И.В. СЕРГИЕНКО, В.С. ДЕЙНЕКА

УДК 519.6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ–КОНСОЛИДАЦИИ ВЛАГОНАСЫЩЕННЫХ МИКРОПОРИСТЫХ СРЕД

Аннотация. Получена слабая задача разномасштабной модели фильтрации–консолидации влагонасыщенных микропористых сред. Предложены вычислительные алгоритмы ее дискретизации. Получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации параметров модели градиентными методами.

Ключевые слова: разномасштабная математическая модель, численное решение, градиентные методы идентификации параметров.

Математическое моделирование процессов экстрагирования жидкой составляющей из биоматериалов в перерабатывающей, химической индустрии, фармакологии и других отраслях часто сводится к решению неклассических (разномасштабных) математических задач в частных производных. Одна из таких математических нелинейных моделей представлена в работе [1], где с помощью метода разложения по параметру нелинейная задача сведена к решению серии линейных разномасштабных математических задач в частных производных.

В настоящей статье для линейных неклассических разномасштабных математических задач в частных производных получены соответствующие обобщенные (слабые) задачи, предложены численные методы их дискретизации, сформулированы задачи идентификации параметров математических моделей и на основе результатов теории оптимального управления состояниями распределенных систем [2] получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами различных параметров модели.

ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ И ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ ЕЕ ПОСТАНОВКА

В работе [1] представлена нелинейная математическая модель сложного процесса фильтрационной консолидации во влагонасыщенных микропористых средах, где рассматриваемый процесс описывается следующей начально-краевой задачей.

Имеем уравнения состояния

$$\frac{\partial p_1(t,z)}{\partial t}=G_1(p_1)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu r_1(p_1)}\frac{\partial p_1}{\partial z}\right)+\beta_2\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)\,dx\,,$$
$$\frac{\partial p_2(t,x,z)}{\partial t}=G_2(p_2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu r_2(p_2)}\frac{\partial p_2}{\partial z}\right),\quad t\in(0,T],\ \ x\in(0,R),\ \ z\in(0,h)\,, \tag{1}$$

где p_1 — давление в макропорах, p_2 — давление в микрочастицах; G_i, r_i — модуль сжимаемости и коэффициент сопротивления соответственно для макропор $(i=1)$ и микрочастиц $(i=2)$; μ — коэффициент динамической вязкости.

Начальные условия

$$p_1(t,z)|_{t=0}=p_{E_1}(z),\quad p_2(t,x,z)|_{t=0}=p_{E_2}(x,z),\ z\in(0,h),\ x\in(0,R) \qquad (2)$$

(в частности, может быть принято $p_{E_2}(x,z)=p_{E_1}(z)=p_E(z)$).

Краевые условия

$$p_1(t,z)|_{z=0}=p_{S_t}(t),\qquad \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0\,, \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0\,,\qquad p_2(t,x,z)|_{x=R}=p_1(t,z)\,, \qquad (3')$$

где второе равенство в (3′) — условие равновесия на поверхности микрочастицы.

В работе [1] представлена процедура линеаризации начально-краевой задачи (1)–(3), (3′), нулевое приближение $p_1^0(t,z)$, $p_2^0(t,x,z)$ решения которой определяется как решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial p_1(t,z)}{\partial t}=b_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}-\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)\,dx,\quad z\in(0,h),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=b_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}\,,\quad x\in(0,R),\ z\in(0,h),\quad t\in(0,T]\,,$$

$$p_1(t,z)|_{t=0}=p_E(z),\ p_2|_{t=0}=p_E(z),$$

$$p_1(t,z)|_{z=0}=0,\quad \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad p_2|_{x=R}=p_1(t,z)\,, \qquad (4)$$

где $p_1(t,z)=p_1^0(t,z)$; $p_2(t,x,z)=p_2^0(t,x,z)$; b_1, b_2, $\beta=\mathrm{const}>0$, а все последующие приближения решения начально-краевой задачи (1)–(3), (3′) определяются как решения задач вида

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=b_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}+f_1(t,z),\quad z\in(0,h)\,,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=b_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}+f_2(t,x,z),\quad x\in(0,R),\quad t\in(0,T]\,,$$

$$p_1|_{t=0}=0,\quad p_2|_{t=0}=0\,,\qquad p_1|_{z=0}=0,\quad \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0\,, \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad p_2|_{x=R}=p_1(t,z),\quad z\in(0,h),\ t\in(0,T]\,.$$

Здесь известные функции $f_1(t,z)$, $f_2(t,x,z)$ определяются с помощью решения задачи (4) и предшествующих задач вида (5).

СЛАБОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (4) И ЧИСЛЕННАЯ ЕЕ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

Пусть вектор-функция $U=(p_1(t,z),\ p_2(t,x,z))$ — решение начально-краевой задачи (4). Введем в рассмотрение множество $H_0=\{v=(v(z),\ w(z;x))$: $v\in W_2^1(0,h)$, $w\in W_2^1(0,R)$, $v(0)=0$, $w(z;R)=v(z)\}$. Пусть $V=(v(z),w(z;x))$ — произвольный элемент из H_0. Умножим обе части первого равенства системы (4) на функцию $v(z)$ (первую составляющую вектора $V\in H_0$) и результат проинтегрируем по отрезку $[0,h]$. Получим

$$\int_0^h\frac{\partial p_1(t,z)}{\partial t}v(z)dz+\int_0^h b_1\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dz+$$

$$+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)\,dx\right)v(z)\,dz=0\,,\qquad t\in(0,T)\,. \qquad (6)$$

Умножим обе части второго равенства системы (4) на функцию $w(z;x)$ (вторую составляющую вектора $V \in H_0$) и результат проинтегрируем по отрезку $[0, R]$. Имеем

$$\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t}(t,x,z)\, w(z;x)dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx - b_2 \frac{\partial p_2(t,x,z)}{\partial x}\bigg|_{x=R} v(z) = 0,$$

$$z \in (0, h), \ t \in (0, T], \tag{7}$$

с начальными условиями

$$p_1(t,z)|_{t=0} = p_E(z), \tag{8}$$

$$p_2(t,x,z)|_{t=0} = p_E(z), \quad x \in (0,R), \quad z \in (0,h), \tag{9}$$

и краевыми условиями

$$p_1(t,z)|_{z=0} = 0, \tag{10}$$

$$p_2(t,x,z)|_{x=R} = p_1(t,z), \quad z \in (0,h), \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

Определение 1. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (4) называется вектор-функция $U = (p_1(t,z), p_2(t,x,z)) \in H$, которая $\forall (v,w) \in H_0$ удовлетворяет равенствам (6)–(11), где

$$H = \{(v(t,z),\ w(t,x,z)) \colon\ v \in L^2(0,T;H_1),$$
$$w \in L^2(0,T;H_2),\ w(t,R,z) = v(t,z)\ \ \forall z \in [0,h]\},$$

$$H_1 = \left\{ v(t,z) \colon \int_0^h \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right) dz < \infty,\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2((0,h)),\ t \in [0,T] \right\},$$

$$H_2 = \left\{ v(t,x,z) \colon \int_0^h \int_0^R \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right) dx dz < \infty \right\}.$$

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4)

1. Численно-аналитическое решение. Пусть $\{\varphi_i^1(z)\}_{i=1}^{n_1}$ — система линейно независимых функций на отрезке $[0,h]$, а $\{\varphi_j^{11}(t)\}_{j=1}^{n_{11}}$ — система линейно независимых функций на отрезке $[0,T]$. Тогда для произвольной функции

$$\varphi(t,z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z),\ \alpha_{ij} \in R = (-\infty, +\infty), \tag{10'}$$

решение $p_2(t,x,z)$ задачи (7), (9), (11) при выполнении условия

$$p_2|_{x=R} = \varphi(t,z), z \in (0,h), t \in (0,T], \tag{11'}$$

представляется в виде

$$p_2(t,x,z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} p_2^{ij}(t,x,z) + p_2^0(t,x,z). \tag{12}$$

Здесь $p_2^{ij}(t,x,z)$ — решение начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial p_2^{ij}}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2^{ij}}{\partial x^2},\ x \in (0,R),\ z \in [0,h],\ t \in (0,T],$$

$$p_2^{ij}|_{t=0} = 0,\ \ x \in (0,R),\ \ z \in [0,h],$$

$$\frac{\partial p_2^{ij}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0,\ p_2^{ij}|_{x=R} = \varphi_i^{11}(t)\varphi_j^1(z),\ z \in [0,h], t \in (0,T). \tag{13}$$

Решение $p_2^{ij}(t, x, z)$ задачи (13) для каждого $z \in [0, h]$ можем определить как функцию $p_2^{ij}(t, x, z) \in L^2(0, T; H_3)$, где

$$H_3 = \left\{ v(t, x, z) \colon \int_0^R \left(v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) dx < \infty \quad \forall z \in [0, h], \ \forall t \in (0, T] \right\},$$

которая $\forall w(x) \in H_{20} = \{ v(x) \in W_2^1(0, R) \colon v(R) = 0 \}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^R \frac{\partial p_2^{ij}}{\partial t}(t, x, z)\, w(x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2^{ij}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \ z \in [0, h], \ t \in (0, T],$$

$$p_2^{ij}(t, x, z)|_{x=R} = \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \ z \in [0, h],$$

$$p_2^{ij}(t, x, z)|_{t=0} = 0, \ x \in [0, R], \ z \in [0, h], \tag{14}$$

а $p_{20}(t, x, z) = p_2^0(t, x, z)$ — решение задачи

$$\frac{\partial p_{20}}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_{20}}{\partial x^2}, \ x \in (0, R), \ z \in (0, h), \ t \in (0, T],$$

$$p_{20}|_{t=0} = p_E(z), \ x \in (0, R),$$

$$\left. \frac{\partial p_{20}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \ p_2|_{x=R} = 0, \ z \in (0, h), \ t \in (0, T]. \tag{15}$$

Слабое решение задачи (15) получаем как единственное решение задачи: определить функцию $p_2^0(t, x, z) \in L^2(0, T; H_3)$, которая $\forall w(x) \in H_{20}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^R \frac{\partial p_2^0}{\partial t}(t, x, z) w(x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2^0}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0, \ z \in [0, h], \ t \in (0, T],$$

$$p_2^0(t, x, z)|_{x=R} = 0, \ z \in [0, h], \quad p_2^0(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \ x \in (0, R), \ z \in [0, h]. \tag{16}$$

Теорема 1. Для каждой фиксированной функции $\varphi(t, z)$ вида (10′) существует единственное обобщенное решение $p_2(t, x, z)$ вида (12) задачи, заданной вторым, четвертым, седьмым и восьмым равенствами системы (4) при $p_1(t, z) = \varphi(t, z)$.

Замечание 1. Решения $p_2^{ij}(t, x, z)$ можем находить в виде

$$p_2^{ij}(t, x, z) = \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{i=1}^{n_{22}} \beta_l(t) \varphi_l^2(z) \varphi_i^{22}(x) + \psi_{ij},$$

где $\{\varphi_i^2(z)\}_{i=1}^{n_2}$ — система известных линейно независимых функций на $[0, h]$, а $\{\varphi_j^{22}(x)\}_{j=1}^{n_2}$ — система линейно независимых функций на $[0, R]$, ψ_{ij} — некоторая известная функция, порожденная произведениями $\varphi_i^{11} \varphi_j^1$, а неизвестный вектор $\{\beta_i(t)\}_{i=1}^{n_2}$ определим как решение задачи Коши, полученной на основе (14), проинтегрировав соответствующие равенства по отрезку $[0, h]$.

Составляющую $p_1(t, z)$ решения $U = (p_1, p_2)$ задачи (4) будем находить в виде

$$p_1(t, z) = \sum_{i=1}^{n_{11}} \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_{ij} \varphi_i^{11}(t) \varphi_j^1(z), \tag{17}$$

где постоянные α_{ij} являются неизвестными.

Учитывая (17), (12) (с общими неизвестными постоянными $\alpha_{ij}, i=\overline{1, n_{11}}$, $j=\overline{1, n_1}$), на основании (6), (10), (11) с помощью метода Галеркина получаем

$$\sum_{i=1}^{n_{11}}\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_{ij}\left(\int_0^T\int_0^h \frac{\partial \varphi_i^{11}(t)}{\partial t}\varphi_j^1(z)\varphi_\nu^{11}(t)\varphi_\chi^1(z)dzdt+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^h b_1\varphi_i^{11}(t)\frac{\partial\varphi_j^1(z)}{\partial z}\varphi_\nu^{11}(t)\frac{\partial\varphi_\chi^1(z)}{\partial z}dzdt+\beta\frac{1}{R}\int_0^T\int_0^h\int_0^R\frac{\partial p_2^{ij}(t,x,z)}{\partial t}dx\varphi_\nu^{11}(t)\varphi_\chi^1(z)dzdt\right)=$$

$$=-\beta\frac{1}{R}\int_0^T\int_0^h\int_0^R\frac{\partial p_2^0(t,x,z)}{\partial t}dx\,\varphi_\nu^{11}(t)\varphi_\chi^1(z)\,dzdt,\ \nu=\overline{1, n_{11}},\ \chi=\overline{1, n_1}. \tag{18}$$

Условие (9) учтено при нахождении функции $p_2^0(t,x,z)$, а на основании (8), (10) получаем равенства

$$\sum_{i=1}^{n_{11}}\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_{ij}\varphi_i^{11}(0)\int_0^h\varphi_j^1(z)\varphi_\nu^1(z)dz=\int_0^h p_E(z)\varphi_\nu^1(z)dz,\ \ \nu=\overline{1, n_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n_{11}}\sum_{j=1}^{n_1}\alpha_{ij}\varphi_i^{11}(t)\varphi_j^1(0)=0,\ \ t\in[0,T]. \tag{18$'$}$$

Следовательно, для определения приближения $U_n=(p_{1n}, p_{2n})$ решения $U=(p_1, p_2)$ задачи (4) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\overline{A}\overline{\alpha}=\overline{B} \tag{19}$$

с ограничением (18′), где матрица $\overline{A}$ размера $n\times n$, а векторы $\overline{\alpha}, \overline{B}$ размера $n=n_{11}\times n_1$.

Замечание 2. При использовании финитных базисных функций ограничения (18′) понижают порядок системы алгебраических уравнений (19).

2. Метод конечных элементов. Отрезок $[0,h]$ разобьем на элементарные отрезки $[z_i, z_{i+1}], i=\overline{0, N-1}$, узловыми точками $z_i\,(0=z_0<z_1<\ldots<z_N=h)$. При каждой фиксированной функции $p_2(t,x,z)$ на основании задачи (4) получаем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial p_1(t,z)}{\partial t}=b_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}+f(t,z),\ \ z\in(0,h),\ \ t\in(0,T],$$

$$p_1(t,z)\big|_{z=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,\ \ t\in(0,T],$$

$$p_1(t,z)\big|_{t=0}=p_E,\ \ z\in(0,h), \tag{20}$$

где

$$f(t,z)=-\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)dx,\ z\in(0,h), t\in(0,T]. \tag{20$'$}$$

Определение 2. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (20) называется функция $p_1(t,z)\in H_1=\{v(t,z)\colon v\in W_2^1(0,h),\ \frac{\partial v}{\partial t}\in L_2(0,h),\ v(t,0)=0,$ $t\in(0,T]\}$, которая $\forall v(z)\in H_{10}=\{v(z)\in W_2^1(0,h)\colon v(0)=0\}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial p_1(t, z)}{\partial t} v(z)dx + \int_0^h b_2 \frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} dz = \int_0^h f(t, z) v(z)dz, \ t \in (0, T],$$

$$p_1(t, z)|_{t=0} = p_E(z), \ z \in (0, h). \tag{21}$$

Задачу (21) будем решать с помощью метода конечных элементов (МКЭ), где приближение $p_{1n}(t, z)$ имеет вид

$$p_{1n}(t, z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\varphi_i(z), \tag{22}$$

здесь $\{\varphi_i(z)\}_{i=1}^n$ — система базисных функций МКЭ.

На основании (21) получаем задачу Коши

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i(t)\int_0^h \varphi_i(z)\varphi_j(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\int_0^h b_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{\partial \varphi_j}{\partial z} dz =$$

$$= \int_0^h f(t, z)\varphi_j(z)dz, \ j = \overline{1, n}, \ t \in (0, T], \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\int_0^h \varphi_i(z)\varphi_j(z)dz = \int_0^h p_E(z)\varphi_j(z)dz, \ j = \overline{1, n}.$$

Вторая часть задачи (4) порождает для каждого $z \in [0, h]$ начально-краевую задачу

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2}, x \in (0, R), z \in [0, h], t \in (0, T],$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \ p_2|_{x=R} = p_1(t, z), \ z \in [0, h], \ t \in (0, T],$$

$$p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \ x \in (0, R), \ z \in [0, h]. \tag{24}$$

Определение 3. При каждом фиксированном $p_1(t, z)$ для каждого $z \in [0, h]$ обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (24) называется функция $p_2(t, x, z) \in H_2$, которая $\forall w(z; x) \in H_{20}$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^R \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial t} w(x)dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2(t, x, z)}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} dz = 0, \ t \in (0, T],$$

$$p_2(t, x, z)|_{t=0} = p_E(z), \ x \in (0, R), \ z \in [0, h], \tag{25}$$

$H_2 = \{v(t, x, z): v \in W_2^1((0, R)), \ \frac{\partial v}{\partial t} \in L_2(0, R), \ p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z) \ \forall z \in [0, h],$ $t \in (0, T]\}$, $H_{20} = \{v(z): v \in W_2^1(0, R), \ v(R) = 0\}$.

Для каждого фиксированного $z \in [0, h]$ при каждом фиксированном $p_1(t, z)$ задачу (24) можем решить приближенно с помощью МКЭ, где

$$p_{2m}(t, x, z) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t)\psi_i(x), z \in [0, h]. \tag{26}$$

На основании (21) получаем задачу Коши

$$\sum_{i=1}^{m} \dot{\beta}_i(t)\int_0^R \psi_i(x)\psi_j(x)dx + \sum_{i=1}^{m} \beta_i(t)\int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx = 0, \ z \in [0, h], \ t \in (0, T],$$

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(0)\int_0^R \psi_i(x)\psi_j(x)dx = \int_0^R p_E(z)\psi_j(x)dx, \ j = \overline{1, m}. \tag{27}$$

Следует отметить, что $\beta_i(t)=\beta_i(z;t)$, $z\in[0,h]$.

Поскольку в МКЭ параметры $\alpha_i(t)$ являются значениями искомой функции $p_1(t, z)$ или ее частных производных по пространственным переменным в определенных узловых точках отрезка $[0,h]$, а $\beta_i(t)$ — соответственно функции $p_2(t, x, z)$ в узловых точках отрезка $[0,R]$ при фиксированных $z\in[0, h]$, то, например, при квадратичных функциях МКЭ, разбив отрезок $[0, h]$ на элементарные отрезки $[z_i, z_{i+1}]$, получим дополнительно узловые точки $z_{i+1/2}\in[z_i, z_{i+1}]$.

После каждой узловой точки $z_0, z_{1/2}, z_1, \ldots, z_{N_1-1}, z_{N_1-1/2}, z_{N_1}$ (N_1— количество элементарных отрезков $[z_i, z_{i+1}]$) вводим в рассмотрение конечно-элементное разбиение отрезка $[0,R]$ на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{0, N_2-1}$.

В этом случае равенства (23), (27) порождают задачу Коши

$$A\dot{\overline{\alpha}}(t)+K\overline{\alpha}(t)=F(t),\ \ t\in[0,T],$$

$$A_0\overline{\alpha}(0)=F_0\,, \tag{28}$$

где

$$\overline{\alpha}(t)=(\alpha_0(t), \beta_0^0(t), \beta_{1/2}^0(t), \ldots,\ \beta_{N_2}^0(t),\ \alpha_{1/2}(t), \beta_0^{1/2}(t),\ \beta_{1/2}^{1/2}(t),\ldots)^{\mathrm{T}}. \tag{29}$$

Учитывая (29), первую строку (без учета слагаемого $\int_0^h f(t, z)\varphi_j(z)dz$) разреженной матрицы A порождают элементы

$$\int_0^h \varphi_1(z)\varphi_1(z)dz,\ \ \int_0^h \varphi_2(z)\varphi_1(z)dz,\ \ \int_0^h \varphi_3(z)\varphi_1(z)dz\,,$$

а матрицы K — элементы

$$\int_0^h b_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz,\ \int_0^h b_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz,\ \int_0^h b_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}dz\,.$$

Вторую строку матрицы A порождают элементы

$$\int_0^R \psi_1(x)\psi_1(x)dx,\ \ \int_0^R \psi_2(x)\psi_1(x)dx,\ \ \int_0^R \psi_3(x)\psi_1(x)dx,$$

а матрицы K — элементы

$$\int_0^R b_2\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx,\ \int_0^R b_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx,\ \int_0^R b_2\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dx\,.$$

После порождения первых шести строк матрицы A и матрицы K в матрице A можно учесть слагаемое $\int_0^h f(t, z)\varphi_j(z)dz$ выражения (23), где функция $f(t, z)$ имеет вид (20′).

Поскольку для трех фиксированных значений $z=z_0, z_{1/2}, z_1$ функция $p_2(t, x, z_\nu)$, $\nu=0,\ 1/2,\ 1$, имеет вид

$$p_2(t, x, z_\nu)=\sum_{i=1}^{m}\beta_i^\nu(t)\psi_i(x)\,, \tag{30}$$

то

$$f(t, z)=-\beta\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{m}\dot{\beta}_i^\nu(t)\int_0^R\psi_i(x)dx,\ \ \nu=0,\ 1/2,\ 1. \tag{31}$$

Для вычисления интеграла

$$\int_0^h f(t, z)\psi_j(z)dz,\ \ j=1\,, \tag{32}$$

можно использовать численное интегрирование.

С учетом (31) на основе (32) при $j = 2, 3$ получим соответствующие элементы матрицы A третьей и пятой строк.

Аналогично получаем все элементы матриц A, K, продвигаясь по отрезку $[0, h]$, следующим отрезком будет $[z_1, z_2]$. На завершающей стадии построения матриц A, K учитываем естественные условия $p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z)$, $z \in [0, h]$, $t \in (0, T]$.

Матрицу A_0 и вектор F_0 получаем на основе начальных условий, т.е. на основе равенств (16), (27).

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (4) и в точках $\bar{d}_i$, $i = \overline{1, m}$, известны следы решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (4), заданные равенствами

$$p_1(t, \bar{d}_i) = f_i^1(t), \; p_2(t, R/2, \bar{d}_i)) = f_i^2(t), \; t \in (0, T], \; i = \overline{1, m}. \tag{33}$$

Составим функционал-невязку

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_0^T ((p_1(u; t, \bar{d}_i) - f_i^1(t))^2 + (p_2(u; t, R/2, \bar{d}_i) - f_i^2(t))^2) dt, \tag{34}$$

где $u = (u^1, u^2) \in \mathcal{U} = C_+([0, T]) \times C_+([0, T])$, $C_+([0, T]) = \{v(t) \in C([0, T]) : v > 0\}$.

Вместо задачи (4), (33) будем решать задачу (6)–(11), (34), состоящую в определении вектора u, при котором решение $U = (p_1(u; t, z), p_2(u; t, x, z))$ задачи (6)–(11), где $u_1 = b_1, u_2 = b_2$, удовлетворяет равенству

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{35}$$

Приближение u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (34) будем находить с помощью итерационного процесса

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \; n = 0, 1, \ldots, n^*, \tag{36}$$

начиная с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определяются следующими выражениями [3]:

- для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\| e_n \|^2}{\| J'_{u_n} \|^2};$$

- для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \; \beta_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| A J'_{u_n} \|^2}; \tag{37}$$

- для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \; \gamma_0 = 0, \; \gamma_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| J'_{u_{n-1}} \|^2}, \; \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\| A p_n \|^2},$$

где J'_{u_n} — градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n, e_n = A u_n - f, A u_n =$ $= (\{p_1(u_n; t, \bar{d}_i)\}_{i=1}^m, \{p_2(u_n; t, R/2, \bar{d}_i)\}_{i=1}^m)$, $f = (\{f_i^1\}_{i=1}^m, \{f_i^2\}_{i=1}^m)$.

Для приращения θ решения U задачи (4), соответствующего допустимому приращению Δu и $(u + \Delta u \in \mathcal{U})$ элемента $u \in \mathcal{U}$, имеем равенства

$$\frac{\partial (p_1 + \theta_1)}{\partial t} = (u_1 + \Delta u_1) \frac{\partial^2 (p_1 + \theta_1)}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (p_2 + \theta_2) dx, \; z \in (0, h),$$

$$\frac{\partial(p_2+\theta_2)}{\partial t}=(u_2+\Delta u_2)\frac{\partial^2(p_2+\theta_2)}{\partial x^2},\ x\in(0,R),\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],$$

$$(p_1+\theta_1)|_{t=0}=p_E(z),\ (p_2+\theta_2)|_{t=0}=p_E(z), \tag{38}$$

$$(p_1+\theta_1)|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial(p_1+\theta_1)}{\partial z}\right|_{z=h}=0,$$

$$\left.\frac{\partial(p_2+\theta_2)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ (p_2+\theta_2)|_{x=R}=p_1+\theta_1.$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения θ решения U, соответствующего приращению Δu, на основании (38) получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-u_1\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}=\Delta u_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}-\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\theta_2(t,x,z)dx,\ z\in(0,h),$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t}-u_2\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2}=\Delta u_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\ x\in(0,R),\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],\ \theta_1(t,z)|_{t=0}=0,$$

$$\theta_2(t,x,z)|_{t=0}=0,\ \theta_1(t,z)|_{z=0}=0, \tag{39}$$

$$\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,\ \left.\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,$$

$$\theta_2(t,x,z)|_{x=R}=\theta_1(t,z),\ z\in[0,h],\ t\in(0,T],$$

$p_1(t,z)=p_1(u;t,z)$, $p_2(t,x,z)=p_2(u;t,x,z)$.

Определение 4. Обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (39) называется вектор-функция $\theta=(\theta_1,\theta_2)\in H$, которая $\forall(v,w)\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h\frac{\partial\theta_1(t,z)}{\partial t}v(z)dx+\int_0^h u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dz+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\theta_2(t,x,z)\,dxv\,dz=$$

$$=\int_0^h\Delta u_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}v(z)dz,\ t\in(0,T],$$

$$\int_0^R\frac{\partial\theta_2(t,x,z)}{\partial t}w(z;x)dx+\int_0^R u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-u_2\left.\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right|_{x=R}w(z;R)=$$

$$=\int_0^R\Delta u_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}w(z;x)dx,\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],$$

$$\theta_1(t,z)\big|_{t=0}=0,\ \theta_2(t,x,z)|_{t=0}=0,$$

$$\theta_1(t,z)|_{z=0}=0,\ \theta_2(t,x,z)|_{x=R}=\theta_1(t,z),\ z\in(0,h). \tag{40}$$

На каждом шаге нахождения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (34) определим вектор-функцию $\widetilde{p}(u_{n+1})=(\widetilde{p}_1(u_{n+1}),\widetilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial t}=u_{1n}\frac{\partial^2\widetilde{p}_1}{\partial z^2}+\Delta u_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}-\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\widetilde{p}_2dx,\ z\in(0,h),$$

$$\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t}=u_{2n}\frac{\partial^2 \widetilde{p}_2}{\partial x^2}+\Delta u_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\ x\in(0,R),\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E(z),\ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E(z), \tag{41}$$

$$\widetilde{p}_1|_{z=0}=0,\ \left.\frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,\ \left.\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \widetilde{p}_2|_{x=R}=\widetilde{p}_1,\ z\in[0,h],\ t\in(0,T].$$

Определение 5. Обобщенным решением начально-краевой задачи (41) называется вектор-функция $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1(u_{n+1}),\widetilde{p}_2(u_{n+1}))\in H$, которая $\forall(v,w)\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial t}v\,dx+\int_0^h u_1\frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dz+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\left(\int_0^R\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t}dx\right)v\,dz=\int_0^h\Delta u_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}v\,dz,\ \ t\in(0,T],$$

$$\int_0^R\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t}w(z;x)dx+\int_0^R u_2\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-u_2\left.\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\right|_{x=R}w(z;R)= \tag{41$'$}$$

$$=\int_0^R\Delta u_2\frac{\partial^2 p_2}{\partial z^2}w(z;x)dx,\ z\in[0,h],\ t\in(0,T],\ \widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E,\ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E.$$

Для каждого фиксированного $z\in[0,h]$ должно выполняться условие $w(z;R)=v(z)$, т.е. при дальнейшем интегрировании второго равенства системы (41$'$) по переменной $z\in[0,h]$ необходимо предполагать, что $w=w(z;x)$.

Следуя [4, 5], на каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (4), (34) сопряженная задача состоит в нахождении вектор-функции $(\psi_1(t,x),\psi_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1,w_2)\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\int_0^h\frac{\partial\psi_1(t,z)}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h u_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz-\int_0^h\int_0^R\frac{\partial\psi_2(t,x,z)}{\partial t}w_2(z;x)dxdz+$$

$$+\int_0^h\int_0^R u_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dxdz+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2(z;x)\,dx\psi_1dz-\int_0^h u_2\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=R}\psi_2(t,R,z)dz=$$

$$=\sum_{i=1}^m((p_1(t,\bar{d}_i)-f_i^1(t))w_1(\bar{d}_i)+(p_2(t,R/2,\bar{d}_i)-f_i\ (t))w_2(\bar{d}_i;R/2))|_{z=\bar{d}_i}, \tag{42}$$

$$\psi|_{t=T}=0. \tag{43}$$

Выбирая в (42) $w_1=\widetilde{p}_1(u_{n+1})-p_1(u_n),w_2=\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n)$, с учетом (39), (41$'$) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx(\bar{p}(u_n)-f,\ \bar{\widetilde{p}}(u_{n+1})-\bar{p}(u_n))=\int_0^T\int_0^h\frac{\partial(\widetilde{p}_1(u_{n+1})-p(u_n))}{\partial t}\psi_1dzdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^h u_{1n}\frac{\partial(\widetilde{p}_1(u_{n+1})-p(u_n))}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dzdt+\int_0^T\int_0^h\int_0^R\frac{\partial(\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n))}{\partial t}\psi_2dxdzdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^h\int_0^R u_{2n}\frac{\partial(\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n))}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}dxdzdt+$$

$$+\beta\frac{1}{R}\int_0^T\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R(\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n))dx\psi_1dzdt-$$

$$-\int_0^T\int_0^h u_{2n}\frac{\partial(\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n))}{\partial x}\psi_2\Big|_{x=R}dzdt=\int_0^T\int_0^h \Delta u_{1n}\frac{\partial^2 p(u_n)}{\partial z^2}\psi_1(t,z)dzdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^h\int_0^R \Delta u_{2n}\frac{\partial^2 p_2(t,x,z)}{\partial x^2}\psi_2 dxdzdt.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\widetilde{\psi}_n$. Если $u_1=u_1(t,z)$, $u_2=u_2(t,z)$, то

$$\widetilde{\psi}_n=(\widetilde{\psi}_n^1,\widetilde{\psi}_n^2)\,,\ \widetilde{\psi}_n^1=\frac{\partial^2 p_1(u_n)}{\partial z^2}\psi_1(t,z)\,,\ \widetilde{\psi}_n^2=\int_0^R\frac{\partial^2 p_2(u_n)}{\partial x^2}\psi_2 dx\,.$$

Значит, $\|J'_{u_n}\|^2\approx\int_0^T\int_0^h(\widetilde{\psi}_n^1(t,z))^2dzdt+\int_0^T\int_0^h(\widetilde{\psi}_n^2(t,z))^2dzdt.$

Если $\mathcal{U}=R_+\times R_+$, то

$$\widetilde{\psi}_n^1=\int_0^T\int_0^h\frac{\partial^2 p_1(u_n)}{\partial z^2}\psi_1 dzdt\,,\ \widetilde{\psi}_n^2=\int_0^T\int_0^h\int_0^R\frac{\partial^2 p_2(u_n)}{\partial x^2}\psi_2 dxdzdt,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2\approx(\widetilde{\psi}_n^1)^2+(\widetilde{\psi}_n^2)^2.$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА b_2 ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СЛЕДАХ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ $p_1(t,z)$ РЕШЕНИЯ $U=(p_1(t,z),p_2(t,x,z))$

Состояние системы описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=b_1\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}-\beta\frac{1}{R}\int_0^R p_2 dx,\ \ z\in[0,h],\ \ t\in(0,T]\,,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}=u\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\ \ x\in(0,R),\ \ z\in[0,h],\ \ t\in(0,T]\,,$$

$$p_1|_{t=0}=p_E(z),\ \ p_2|_{t=0}=p_E(z)\,, \tag{44}$$

$$p_1|_{z=0}=0,\ \ \frac{\partial p_1}{\partial z}\Big|_{z=h}=0\,,\ \ \frac{\partial p_2}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\,,\ \ p_2(t,x,z)|_{x=R}=p_1(t,z)\,.$$

Предполагаем, что

$$p_1(t,d_i)=f_i(t),\ \ i=\overline{1,m},\ \ t\in(0,T],\ \ d_i\in(0,z),\ \ i=\overline{1,m}\,. \tag{45}$$

Функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\int_0^T(p_1(u;t,d_i)-f_i(t))^2dt\,. \tag{46}$$

Определение 6. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}=C_+([0,T])$ обобщенным решением начально-краевой задачи (44) называется вектор-функция $U=(p_1(t,z),p_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(v,w)\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h\frac{\partial p_1}{\partial t}v(z)dz+\int_0^h b_1\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dz+\int_0^h\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)dx\,v(z)dz=0,$$

$$\int_0^R\frac{\partial p_2}{\partial t}w(z;x)dx+\int_0^R u\frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-u\frac{\partial p_2}{\partial x}\Big|_{x=R}w(z;R)=0,\ \ z\in[0,h],\ \ t\in(0,T]\,,$$

$$p_1|_{t=0}=p_E(z),\ \ p_2|_{t=0}=p_E(z)\,. \tag{47}$$

Для приращения θ решения $\mathcal{U}$ задачи (44), соответствующего приращению Δu $(u+\Delta u \in \mathcal{U})$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (44), (46), имеем равенства

$$\frac{\partial(p_1+\theta_1)}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 (p_1+\theta_1)}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R (p_2+\theta_2) dx, \quad z \in [0, h],$$

$$\frac{\partial(p_2+\theta_2)}{\partial t} = (u+\Delta u) \frac{\partial^2 (p_2+\theta_2)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T],$$

$$(p_1+\theta_1)|_{t=0} = p_E(z), \; (p_2+\theta_2)|_{t=0} = p_E(z),$$

$$(p_1+\theta_1)|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial(p_1+\theta_1)}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial(p_2+\theta_2)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad (p_2+\theta_2)|_{x=R} = p_1+\theta_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T). \tag{48}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, для приращения $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z))$ решения $U = (p_1(u; t, z), p_2(u; t, x, z))$, соответствующего допустимому приращению Δu решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (44), (46), получаем следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2 dx, \; z \in (0, h),$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = u \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} + \Delta u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad x \in (0, R), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T],$$

$$\theta_1|_{t=0} = 0, \quad \theta_2|_{t=0} = 0, \tag{49}$$

$$\theta_1|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \theta_2|_{x=R} = \theta_1, \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, T).$$

Определение 7. Обобщенным решением начально-краевой задачи (49) называется функция $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (v(z), w(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \theta_1}{\partial t} v(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dz + \beta \frac{1}{R} \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2(t, x, z) dx v \, dz = 0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial \theta_2(t, x, z)}{\partial t} w(z; x) dx + \int_0^R u \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx - u \left.\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right|_{x=R} w(z; R) =$$

$$= \int_0^R \Delta u \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} w(z; x) dx, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T],$$

$$\theta_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z)|_{t=0} = 0,$$

$$\theta_1(t, z)|_{z=0} = 0, \quad \theta_2(t, x, z)|_{x=R} = \theta_1(t, z), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, T). \tag{50}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (46), (47) определим вектор-функцию $\widetilde{p} = (\widetilde{p}_1(u_{n+1}), \widetilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial t}=b_1\frac{\partial^2 \widetilde{p}_1}{\partial z^2}-\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \widetilde{p}_2 dx,\ z\in(0,h),$$

$$\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t}=u\frac{\partial^2 \widetilde{p}_2}{\partial x^2}+\Delta u\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\ \ x\in(0,R),\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E(z),\ \ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E(z),\ \ \widetilde{p}_1|_{z=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \ \widetilde{p}_2|_{x=R}=\widetilde{p}_1,\ \ z\in[0,h],\ t\in(0,T]. \tag{51}$$

Определение 8. Обобщенным решением начально-краевой задачи (51) называется вектор-функция $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1(u_{n+1}),\widetilde{p}_2(u_{n+1}))\in H$, которая $\forall(v,w)\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial t}v\,dx+\int_0^h b_1\frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}dx+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \widetilde{p}_2 dx v(z)dz=0,\ t\in(0,T],$$

$$\int_0^R \frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t}w(z;x)dx+\int_0^R u\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dx-u\left.\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\right|_{x=R}w(z;R)=\int_0^R \Delta u_2\frac{\partial^2 \widetilde{p}_2}{\partial x^2}w(z;x)dx. \tag{52}$$

Для каждого фиксированного $z\in[0,h]$ должно выполняться равенство (41′).

На всех шагах определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (46), (47) определим сопряженную задачу

$$-\frac{\partial \psi_1(t,z)}{\partial t}-b_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=\sum_{i=1}^m(p_1(t,d_i)-f_i(t))\,\delta(z=d_i),\ z\in(0,h),$$

$$-\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t,x,z)}{\partial t}w_2(z;x)dx+\int_0^R u\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx+\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2 dx\psi_1(t,z)-$$

$$-u\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=R}\psi_2(t,R,z)=0,\ \ z\in(0,h),\ \ t\in(0,T],$$

$$\psi_1|_{t=T}=0,\ \ \psi_2|_{t=T}=0,\ \ \psi_1|_{z=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right|_{z=h}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \ \psi_2|_{x=R}=\psi_1. \tag{53}$$

Определение 9. Обобщенным решением задачи (53) называется вектор-функция $\psi=(\psi_1(t,x),\psi_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\int_0^h \frac{\partial\psi_1}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h b_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz=\sum_{i=1}^m(p_1(t,d_i)-f_i(t))\,w_1(d_i),\ \ t\in(0,T],$$

$$-\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t,x,z)}{\partial t}w_2(z;x)dx+\int_0^R u_2\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx+\beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2 dx\psi_1(t,z)-$$

$$-u_2\left.\frac{\partial w_2}{\partial x}\right|_{x=R}\psi_2(t,R,z)=0,\ \ z\in(0,h),\ \ t\in(0,T],$$

$$\psi_1|_{t=T}=0,\ \ \psi_2|_{t=T}=0. \tag{54}$$

Выбирая в равенствах (54) $w_1 = \widetilde{p}_1(u_{n+1}) - p_1(u_n)$, $w_2 = \widetilde{p}_2(u_{n+1}) - p_2(u_n)$, с учетом (52) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx (\overline{p}_1(u_n) - \overline{f},\ \overline{\widetilde{p}}_1(u_{n+1}) - \overline{p}_1(u_n)) = \int_0^T \int_0^h \int_0^R \Delta u_n \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \psi_2(t, x, z) dx dz dt,$$

где $\overline{p}_1(u_n) = \{p_1(u_n; t, d_i)\}_{i=1}^m$, $\overline{\widetilde{p}}_1(u_{n+1}) = \{\widetilde{p}_1(u_{n+1}; t, d_i)\}_{i=1}^m$, $\overline{f} = \{f_i(t)\}_{i=1}^m$.

Следовательно,
$$J'_{u_n} \approx \int_0^R \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \psi_2(t, x, z) dx .$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА β ПРИ ИЗВЕСТНЫХ СЛЕДАХ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ $p_1(t, z)$ РЕШЕНИЯ $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$

Состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2 dx,\ z \in (0, h),\ t \in (0, T],$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2},\ x \in (0, R),\ z \in (0, h],\ t \in (0, T],$$

$$p_1|_{t=0} = p_E(z),\ p_2|_{t=0} = p_E(z),$$

$$p_1|_{z=0} = 0,\ \left.\frac{\partial p_1}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,\ \left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ p_2(t, x, z)|_{x=R} = p_1(t, z). \tag{55}$$

Предполагаем, что выполняются равенства (45).

Определение 10. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U} = C_+([0, T])$ обобщенным решением начально-краевой задачи (55) называется вектор-функция $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial p_1}{\partial t} w_1(z) dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx w_1(z) dz = 0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t} w_2(z; x) dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} dx - b_2 \left.\frac{\partial p_2}{\partial x}\right|_{x=R} w_2(z; R) = 0,$$

$$p_1|_{t=0} = p_E(z),\ p_2|_{t=0} = p_E(z) . \tag{56}$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, на основании (55) для приращения $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z))$ решения $U = (p_1(t, z), p_2(t, x, z))$ задачи (55), соответствующего приращению Δu $(u + \Delta u \in \mathcal{U})$ решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (55), (45), получаем начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R \theta_2 dx - \Delta u \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^R p_2(t, x, z) dx,$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2},\ x \in (0, R),\ z \in (0, h),\ t \in (0, T],\ \theta_1|_{t=0} = 0,\ \theta_2|_{t=0} = 0,$$

$$\theta_1|_{z=0} = 0,\ \left.\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right|_{z=h} = 0,\ \left.\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \theta_2(t, x, z)|_{x=R} = \theta_1(t, z). \tag{57}$$

Определение 11. Обобщенным решением начально-краевой задачи (57) называется вектор-функция $\theta = (\theta_1(t, z), \theta_2(t, x, z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z; x)) \in H_0$

удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial\theta_1}{\partial t} w_1(z)dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz + \int_0^h u\frac{1}{R}\int_0^R \theta_2 dx w_1(z)dz =$$

$$= -\int_0^h \Delta u \frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)dx w_1(z)dz,\ t\in(0,T], \tag{58}$$

$$\int_0^R \frac{\partial\theta_2}{\partial t} w_2(z;x)dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial x}\frac{\partial w_2(z;x)}{\partial x}dx - b_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R)=0,$$

$$\theta_1|_{t=0}=0,\ \theta_2|_{t=0}=0.$$

На каждом шаге нахождения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (56), (46) определим вектор-функцию $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1(u_{n+1}),\widetilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial t} = b_1\frac{\partial^2\widetilde{p}_1}{\partial z^2} - u_n\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \widetilde{p}_2 dx - \Delta u_n \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(u_n)dx,\ z\in(0,h),$$

$$\frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial t} = b_2\frac{\partial^2\widetilde{p}_2}{\partial x^2},\quad x\in(0,R),\ z\in(0,h),\ t\in(0,T), \tag{59}$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E(z),\ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E(z),\ \widetilde{p}_1|_{z=0}=0,\ \frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial z}|_{z=h}=0,$$

$$\frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial x}|_{x=0}=0,\ \widetilde{p}_2|_{x=R}=\widetilde{p}_1\ .$$

Определение 12. Обобщенным решением начально-краевой задачи (59) называется вектор-функция $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1(t,z),\widetilde{p}_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial t} w_1(z)dz + \int_0^h b_1\frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz + \int_0^h u_n\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \widetilde{p}_2 dx w_1(z)dz =$$

$$= -\int_0^h \Delta u_n\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(u_n)w_1(z)\,dx\,dz,\quad t\in(0,T],$$

$$\int_0^R \frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial t} w_2(z;x)dx + \int_0^R b_2\frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx - b_2\frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R)=0,$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E(z),\ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E(z). \tag{60}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (56), (46) сопряженная задача имеет вид

$$-\frac{\partial\psi_1(t,z)}{\partial t} - b_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^m (p_1(t,d_i)-f_i\ (t))\,\delta(z=d_i),\ z\in(0,h),$$

$$-\int_0^R \frac{\partial\psi_2(t,x,z)}{\partial t} w_2(z;x)dx + \int_0^R b_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx + u\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2 dx\psi_1(t,z) -$$

$$-b_2\frac{\partial w_2}{\partial x}\bigg|_{x=R}\psi_2(t,R,z)=0,\ z\in(0,h),\ t\in(0,T],$$

$$\psi_1|_{t=T}=0,\ \psi_2|_{t=T}=0,\ \psi_1|_{z=0}=0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\bigg|_{z=h}=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x}\bigg|_{x=0}=0,\ \psi_2|_{x=R}=\psi_1. \tag{61}$$

Определение 13. Обобщенным решением задачи (61) называется вектор-функция $\psi=(\psi_1(t,x),\psi_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$-\int_0^h \frac{\partial\psi_1}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h b_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz=\sum_{i=1}^m(p_1(t,d_i)-f_i\ (t))\,w_1(d_i),\ t\in(0,T],$$

$$-\int_0^R \frac{\partial\psi_2(t,x,z)}{\partial t}w_2(z;x)dx+\int_0^R b_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2(z;x)}{\partial x}dx+u\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2(z;x)dx\psi_1(t,z)-$$

$$-b_2\frac{\partial w_2(z;x)}{\partial x}\bigg|_{x=R}\psi_2(t,R,z)=0,\ z\in(0,h),t\in(0,T],$$

$$\psi_1|_{t=T}=0,\ \psi_2|_{t=T}=0. \tag{62}$$

Выбирая в равенствах (62) $w_1=\tilde p_1(u_{n+1})-p_1(u_n),w_2=\tilde p_2(u_{n+1})-p_2(u_n)$, с учетом (60), (58) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx(\bar p_1(u_n)-\bar f,\ \bar{\tilde p}_1(u_{n+1})-\bar p_1(u_n))=$$

$$=-\int_0^T\int_0^h\Delta u_n\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(u_n;t,x,z)dx\psi_1(t,z)dzdt. \tag{63}$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx\tilde\psi_n$, где

$$\tilde\psi_n\approx-\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(u_n;t,x,z)\,dx\psi_1(t,z),\ \ \|J'_{u_n}\|^2\approx\int_0^T\int_0^h\tilde\psi_n^2dzdt.$$

Если $\mathcal{U}=R_+=(0,+\infty)$, то

$$\tilde\psi_n=-\int_0^T\int_0^h\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(u_n;t,x,z)\,dx\psi_1(t,z)\,dzdt,\ \ \|J'_{u_n}\|^2\approx|\tilde\psi_n|.$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ b_1,b_2 НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей (4). Предположим, что в точках $d_i,\,i=\overline{1,m}$, известны следы решения $U=(p_1(t,z),p_2(t,x,z))$ задачи (4), заданные равенствами (33). Функционал-невязка имеет вид (34). Имеем задачу (6)–(11), (34), состоящую в определении вектора u, при котором решение $U=(p_1(u;t,z),p_2(u;t,x,z))$ задачи (6)–(11), где $u_1=b_1,u_2=b_2$, удовлетворяет равенствам (33).

Для приращения θ решения U задачи (6)–(11), соответствующего приращению Δu $(u+\Delta u\in\mathcal{U})$ элемента $u\in\mathcal{U}$ на основании (6)–(11), имеем задачу: необходимо определить функцию $\theta=(\theta_1(t,z),\theta_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h\frac{\partial\theta_1(t,z)}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h u_1\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\theta_2(t,x,z)dxw_1dz=$$

$$=-\int_0^h\Delta u_1\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz,\ t\in(0,T],$$

$$\int_0^R\frac{\partial\theta_2(t,x,z)}{\partial t}w_2(z;x)dx+\int_0^R u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx-u_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\bigg|_{x=R}w_2(z;R)=$$

$$=-\int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx+\Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R)\,,\ \ z\in[0,h]\,,\ \ t\in(0,T)\,,$$

$$\theta_1|_{t=0}=0,\ \ \theta_2|_{t=0}=0. \tag{64}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (33) определим функцию $\widetilde{p}(u_{n+1})=(\widetilde{p}_1(u_{n+1}),\widetilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение следующей задачи: найти функцию $\widetilde{p}(u_{n+1})\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h u_1 \frac{\partial\widetilde{p}_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz+\int_0^h \beta\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial t}dxw_1(z)dz=$$

$$=-\int_0^h \Delta u_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz, t\in(0,T),$$

$$\int_0^R \frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial t}w_2(z;x)dx+\int_0^R u_2 \frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx-u_2\frac{\partial\widetilde{p}_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R)=$$

$$=-\int_0^R \Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x}dx+\Delta u_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R)\,,\ \ t\in(0,T)\,,$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0}=p_E\,,\ \ \widetilde{p}_2|_{t=0}=p_E\,. \tag{65}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (6)–(11), (33) сопряженная задача имеет вид (42). Выбирая в (42) $w_1=\widetilde{p}_1(u_{n+1})-p_1(u_n)$, $w_2=\widetilde{p}_2(u_{n+1})-p_2(u_n)$, с учетом (65), (64) получаем

$$\langle J'_{u_n},\Delta u_n\rangle\approx-\int_0^T\int_0^h \Delta u_{1n}\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}dzdt-\int_0^T\int_0^h\int_0^R \Delta u_{2n}\frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}dxdzdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^h \Delta u_{2n}\frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R}\psi_2(t,R,z)dzdt\,.$$

Следовательно, $J'_{u_n}\approx(\widetilde{\psi}_n^1,\widetilde{\psi}_n^2)$, где

$$\widetilde{\psi}_n^1=-\frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\,,\ \ \widetilde{\psi}_n^2=-\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}dx-\frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R}\psi_2(t,R,z)\,,$$

$$\|J'_{u_n}\|^2=\int_0^T\int_0^h(\widetilde{\psi}_n^1)^2dzdt+\int_0^T\int_0^h\widetilde{\psi}_n^2dzdt\,.$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРА b_2 НА ОСНОВЕ СЛАБОЙ ЗАДАЧИ СОСТОЯНИЯ

Пусть состояние системы описывается слабой задачей (47). Функционал-невязка имеет вид (46). Для приращения $\theta=(\theta_1(t,z),\theta_2(t,x,z))$ решения $U=(p_1(t,z),p_2(t,x,z))$, соответствующего приращению Δu, и решения $u\in\mathcal{U}$ ($u+\Delta u\in\mathcal{U}$) задачи (46), (47), имеем задачу: определить функцию $\theta=(\theta_1(t,z),\theta_2(t,x,z))\in H$, которая $\forall(w_1(z),w_2(z;x))\in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial\theta_1(t,z)}{\partial t}w_1(z)dz+\int_0^h b_1\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z}dz+\beta\frac{1}{R}\int_0^h\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R\theta_2(t,x,z)\,dxw_1dz=0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial \theta_2}{\partial t} w_2(z;x)dx + \int_0^R u \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R) =$$

$$= -\int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R), \quad t \in (0,T),$$

$$\theta_1|_{t=0} = 0, \ \ \theta_2|_{t=0} = 0. \tag{66}$$

На каждом шаге определения $(n+1)$-го приближения u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (47), (46) определим функцию $\widetilde{p}(u_{n+1}) = (\widetilde{p}_1(u_{n+1}), \widetilde{p}_2(u_{n+1}))$ как решение задачи: определить функцию $\widetilde{p}(u_{n+1}) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z;x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial t} w_1(z)dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \widetilde{p}_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R \frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t} dx w_1(z)dz = 0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial t} w_2(z;x)dx + \int_0^R u \frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} dx - u\frac{\partial \widetilde{p}_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R) =$$

$$= -\int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} dx + \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z;R), \ t \in (0,T),$$

$$\widetilde{p}_1|_{t=0} = p_E(z), \ \ \widetilde{p}_2|_{t=0} = p_E. \tag{67}$$

Сопряженная задача имеет вид (53), на основании которого и с учетом (67), (66) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle \approx -\int_0^T\int_0^h\int_0^R \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} dxdzdt + \int_0^T\int_0^h \Delta u \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} \psi_2(t,R,z)dzdt .$$

Следовательно,
$$J'_{u_n} \approx -\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} \psi_2(t,R,z).$$

ИДЕНТИФИКАЦИИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть состояние системы описывается начально-краевой задачей

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} - \beta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t,x,z)dx, \ z \in (0,h), \ t \in (0,T),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \ \ x \in (0,R), \ \ z \in (0,h), \ t \in (0,T), \tag{68}$$

$$p_1(0,z) = u_1(z), \ \ p_2(0,x,z) = u_2(x,z), \ \ p_1|_{z=0} = 0, \ \ \frac{\partial p_1}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \ \ p_2(t,x,z)|_{x=R} = p_1(t,z),$$

где $u_1(z), u_2(x,z)$ неизвестны.

Пусть равенствами (45) заданы следы решения $U = (p_1(t,z), p_2(t,x,z))$ задачи (68).

Определение 14. При каждом фиксированном $u = (u_1(z), u_2(x,z)) \in \mathcal{U} = C([0,h]) \times C([0,R]\times[0,h])$ обобщенным (слабым) решением начально-краевой задачи (68) называется вектор-функция $U = (p_1(t,z), p_2(t,x,z)) \in H$, которая $\forall (w_1(z), w_2(z;x)) \in H_0$ удовлетворяет равенствам

$$\int_0^h \frac{\partial p_1}{\partial t} w_1(z)dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial p_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z} dz + \int_0^h \beta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R p_2(t, x, z)dx w_1(z)dz = 0,$$

$$\int_0^R \frac{\partial p_2}{\partial t} w_2(z; x)dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial w_2}{\partial x} dx - b_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} w_2(z; R) = 0,$$

$$p_1(0, z) = u_1(z),\ p_2(0, x, z) = u_2(x, z). \qquad (69)$$

Полученную задачу (69), (45) будем решать с помощью градиентных методов (36), (37). На каждом шаге итерационного процесса (36) сопряженная задача имеет вид

$$-\int_0^h \frac{\partial \psi_1(t, z)}{\partial t} w_1(z)dz + \int_0^h b_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial w_1}{\partial z} dz = \sum_{i=1}^m (p_1(u_n; t, d_i) - f_i\ (t))\, w_1(d_i),\ t \in (0, T],$$

$$\begin{gathered} -\int_0^R \frac{\partial \psi_2(t, x, z)}{\partial t} w_2(z; x)dx + \int_0^R b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\frac{\partial w_2(z; x)}{\partial x} dx - \\ -b_2 \frac{\partial w_2}{\partial x}\bigg|_{x=R} \psi_2(z; R) + \beta \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^R w_2 dx \psi_1(t, z) = 0,\ \psi_1|_{t=T} = 0,\ \psi_2|_{t=T} = 0. \end{gathered} \qquad (70)$$

На основании (70) с учетом (69) получаем

$$\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \rangle = \int_0^h \Delta u_1 \psi_1(0, z)dz + \int_0^h\int_0^R \Delta u_2 \psi_2(0, x, z)dxdz.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \{\tilde{\psi}_n^i\}_{i=1}^2$, $\tilde{\psi}_n^1 = \psi_1(0, z)$, $\tilde{\psi}_n^2 = \psi_2(x, z)$, $\| J'_{u_n} \|^2 = \int_0^h (\tilde{\psi}_n^1)^2 dz + \int_0^h\int_0^R (\tilde{\psi}_n^2)^2 dxdz$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петрик М.Р. Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа «фильтрация-консолидация» // Пробл. управления и информатики. — 2010. — № 2. — С. 74–85.
2. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. — New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. — 400 p.
3. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1988. — 288 с.
4. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — Киев: Наук. думка, 2009. — 640 с.
5. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Системный анализ упругих и термоупругих неоднородных тел. — Киев: Наук. думка, 2012. — 512 с.

Поступила 18.07.2013