bar{v}\}, \\ &\bar{q}_{0k}^{(l)} \in \Omega_{0k}^{(l)} = \{\bar{q}_{0k}^{(l)} : \bar{q}_{0k}^{(l)} = (B_{k2}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ \overline{W} + \bar{v}_{0k}^{(l)} - (B_{k2}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ B\bar{v}\}, \\ &\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} \in \Omega_{\Gamma k}^{(l)} = \{\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} : \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)} = (B_{k3}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ \overline{W} + \bar{v}_{\Gamma k}^{(l)} - (B_{k3}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^+ B\bar{v}\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Заметим, что при $w_k^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$, определенных согласно (12), (14), (16), и при Φ, определенном соотношением (8):

$$\min_{w(s)} \Phi = \min_{\bar{q}} \| B\bar{q} - \overline{W} \|^2 = \overline{W}^{\mathrm{T}} \overline{W} - \overline{W}^{\mathrm{T}} P_2 P_2^+ \overline{W}. \tag{35}$$

Решение (33) будет однозначным $(\bar{v} \equiv 0)$, если [5, 6]

$$\det B^{\mathrm{T}} B > 0. \tag{36}$$

Рассмотрим особенности решения задачи вывода исследуемой плиты в среднеквадратическую окрестность определенных согласно (4) значений W_{ij} $(j = \overline{1, J_i}, i = \overline{1, I})$ для случаев, когда управление динамикой плиты выполняется поверхностными динамическими нагрузками $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ в паре с начальными или краевыми возмущающими функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ и $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$. Заметим, что управляющие динамические воздействия $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ согласно (4) определяются функцией состояния $w(s)$. Аналитическое выражение последней получим из (12), (13), (15), если задача решается при непрерывно определенных управляюще-моделирующих факторах $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$, и из (12), (14), (16), если эти факторы определены дискретно.

Задачу нахождения вектор-функции $q(\xi)$ или вектора $\bar{q}$ значений определенных в ней управляюще-моделирующих факторов решим согласно (17) или (18) соответственно. Выражение функции Φ запишем в виде (9), если управление выполняется функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ совместно с начальными возмущениями (2), и в виде (10), если управляющими функциями являются $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ и $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$. Решение задач (17), (9) и (17), (10), как и ранее, сведется к среднеквадратическому обращению системы линейных интегральных уравнений (22), в которой теперь нет вектора W^0 и блоков $A_{k2n}^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2}, n=\overline{1,3})$ матричной функции $A(\xi)$, если управление выполняется функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$, $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$, а также вектора W^Γ вместе с блоками $A_{k3n}^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2}, n=\overline{1,3})$ матричной функции $A(\xi)$, если функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$, $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ управляющие. Аналогично для задач (18), (9) и (18), (10) нет вектора W^0 и блоков $B_{k2n}^{(l)}$ матрицы B, если управляющими являются $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2})$, $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$, и вектора W^Γ вместе с блоками $B_{k3n}^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2}, n=\overline{1,3})$ матрицы B при управлении векторами $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2})$ и функциями $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$. В случае совместного управления начально-краевыми возмущениями и функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$, определенными непрерывно (задача (17), (11)) или дискретно (задача (18), (11)), в матричной функции $A(\xi)$, матрице B и векторе $\bar{W}$ нет блоков $A_{k2n}^{(l)}(\xi)$, $A_{k3n}^{(l)}(\xi)$, $B_{k2n}^{(l)}$, $B_{k3n}^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2}, n=\overline{1,3})$, W^0, W^Γ.

При этом выражения для управляющих поверхностных динамических воздействий $q_k^{(l)}(\xi)$ или $\bar{q}_k^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2})$ будут определяться соотношениями (29), (34). Последние вместе с определенными ранее компонентами $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$, $\bar{q}_{0k}^{(l)}$, $\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k, l=\overline{1,2})$ вектор-функции $q(\xi)$ и вектора $\bar{q}$ моделирующих внешнединамических факторов посредством функции (12) соотношениями (2), (3) позволяют построить управления $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ соответственно.

Точность и однозначность решения рассматриваемых задач с учетом выбора функции Φ, а также описанных упрощений в определении матрицы B и матричной функции $A(\xi)$, как и ранее, будут определяться условиями (27), (28) и (35), (36) при непрерывно и дискретно заданных управляюще-моделирующих факторах соответственно.

ДИНАМИКА ПЛИТ, УПРАВЛЯЕМЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМИ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассмотрим решение проблемы управления описанной плитой при известных поверхностных динамических воздействиях $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k=\overline{1,2})$. В этом случае при решении задачи вывода функции $w(s)$ состояния плиты в среднеквадратическую окрестность значений W_{ij} $(j=\overline{1, J_i}$, $i=\overline{1, I})$, определенных согласно (4), имеются два внешнединамических возмущающих фактора: начальное возмущение плиты (2) и ее краевое состояние (3).

Выражения для управляющих функций $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ и $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$, как и ранее, определим из (2), (3) после подстановки в них функций

$w(s)$ смещений точек плиты, составляющие $w_{\infty k}^{(l)}(s)$ $(k,\, l=\overline{1,2})$ которой известны. Выражения для составляющих $w_{0k}^{(l)}(s)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ $(k,\, l=\overline{1,2})$ функций $w_k^{(l)}(s)$ $(k,\, l=\overline{1,2})$ запишем соотношениями (15) или (16) в зависимости от непрерывного или дискретного определения моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l=\overline{1,2})$.

Учитывая, что разрешающими для построения этих функций являются для непрерывного случая уравнения (22), а для дискретного случая — уравнения (30), рассмотрим структуру уравнений (22), (30) и определяемых ими вектор-функции $q(\xi)$ и вектора $\bar{q}$ для различных случаев начально-краевых управлений плитой, исходя из определений (19), (20) структуры вектор-функции $q(\xi)$, вектора $\bar{q}$, а также составляющих вектора $\overline{W}$, матричной функции $A(\xi)$ и матрицы B.

Управление начально-динамическими возмущающими функциями. При непрерывно определенных моделирующих функциях $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k,\, l=\overline{1,2})$ в разрешающей системе интегральных уравнений (22)

$$q(\xi)=col((((q_{0k}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^0),\, (q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^\Gamma)),\, k=\overline{1,2}),\, l=\overline{1,2}), \tag{37}$$

$$A(\xi)=str((((A_{k2}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^0),\, (A_{k3}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^\Gamma)),\, k=\overline{1,2}),\, l=\overline{1,2}),$$

$$A_{kn}^{(l)}(\xi)=col(A_{k1n}^{(l)}(\xi),\, A_{k3n}^{(l)}(\xi))\quad (n=\overline{2,3},\, k,\, l=\overline{1,2}),$$

$$\overline{W}=col(\widetilde{W},\, \widetilde{W}^\Gamma), \tag{38}$$

где

$$\widetilde{W}=col((\overline{W}_{ij},\, j=\overline{1,\, J_i}),\, i=\overline{1,\, I}),\quad \widetilde{W}^\Gamma=col((\overline{W}_{\rho j}^\Gamma,\, j=\overline{1,\, J_\rho}),\, \rho=\overline{1,\, R_\Gamma})$$

при

$$\overline{W}_{ij}=W_{ij}-L_i(\partial_t)w_\infty(s)\Big|_{s=s_{ij}\in\Sigma}\quad (j=\overline{1,\, J_i}\,,\ i=\overline{1,\, I}),$$

$$\overline{W}_{\rho j}^\Gamma=W_{\rho j}^\Gamma-L_\rho^\Gamma(\partial_\sigma)w_\infty(s)\Big|_{s=s_j^\Gamma\in\Sigma_\Gamma}\quad (j=\overline{1,\, J_\rho}\,,\ \rho=\overline{1,\, R_\Gamma})$$

и $w_\infty(s)=\sum\limits_{k,\, l=1}^{2} w_{\infty k}^{(l)}(s)$. Решением системы (22) является соотношение (26), в котором при произвольной вектор-функции

$$v(\xi)=col((((v_{0k}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^0),\, (v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi),\, \xi\in S^\Gamma)),\, k=\overline{1,2}),\, l=\overline{1,2}), \tag{39}$$

$$P_1=\sum_{k,\, l=1}^{2}\left(\int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi)(A_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}}d\xi+\int_{S^\Gamma} A_{k3}^{(l)}(\xi)(A_{k3}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}}d\xi\right),$$

$$A_v=\sum_{k,\, l=1}^{2}\left(\int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi)v_{0k}^{(l)}(\xi)d\xi+\int_{S^\Gamma} A_{k3}^{(l)}(\xi)v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)d\xi\right).$$

При дискретно определенных моделирующих функциях разрешающей системой будет система алгебраических уравнений (30), в которой

$$\bar{q}=col(((\bar{q}_{0k}^{(l)},\, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}),\, k=\overline{1,2}),\, l=\overline{1,2}), \tag{40}$$

$$B=str(((B_{k2}^{(l)},\, B_{k3}^{(l)}),\, k=\overline{1,2}),\, l=\overline{1,2}),$$

$$B_{kn}^{(l)} = col(B_{k1n}^{(l)}, B_{k3n}^{(l)}) \ (n = \overline{2,3},\, k,\, l = \overline{1,2}), \tag{41}$$

а вектор $\overline{W}$ определен согласно (38). Решением (30), найденным согласно (32), является соотношение (33), где

$$\overline{v} = col(((\overline{v}_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}, \overline{v}_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}) \tag{42}$$

есть произвольный вектор, а $P_2 = BB^{\mathrm{T}}$ при определенной согласно (41) матрице B.

Точность и однозначность решения рассмотренных задач с учетом приведенных изменений в определении вектора $\overline{W}$, матрицы B и матричной функции $A(\xi)$ следуют из соотношений (27), (28) и (35), (36) для каждой из них.

Управление краевыми возмущающими функциями. При непрерывно определенных моделирующих функциях $q_{0k}^{(l)}(\xi)$ и $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ в разрешающей системе уравнений (22)

$$A_{kn}^{(l)}(\xi) = col(A_{k1n}^{(l)}(\xi), A_{k2n}^{(l)}(\xi)) \ (n = \overline{2,3},\, k,\, l = \overline{1,2}),$$

$$\overline{W} = col(\widetilde{W}, \widetilde{W}^0), \tag{43}$$

где вектор-функция $q(\xi)$ определена согласно (37),

$$\widetilde{W}^0 = col((\overline{W}_{rj}^0,\, j = \overline{1, J_r}),\ r = \overline{1, R_0})$$

при

$$\overline{W}_{rj}^0 = W_{rj}^0 - L_r^0(\partial_t) w_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ \sigma=\sigma_j^0 \in \Sigma_0}} \qquad (j = \overline{1, J_r}\,,\ r = \overline{1, R}).$$

Решением задачи (22), (25) является соотношение (26) при определенной согласно (39) произвольной интегрируемой в области изменения своих аргументов вектор-функции $v(\xi)$, матрице P_1 и векторе A_v, записанных с учетом изменений (43) в матричной функции $A(\xi)$.

В дискретном случае разрешающей относительно вектора $\overline{q}$, определенного согласно (40), будет система (30), в которой $B_{kn}^{(l)} = col(B_{k1n}^{(l)}, B_{k2n}^{(l)})$ $(n = \overline{2,3},\, k,\, l = \overline{1,2})$ при определенном согласно (43) векторе $\overline{W}$. Решением (30), найденным согласно (32), есть вектор (33), в котором $\overline{v}$ понимается в смысле (42). В рамках приведенных обозначений неизменными являются выражения (27), (28) и (35), (36) для определения точности и однозначности рассмотренных задач.

Одновременное управление начальными и краевыми внешнединамическими возмущениями. В этом случае разрешающие уравнения (22) и (30) еще больше упростятся. Для непрерывно рассматриваемых моделирующих функций $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ в системе интегральных уравнений (22) при определенной согласно (37) вектор-функции $q(\xi)$:

$$A(\xi) = str((((A_{k12}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0), (A_{k13}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma})), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),\ \overline{W} = \widetilde{W}.$$

Решением (22), найденным согласно (25), есть вектор-функция (26), в которой при произвольно определенной, интегрируемой в области изменения своих аргументов вектор-функции (39)

$$P_1 = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi)(A_{k12}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi + \int_{S^{\Gamma}} A_{k13}^{(l)}(\xi)(A_{k13}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right),$$

$$A_v = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi) v_{0k}^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^{\Gamma}} A_{k13}^{(l)}(\xi) v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) d\xi \right).$$

Для случая дискретных моделирующих функций в уравнении (30) $B = str(((B_{k12}^{(l)}, B_{k13}^{(l)}), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2})$, $\overline{W} = \widetilde{W}$, а вектор $\overline{q}$ определен согласно (40). Решением задачи (30), (32) является вектор (33), записанный с учетом приведенных изменений в матрице B и векторах $\overline{q}$, $\overline{W}$.

Как и ранее, определяющими для оценки точности и однозначности решения будут соотношения (27), (28) и (35), (36), записанные с учетом приведенных упрощений.

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ НЕОГРАНИЧЕННЫХ В ПЛАНЕ УПРУГИХ ПЛИТ

Представим постановку и решение задач управления описанной плитой для случая, когда краевыми возмущающими факторами можно пренебречь и динамику плиты рассматривать без краевых условий (3). Тогда при определенных в (13)–(16) функциях $w_{\infty k}^{(l)}(s)$, $w_{0k}^{(l)}(s)$ $(k, l=\overline{1,2})$

$$w_k^{(l)}(s) = w_{\infty k}^{(l)}(s) + w_{0k}^{(l)}(s) \ (k, l=\overline{1,2}),$$

и решение задачи управления динамикой плиты по достижении функцией $w(s)$ заданных в (4) значений W_{ij} $(j=\overline{1, J_i}, \ i=\overline{1, I})$ сведется к построению вектор-функции (непрерывной управляюще-моделирующей функции)

$$q(\xi) = col((((q_k^{(l)}(\xi), \xi \in S), (q_{0k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2})$$

и вектора (дискретной управляюще-моделирующей функции)

$$\overline{q} = col(((\overline{q}_k^{(l)}, \overline{q}_{0k}^{(l)}), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2}),$$

если функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ задействованы в управлении. В случае известных внешнединамических усилий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ вектор-функция $q(\xi)$ и вектор $\overline{q}$ имеют вид:

$$q(\xi) = col(((q_{0k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2}),$$

$$\overline{q} = col((\overline{q}_{0k}^{(l)}, k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2}).$$

Определенные таким образом вектор-функцию $q(\xi)$ и вектор $\overline{q}$, как и ранее, найдем согласно (17), (18) при Φ, записанном соотношением (10), если управляющими факторами есть функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$, и соотношением (11), если управление выполняется функциями начальных возмущений $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$ совместно с поверхностно распределенными возмущениями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l=\overline{1,2})$ или без них.

Разрешающими для построения вектор-функции $q(\xi)$ и вектора $\overline{q}$, как и ранее, являются линейные интегральные уравнения (22) и линейные алгебраические уравнения (30). При управлении поверхностными внешнединамическими нагрузками с известными начально определенными возмущениями $W_r^0(\sigma)$ $(r=\overline{1, R_0})$

$$A(\xi) = str((((A_{k1}^{(l)}(\xi), \xi \in S), (A_{k2}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0)), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2}),$$

$$A_{kn}^{(l)}(\xi) = col(A_{k1n}^{(l)}(\xi), A_{k2n}^{(l)}(\xi)) \ (n=\overline{1,2}, k, l=\overline{1,2}),$$

$$B = str(((B_{k1}^{(l)}, B_{k2}^{(l)}), k=\overline{1,2}), l=\overline{1,2}),$$

$$B_{kn}^{(l)} = col(B_{k1n}^{(l)}, B_{k2n}^{(l)}) \ (n=\overline{1,2}, k, l=\overline{1,2}), \ \overline{W} = col(W, W^0).$$

Компоненты вектор-функции $q(\xi)$ и вектора $\bar{q}$, найденные как решение задач (22), (30), определятся соотношениями (26), (33), где при произвольных

$$v(\xi) = col((((v_k^{(l)}(\xi), \xi \in S), (v_{0k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0)), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$\bar{v} = col(((\bar{v}_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}}, \bar{v}_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}), \tag{44}$$

$$P_1 = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi)(A_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi + \int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi)(A_{k2}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right),$$

$$A_v = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi) v_k^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^0} A_{k2}^{(l)}(\xi) v_{0k}^{(l)}(\xi) d\xi \right)$$

в решении (26) и $P_2 = BB^{\mathrm{T}}$ в (33). С учетом внесенных изменений точность и однозначность полученных решений определим выражениями (27), (28) и (35), (36).

При управлении поверхностными динамическими усилиями $q_k^{\pm}$ $(k = \overline{1,2})$ совместно с начальными возмущениями, которые определены согласно (2)

$$A(\xi) = str((((A_{k11}^{(l)}(\xi), \xi \in S), (A_{k12}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0)), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

в (22),

$$B = str(((B_{k11}^{(l)}, B_{k12}^{(l)}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

в (30) и $\overline{W} = W$ в (22), (30). Решением задач (22), (30) являются соотношения (26), (33) при

$$P_1 = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_S A_{k11}^{(l)}(\xi)(A_{k11}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi + \int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi)(A_{k12}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right),$$

$$A_v = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_S A_{k11}^{(l)}(\xi) v_k^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi) v_{0k}^{(l)}(\xi) d\xi \right)$$

для системы (22),

$$P_2 = \sum_{k,\, l=1}^{2} (B_{k11}^{(l)}(B_{k11}^{(l)})^{\mathrm{T}} + B_{k12}^{(l)}(B_{k12}^{(l)})^{\mathrm{T}})$$

для системы (30) и произвольных вектор-функции $v(\xi)$ и векторе $\bar{v}$, определенных согласно (44). Точность и однозначность решения рассматриваемой задачи определятся соотношениями (27), (28) и (35), (36) с учетом принятых здесь обозначений вектора $\overline{W}$, матрицы B и матричной функции $A(\xi)$.

В случае управления начально определенными возмущениями при заданных поверхностных нагрузках $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ управляющие функции $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ получим из (2) после подстановки туда функции

$$w(s) = \sum_{k,\, l=1}^{2} (w_{\infty k}^{(l)} + w_{0k}^{(l)}),$$

в которой $w_{\infty k}^{(l)}(s)$ определена соотношением (13), а $w_{0k}^{(l)}(s)$ — соотношениями (15), (16), где

$$q_{0k}^{(l)}(\xi) = (A_{k12}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} P_1^{+} (\overline{W} - A_v) + v_{0k}^{(l)}(\xi) \;\; \forall (v_{0k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0) \;\; (k, l = \overline{1,2}),$$

$$\bar{q}_{0k}^{(l)} = (B_{k12}^{(l)})^{\mathrm{T}} P_2^{+} (\overline{W} - B\bar{v}) + \bar{v}_{0k}^{(l)} \quad \forall \bar{v} = col((\bar{v}_{0k}^{(l)} \in R^{M_{0k}^{(l)}}, k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

при

$$\overline{W} = \widetilde{W}, \; A(\xi) = str(((A_{k12}^{(l)}(\xi), \xi \in S^0), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$P_1 = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi)(A_{k12}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right), \; A_v = \sum_{k,\, l=1}^{2} \left(\int_{S^0} A_{k12}^{(l)}(\xi) v_{0k}^{(l)}(\xi) d\xi \right),$$

$$B = str((B_{k12}^{(l)}, k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}), \; P_2 = \sum_{k,\, l=1}^{2} B_{k12}^{(l)} (B_{k12}^{(l)})^{\mathrm{T}}.$$

Здесь, как и ранее,

$$\min_{w(s)} \left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2 \right) =$$

$$= \min_{q_{0k}^{(l)}(\xi)(k,\, l=\overline{1,2})} \left\| \int_{(\cdot)} A(\xi) q(\xi) d\xi - \widetilde{W} \right\|^2 = \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W} - \widetilde{W}^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{+} \widetilde{W},$$

$$\min_{w(s)} \left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2 \right) = \min_{\bar{q}_{0k}^{(l)}(k,\, l=\overline{1,2})} \| B\bar{q} - \widetilde{W} \|^2 = \widetilde{W}^{\mathrm{T}} \widetilde{W} - \widetilde{W}^{\mathrm{T}} P_2 P_2^{+} \widetilde{W},$$

а $v_{0k}^{(l)}(\xi) \equiv 0 \; (k, l = \overline{1,2})$, $\bar{v} \equiv 0$, если $\lim\limits_{N \to \infty} \det[A^{\mathrm{T}}(\xi_i) A(\xi_j)]_{i,\, j=1}^{N} > 0$ и $\det B^{\mathrm{T}} B > 0$ соответственно.

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПЛИТ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ВО ВРЕМЕНИ РЕЖИМЕ

При исследовании динамики плит, начальное состояние которых мало влияет на их последующее состояние, функциями $W_r^0(\sigma)$ $(r = \overline{1, R_0})$ можно пренебречь и таким образом задачу управления рассматривать без условия (2). В этом случае $w_k^{(l)}(s) = w_{\infty k}^{(l)}(s) + w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$, где $w_{\infty k}^{(l)}(s)$, $w_{\Gamma k}^{(l)}(s)$ $(k, l = \overline{1,2})$ определяются соотношениями (13), (15) и (14), (16) при решении задачи управления в непрерывной и дискретной постановках соответственно.

Последнее означает, что решение задач управления динамикой плит в установившемся во времени режиме сведется к построению вектор-функций

$$q(\xi) = col((((q_k^{(l)}(\xi), \xi \in S), (q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma})), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

или вектора $\bar{q} = col(((\bar{q}_k^{(l)}, \bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$ их значений, если функции $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ рассматриваются как управляющие. В случае известных поверхностно распределенных динамических усилий $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ неизвестными будут вектор-функция $q(\xi) = col(((q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$ и вектор $\bar{q} = col((\bar{q}_{\Gamma k}^{(l)}, k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$.

Критерии определения этих характеристик получим из (17), (18) при функции Φ, заданной согласно (9), если краевые возмущения (3) известны, и согласно (11), если краевые возмущения являются управляющими.

Решения задач (17), (9) и (18), (9), как и ранее, сведется к среднеквадратическому обращению систем (22), (30), в которых

$$\overline{W} = col(W, W^{\Gamma}),$$

$$A(\xi) = str((((A_{k1}^{(l)}(\xi), \xi \in S), (A_{k3}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma})), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$A_{kn}^{(l)}(\xi) = col(A_{k1n}^{(l)}(\xi), A_{k3n}^{(l)}(\xi)) \ (n = 1, 3, k, l = \overline{1,2}),$$

$$B = str(((B_{k1}^{(l)}, B_{k3}^{(l)}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$B_{kn}^{(l)} = col(B_{k1n}^{(l)}, B_{k3n}^{(l)}) \ (n = 1, 3, k, l = \overline{1,2})$$

при управлении плитой посредством поверхностно определенных внешнединамических воздействий. Для случая, когда краевые возмущения $W_{\rho}^{\Gamma}(s) \, (\rho = \overline{1, R_{\Gamma}})$ являются управляющими

$$A(\xi) = str((((A_{k11}^{(l)}(\xi), \xi \in S), (A_{k13}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma})), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$B = str(((B_{k11}^{(l)}, B_{k13}^{(l)}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}), \ \overline{W} = W,$$

если функции $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ участвуют в управлении, а также

$$A(\xi) = str(((A_{k13}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$B = str(str(B_{k13}^{(l)}, k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}), \ \overline{W} = \widetilde{W},$$

если поверхностные нагрузки $q_k^{\pm}(\xi)$ $(k = \overline{1,2})$ известны.

Из уравнений (22), (30), разрешающих описанные задачи, в рамках принятых определений вектора $\overline{W}$, матрицы B и матричной функции $A(\xi)$ с точностями

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)} \left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2 \right) =$$

$$= \min_{q(\xi)} \left\| \int A(\xi) \overline{q}(\xi) d\xi - \overline{W} \right\|^2 = \overline{W}^{\mathrm{T}} \overline{W} - \overline{W}^{\mathrm{T}} P_1 P_1^{+} \overline{W},$$

$$\varepsilon^2 = \min_{w(s)} \left(\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \left(L_i(\partial_s) w(s)\big|_{s=s_{ij} \in \Sigma} - W_{ij} \right)^2 \right) =$$

$$= \min_{\overline{q}} \| B\overline{q} - \overline{W} \|^2 = \overline{W}^{\mathrm{T}} \overline{W} - \overline{W}^{\mathrm{T}} P_2 P_2^{+} \overline{W}$$

желаемое состояние (4) будет достигнуто при $q(\xi)$, $\overline{q}$, определенных согласно (26), (33), в которых

$$v(\xi) = col((((v_k^{(l)}(\xi), \xi \in S), (v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^{\Gamma})), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$\overline{v} = col(((\overline{v}_k^{(l)} \in R^{M_k^{(l)}}, \overline{v}_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2})$$

являются произвольными вектор-функциями и вектором;

$$P_1 = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi)(A_{k1}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi + \int_{S^{\Gamma}} A_{k3}^{(l)}(\xi)(A_{k3}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right),$$

$$A_v = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k1}^{(l)}(\xi) v_k^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^{\Gamma}} A_{k3}^{(l)}(\xi) v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) d\xi \right), \ P_2 = BB^{\mathrm{T}}$$

(управляющими есть поверхностные нагрузки $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$);

$$P_1 = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k11}^{(l)}(\xi)(A_{k11}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{k13}^{(l)}(\xi)(A_{k13}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right),$$

$$A_v = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_S A_{k11}^{(l)}(\xi) v_k^{(l)}(\xi) d\xi + \int_{S^\Gamma} A_{k13}^{(l)}(\xi) v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) d\xi \right),$$

$$P_2 = \sum_{k,l=1}^{2} (B_{k11}^{(l)}(B_{k11}^{(l)})^{\mathrm{T}} + B_{k13}^{(l)}(B_{k13}^{(l)})^{\mathrm{T}})$$

(управление выполняется функциями $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$ совместно с начально определенными возмущениями $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$). В случае управления функциями $W_\rho^\Gamma(s)$ $(\rho = \overline{1, R_\Gamma})$ при известных $q_k^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$

$$v(\xi) = col(((v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi), \xi \in S^\Gamma), k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$\bar{v} = col((\bar{v}_{\Gamma k}^{(l)} \in R^{M_{\Gamma k}^{(l)}}, k = \overline{1,2}), l = \overline{1,2}),$$

$$P_1 = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_{S^\Gamma} A_{k13}^{(l)}(\xi)(A_{k13}^{(l)}(\xi))^{\mathrm{T}} d\xi \right), \quad A_v = \sum_{k,l=1}^{2} \left(\int_{S^\Gamma} A_{k13}^{(l)}(\xi) v_{\Gamma k}^{(l)}(\xi) d\xi \right),$$

$$P_2 = \sum_{k,l=1}^{2} B_{k13}^{(l)}(B_{k13}^{(l)})^{\mathrm{T}}.$$

Однозначность полученных решений определяется, как и ранее, соотношениями (28), (36) с учетом описанных в них упрощений.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ УПРУГОЙ ПЛИТОЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫМ СОСТОЯНИЕМ

Особенность постановок рассмотренных задач заключается в том, что начальные и краевые внешнединамические возмущения считаются наблюдаемыми (если они не являются управляющими) согласно (2), (3). Задачи решались при произвольном, даже не согласованном со структурой дифференциального оператора $Q^{(l)}(\cdot)$ количестве R_0 и R_Γ таких наблюдений. Рассмотрим особенность решения описанных задач для случая, когда имеющиеся начально-краевые возмущения ненаблюдаемые, т.е. когда $R_0 = 0$ или $R_\Gamma = 0$.

Отсутствие наблюдений за начальным состоянием плиты ($R_0 = 0$) приводит к отсутствию подвектора W^0 в определении вектора $\overline{W}$, а также блоков $A_{k2n}^{(l)}(\xi)$, $B_{k2n}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2};\ n = \overline{1,3})$ в матричной функции $A(\xi)$ и матрице B.

При управлении плитами с ненаблюдаемыми краевыми условиями ($R_\Gamma = 0$) в определение вектора $\overline{W}$ не будет входить подвектор W^Γ, а в матричную функцию $A(\xi)$ и матрицу B — блоки $A_{k3n}^{(l)}(\xi)$, $B_{k3n}^{(l)}$ $(k, l = \overline{1,2};\ n = \overline{1,3})$ ему соответствующие.

Приведенные ранее для вектора $\overline{W}$, матрицы B и матричной функции $A(\xi)$ математические результаты построения управляюще-моделирующих функций $q_k^{(l)}(\xi)$, $q_{0k}^{(l)}(\xi)$, $q_{\Gamma k}^{(l)}(\xi)$ $(k, l = \overline{1,2})$, определенных непрерывно или дискретно, будут неизмененными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья завершает серию публикаций [1, 2], в которых глубоко и всесторонне изучена динамика сложных механических объектов — толстых упругих плит конечных размеров с произвольной геометрией границы, ограничивающей тело плиты. Трехмерное поле поперечных динамических смещений таких плит исследовано как в прямой постановке [2], так и с точки зрения управления им. Математическая модель динамики, положенная в основу проведенных исследований, представлена двухмерными линейными дифференциальными уравнениями, параметрически зависимыми от вырожденной координаты плиты. Интегральное представление [6] решения этих уравнений и предложенная методика [4, 5] математического моделирования начально-краевых возмущающих факторов (не зависимая от их количества и качества) позволили построить [2] трехмерное поле динамических смещений плиты, согласованное по среднеквадратическому критерию с начально-краевыми наблюдениями за состоянием плиты. Согласно этому критерию решены также задачи управления динамикой упругой плиты по достижении функцией поперечных динамических смещений значений, заданных непрерывно [1] и дискретно. Рассмотрен широкий спектр управляющих факторов: поверхностно распределенные внешнединамические нагрузки, начальные и краевые возмущающие факторы, действующие по одному, по два и три одновременно. Частным случаем решенных задач есть задачи управления плитами неограниченными в плане, функционирующими в установившемся во времени режиме, а также плитами с ненаблюдаемым начальным, краевым и начально-краевым состояниями. Решения задач получены в аналитическом виде, численно-компьютерная реализация которого не представляет особых проблем. Аналитически исследованы также вопросы точности и однозначности построенных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании задач управления динамикой толстых упругих плит. I. Управление при непрерывно заданном желаемом состоянии // Кибернетика и системный анализ. — 2014. — № 3. — С. 79–96.
2. Стоян В.А., Двирничук К.В. О математическом моделировании трехмерного поля поперечных динамических смещений толстых упругих плит // Там же. — 2013. — № 6. — С. 58–72.
3. Стоян В.А., Двирничук К.В. К построению дифференциальной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 4. — С. 74–83.
4. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. — К.: Наук. думка, 2002. — 361 с.
5. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2011. — 310 с.
6. Стоян В.А., Двирничук К.В. Об интегральной модели поперечных динамических смещений толстого упругого слоя // Проблемы управления и информатики. — 2013. — № 1. — С. 70–82.
7. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Теорія функцій комплексної змінної. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2009. — 495 с.
8. Стоян В.А., Двірничук К.В. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей // Доп. НАН України. — 2012. — № 9. — С. 36–43.

Поступила 10.04.2013