

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАССЕЯНИЯ ВОЛН ИМПЕДАНСНОЙ РЕШЕТКОЙ¹

Аннотация. Предложено развитие численно-аналитического метода решения задачи рассеяния акустических и электромагнитных волн импедансной решеткой. Задача приводит к третьей краевой задаче для двумерного уравнения Гельмгольца с дополнительными условиями. Краевая задача сведена к граничным интегральным уравнениям, представлена модификация метода дискретных особенностей для их численного решения. Получены зависимости интегральной характеристики решений задачи от частоты.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, третья краевая задача, импеданс, интегральное уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Дифракционное рассеяние и отражение волн решетками широко используется в различных областях физики. На этом основана работа современных технических устройств, связанных с процессами излучения, приема и передачи акустических волн и радиоволн. Это обуславливает актуальность изучения таких волновых процессов.

При решении прикладных задач радиофизики, оптики и акустики важную роль играют рассеивающие свойства решеток. Для их исследования существует две возможности: проведение физических и численных экспериментов. Первые основаны на исследовании материальных моделей, а вторые опираются на математические модели. Отметим, что проведение физических экспериментов часто связано с техническими и экономическими трудностями, которых можно избежать, используя математические модели. Таким образом, построение математических моделей и разработка новых методов решения соответствующих задач рассеяния и дифракции являются актуальными, значимыми и востребованными.

Существует много публикаций, в которых представлены математические модели рассеяния и дифракции волн, основанные на применении различных методов решения соответствующих задач [1–10]. Однако некоторые из этих методов имеют ограничения в применении, связанные с диапазоном параметров, а некоторые методы недостаточно эффективны.

Цель настоящей статьи — презентация нового численно-аналитического метода решения задачи рассеяния стационарных электромагнитных волн импедансной решеткой и математической модели процесса рассеяния и дифракции, построенной на основе этого метода; демонстрация результатов численного анализа рассеивающих способностей решеток различных конфигураций. Особое внимание уделено исследованию особенностей рассеяния решетками с предфрактальными образующими.

Под импедансной решеткой здесь понимается конечное множество бесконечных идеально тонких лент с непересекающимися образующими и параллельными направляющими. Импеданс решетки, характеризующий ее проводящую и отражающую способности, учитывается в граничном условии. Решетка размещена так, что волновой вектор лежит в плоскости, перпендикулярной направляющим лент.

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда имени Н.И. Ахиезера (2014).

Обозначим \mathbf{E}^0 вектор напряженности электрического поля, \mathbf{H}^0 — вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{k} — волновой вектор, $|\mathbf{k}| = k$. Зависимость полей от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$, где ω — угловая частота, t — время; $\omega = kc$, где k — волновое число, c — скорость света. Волновое число связано с длиной волны, обозначенной λ , следующей зависимостью: $k = 2\pi/\lambda$.

Задача рассеяния электромагнитных волн состоит в нахождении компонент электрической \mathbf{E} и магнитной \mathbf{H} составляющих отраженного поля. Обозначим \mathbf{E}^* вектор напряженности полного электрического поля, а вектор напряженности полного магнитного поля — через \mathbf{H}^* . Тогда по принципу суперпозиции $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^0 + \mathbf{E}$ и $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}$.

Все компоненты электрической и магнитной составляющих удовлетворяют стационарным уравнениям Максвелла, которые в данном случае сведены к двум уравнениям Гельмгольца относительно первых компонент \mathbf{E} и \mathbf{H} . Остальные компоненты векторов выражены через искомые компоненты. Таким образом, для решения этой задачи рассеяния необходимо решить две различные третьи краевые задачи для уравнения Гельмгольца с дополнительными условиями. Эти задачи единообразно сведены к двум граничным интегральным уравнениям второго рода относительно функций, определенных на образующих решетки. Одно из них — гиперсингулярное получено и представлено впервые. Второе уравнение — логарифмическое было получено и исследовано ранее. Для решения этого гиперсингулярного интегрального уравнения был разработан численный метод, который представлен в статье; для решения уравнения с логарифмической особенностью применен известный метод.

В заключительной части работы представлены результаты численных экспериментов, которые позволяют судить об особенностях и эффектах рассеяния электромагнитных волн решетками с различными образующими. Особое внимание уделено решеткам с предфрактальными образующими. Было проведено сравнение решений, полученных по методу, представленному в [11], с решениями, полученными по предложенному методу; решения оказались близкими.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Правая прямоугольная система координат введена так, что решетка лежит в плоскости xOy и ось x параллельна направляющим лент. Пусть $\bigcup_{q=1}^m (a_q, b_q)$, где $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < +\infty$, — набор образующих решетки; обозначим L сечение решетки плоскостью yOz . Таким образом, решетка — это множество $\{x \in \mathbb{R}, y \in L, z = 0\}$.

Во введенной системе координат векторы электромагнитного поля примут следующий вид: $\mathbf{k}(y, z) = (0, k \sin \alpha, -k \cos \alpha)$, где α — угол между ортом оси z и $\mathbf{k}(y, z)$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $\mathbf{E}^0(y, z, t) = \mathbf{E}^0(y, z)e^{-i\omega t} = (E_x^0(y, z), E_y^0(y, z), E_z^0(y, z))e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}^0(y, z, t) = \mathbf{H}^0(y, z)e^{-i\omega t} = (H_x^0(y, z), H_y^0(y, z), H_z^0(y, z))e^{-i\omega t}$. Модули векторов напряженности электрического и магнитного полей взаимосвязаны: $\sqrt{\varepsilon_0} |\mathbf{E}^0(y, z)| = \sqrt{\mu_0} |\mathbf{H}^0(y, z)|$, где ε_0 — электрическая постоянная, μ_0 — магнитная постоянная. Искомые векторы электромагнитного поля примут следующий вид: $\mathbf{E}(y, z, t) = \mathbf{E}(y, z)e^{-i\omega t} = (E_x(y, z), E_y(y, z), E_z(y, z))e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}(y, z, t) = \mathbf{H}(y, z)e^{-i\omega t} = (H_x(y, z), H_y(y, z), H_z(y, z))e^{-i\omega t}$. Векторы напряженности полного электромагнитного поля примут вид $\mathbf{E}^*(y, z) = \mathbf{E}^0(y, z) + \mathbf{E}(y, z)$, $\mathbf{H}^*(y, z) = \mathbf{H}^0(y, z) + \mathbf{H}(y, z)$.

Искомые компоненты $\mathbf{E}(y, z)$ и $\mathbf{H}(y, z)$ связаны с решениями задач рассеяния E -поляризованной волны и H -поляризованной волны. В первой задаче ищется $E_x(y, z)$ — единственная отличная от нуля компонента $\mathbf{E}(y, z)$. Две отличные от нуля компоненты $\mathbf{H}(y, z)$ связаны с $E_x(y, z)$ следующими зависимостями: $H_y(y, z) = \frac{1}{i\omega\mu\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(y, z)$ и $H_z(y, z) = -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0} \frac{\partial}{\partial y} E_x(y, z)$, где μ — магнитная проницаемость среды; $E_x^0(y, z) = e^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$ — единственная отличная от нуля компонента $\mathbf{E}^0(y, z)$. Во второй задаче ищется $H_x(y, z)$ — единственная отличная от нуля компонента $\mathbf{H}(y, z)$. Две отличные от нуля компоненты $\mathbf{E}(y, z)$ связаны с $H_x(y, z)$ следующими зависимостями: $E_y(y, z) = -\frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_x(y, z)$ и $E_z(y, z) = \frac{1}{i\omega\epsilon\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} H_x(y, z)$, где ϵ — магнитная проницаемость среды; $H_x^0(y, z) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$ — единственная отличная от нуля компонента $\mathbf{H}^0(y, z)$.

На решетке выполнено граничное условие Щукина и Леонтовича, моделирующее проводящую способность материала, из которого изготовлены ленты [12–15]. Оно имеет следующий вид:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}^*(y, z)]|_{y \in L, z=0} = - (Z(y, z) \cdot [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}^*(y, z)]])|_{y \in L, z=0}, \quad (1)$$

где квадратными скобками с вертикальной чертой обозначено покомпонентное предельное значение векторного произведения при стремлении z к нулю по нормали к оси y , а $Z(y, z)$ — характеристический импеданс. Здесь $Z(y, z) = Z$, если (y, z) принадлежит $\{y \in L, z=0\}$, и $Z(y, z) = Z_0$, если (y, z) принадлежит $\{y \in \mathbb{R} \setminus L, z \in \mathbb{R}\}$; Z — комплексный параметр, моделирующий проводящую способность лент, Z_0 — импеданс вакуума, величина которого численно равна $\sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$.

В условиях задачи рассеяния E -поляризованной волны условие (1) примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} E_x^*(y, z) + h_E E_x^*(y, z) \right] \Big|_{y \in L, z=0} = 0, \quad (2)$$

где $h_E = \frac{i\omega\mu\mu_0}{Z(y, z)}$. В условиях задачи рассеяния H -поляризованной волны условие (1) примет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} H_x^*(y, z) + h_H H_x^*(y, z) \right] \Big|_{y \in L, z=0} = 0, \quad (3)$$

где $h_H = i\omega\epsilon\epsilon_0 Z(y, z)$. Таким образом, для решения обеих задач рассеяния и дифракции необходимо решить две различные третьи краевые задачи для уравнения Гельмгольца.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $u_0(y, z)$ — первая компонента $\mathbf{E}^0(y, z)$ в случае рассеяния E -поляризованной волны и $u_0(y, z)$ — первая компонента $\mathbf{H}^0(y, z)$ в случае рассеяния H -поляризованной волны. Тогда $u_0(y, z)$ примет следующий вид: $u_0(y, z) =$

$= de^{ik(y \sin \alpha - z \cos \alpha)}$, где соответственно $d=1$ или $d = \sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}$ в зависимости от рассматриваемого случая. Пусть $u(y, z)$ — искомая компонента, ее сужения на верхнюю и нижнюю полуплоскости обозначены соответственно $u^+(y, z)$ и $u^-(y, z)$. Для единообразия коэффициент в (2) и (3) обозначен h .

Итак, искомые функции удовлетворяют следующим соотношениям:
— уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^\pm(y, z) + k^2 u^\pm(y, z) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad z > 0, \quad z < 0, \quad (4)$$

— условиям сопряжения

$$u^+(y, z)|_{z=0} = u^-(y, z)|_{z=0}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial u^+(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u^-(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}, \quad (6)$$

— граничным условиям

$$\left. \frac{\partial u^+(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} - hu^+(y, z)|_{z=0} = - \left(\left. \frac{\partial u_0(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} - hu_0(y, z)|_{z=0} \right), \quad y \in L, \quad (7)$$

$$\left. \frac{\partial u^-(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + hu^-(y, z)|_{z=0} = - \left(\left. \frac{\partial u_0(y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} + hu_0(y, z)|_{z=0} \right), \quad y \in L, \quad (8)$$

— условиям Зоммерфельда

$$u^\pm(y, z) = O \left(\frac{1}{\sqrt[4]{y^2 + z^2}} \right), \quad \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^\pm(y, z)}{\partial z} - iku^\pm(y, z) = o \left(\frac{1}{\sqrt[4]{y^2 + z^2}} \right), \quad \sqrt{y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

— условию Майкснера [17, 18] — для любой области Ω из $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\{y \in L, z = 0\}}$ имеем

$$\int_{\Omega} (|u^\pm(y, z)| + |\nabla u^\pm(y, z)|) dydz < \infty. \quad (11)$$

Отметим, что условия (9)–(11) обеспечивают единственность решения поставленной задачи; в статье предложен метод получения решения этой задачи. Таким образом, если решение задачи (4)–(11) существует, то оно единственно, что является основой дальнейших рассуждений.

Решение задачи (4)–(11) ищется в следующем виде:

$$u^\pm(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^\pm(\lambda) e^{i\lambda y \mp \gamma(\lambda)z} d\lambda. \quad (12)$$

Здесь $C^+(\lambda)$ и знак минус в показателе экспоненты берется при $z > 0$, а $C^-(\lambda)$ и знак плюс — при $z < 0$; $\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$. Ветвь радикала выбрана так, что $\operatorname{Re} \gamma(\lambda) \geq 0$, а $\operatorname{Im} \gamma(\lambda) \leq 0$. Таким образом, обеспечено выполнение условий (9) и (10).

ПАРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача (4)–(11) сведена к двум парным интегральным уравнениям [11], представляющим две системы интегральных уравнений относительно $(C^+(\lambda) - C^-(\lambda))$ и $(C^+(\lambda) + C^-(\lambda))$ соответственно. Пусть $\Phi^+(\lambda) = C^+(\lambda) + C^-(\lambda)$ и $\Phi^-(\lambda) = C^+(\lambda) - C^-(\lambda)$. Тогда парные интегральные уравнения примут соответственно вид

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) (\gamma(\lambda) + h) e^{i\lambda y} d\lambda = -2hde^{iky \sin \alpha}, & y \in L, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda = 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) (\gamma(\lambda) + h) e^{i\lambda y} d\lambda = -2ik \cos \alpha de^{iky \sin \alpha}, & y \in L. \end{cases} \quad (14)$$

Подлежащие определению функции $\Phi^+(\lambda)$ и $\Phi^-(\lambda)$ ищутся в классе, который определяется условием (11).

ГРАНИЧНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Парное интегральное уравнение (13) сведено к граничному интегральному уравнению второго рода с логарифмической особенностью на системе интервалов [11]. Пусть $F^+(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\lambda) \gamma(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, y \in \mathbb{R}$. Тогда из первой строки (13) следует, что $F^+(\lambda) = 0$ при $y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}$ и $\Phi^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi\gamma(\lambda)} \int_L F^+(t) e^{-i\lambda t} dt$.

С учетом введенных обозначений вторая строка парного интегрального уравнения (13) после интегрального преобразования и проведения алгебраических преобразований примет следующий вид:

$$F^+(y) + h \frac{1}{\pi} \int_L \ln|y-t| F^+(t) dt + h \frac{1}{\pi} \int_L Q_1(y,t) F^+(t) dt = -2hde^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L, \quad (15)$$

где $Q_1(y,t) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|y-t|) + \ln|y-t|$, а $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода с индексом нуль [19].

В соответствии с условием (11) решение интегрального уравнения (15) ищется в классе функций, сужение которых на (a_q, b_q) имеет следующий вид:

$$F^+(y)|_{y \in (a_q, b_q)} = \frac{f_q^+(y)}{\sqrt{(y-a_q)(b_q-y)}} \text{ для любого натурального } q \text{ от единицы до } m.$$

Здесь $f_q^+(y)$ — функция, непрерывная по Гёльдеру. При $y \in (a_q, b_q)$ в уравнении (15), которое разделено в сумму интегралов, только одно слагаемое имеет

особенность — интеграл по t от $\ln|y-t| \frac{f_q^+(y)}{\sqrt{(y-a_q)(b_q-y)}}$ по (a_q, b_q) . Таким образом, уравнение (15) представляется в виде системы m интегральных уравнений с логарифмическим ядром. Имеем

$$\frac{f_q^+(y)}{\sqrt{(y-a_q)(b_q-y)}} + h \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \ln|y-t| \frac{f_q^+(t)}{\sqrt{(t-a_q)(b_q-t)}} dt +$$

$$+ h \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{a_l}^{b_l} Q_{1,lq}(y,t) \frac{f_l^+(t)}{\sqrt{(t-a_l)(b_l-t)}} dt = -2hde^{iky \sin \alpha}, \quad y \in (a_q, b_q), \quad q = \overline{1, m}, \quad (16)$$

где $Q_{1,lq}(y,t) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|y-t|) + \delta_{lq} \ln|y-t|$, а δ_{lq} — символ Кронекера.

Сведем интервалы интегрирования в системе (16) к стандартному интервалу $(-1, 1)$. Пусть $s_q(\xi) = \frac{b_q - a_q}{2} \xi + \frac{b_q + a_q}{2}$. Тогда для любого натурального q от единицы до m функция $s_q(\xi)$ переводит интервал $(-1, 1)$ в интервал (a_q, b_q) . Пусть $y = s_q(\xi)$, а $t = s_q(\tau)$. Тогда система (16) примет вид

$$\frac{2}{b_q - a_q} \frac{f_q^+(s_q(\xi))}{\sqrt{1-\xi^2}} + h \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi - \tau| \frac{f_q^+(s_q(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau +$$

$$+ h \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 Q_{2,lq}(s_l(\xi), s_l(\tau)) \frac{f_l^+(s_l(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau =$$

$$= -2hde^{iks_q(\xi) \sin \alpha}, \quad \xi \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (17)$$

где $Q_{2,lq}(\xi, \tau) = Q_{1,lq}(s_l(\xi), s_l(\tau)) + \delta_{lq} \ln \left| \frac{b_l - a_l}{2} \right|$.

Пусть $v_q^+(\xi) = f_q^+(s_q(\xi))$, $Q_{3,lq}(\xi, \tau) = Q_{2,lq}(s_l(\xi), s_l(\tau))$. Тогда, умножая (17) на $\frac{b_q - a_q}{2}$, получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\frac{v_q^+(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi - \tau| v_q^+(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} +$$

$$+ \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 Q_{3,lq}(\xi, \tau) v_q^+(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} =$$

$$= -2 \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} de^{iks_q(\xi) \sin \alpha}, \quad \xi \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (18)$$

где $Q_{3,lq}(\xi, \tau) = \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} Q_{2,lq}(\xi, \tau)$.

**ГРАНИЧНОЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
НА СИСТЕМЕ ИНТЕРВАЛОВ И СООТВЕТСТВУЮЩАЯ СИСТЕМА
ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Сведем парное интегральное уравнение (14) к граничному гиперсингулярному интегральному уравнению второго рода на системе интервалов.

Пусть $F^-(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда из первой строки парного интегрального уравнения (14) следует, что $F^-(\lambda) = 0$ при $y \in \mathbb{R} \setminus \bar{L}$ и $\Phi^-(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_L F^-(t) e^{-i\lambda t} dt$. К $\gamma(\lambda)$ применим следующее тождественное преобразование: $\gamma(\lambda) = |\lambda| - \frac{k^2}{2\gamma(\lambda)} + \frac{k^4}{2\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2}$. Тогда вторая строка (14) примет вид

$$\begin{aligned} & h \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) |\lambda| e^{i\lambda y} d\lambda - \frac{k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda + \\ & + \frac{k^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} e^{i\lambda y} d\lambda = -2ik \cos \alpha de^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе и третье слагаемые в левой части уравнения (19) связаны с $F^-(y)$ следующими интегральными преобразованиями [21]:

$$\begin{cases} F^-(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) |\lambda| e^{i\lambda y} d\lambda = -\frac{1}{\pi} \int_L \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} F^-(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda) e^{i\lambda y} d\lambda, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{i}{2} \int_L H_0^{(1)}(k|y-t|) F^-(t) dt. \end{cases} \quad (21)$$

Четвертое слагаемое в левой части (19) связано с $F^-(y)$ следующим образом:

$$\frac{k^4}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^-(\lambda)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} e^{i\lambda y} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{k^4}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} d\lambda F^-(t) dt. \quad (22)$$

С учетом (20)–(22) уравнение (19) примет вид

$$\begin{aligned} & hF^-(y) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt - \frac{k^2}{2} \int_L H_0^{(1)}(k|y-t|) F^-(t) dt + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{k^4}{2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda| + \gamma(\lambda))^2} d\lambda F^-(t) dt = -2ik \cos \alpha de^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L. \end{aligned} \quad (23)$$

Выделив логарифм из ядра третьего слагаемого в левой части уравнения (23) — $H_0^{(1)}(k|y-t|)$, получим следующее уравнение, которое соответствует стандартному виду гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода на системе интервалов:

$$hF^-(y) - \frac{1}{\pi} \int_L \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt - \frac{k^2}{2\pi} \int_L \ln|y-t| F^-(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_L K_1(y,t) F^-(t) dt = -2ik \cos \alpha de^{iky \sin \alpha}, \quad y \in L, \quad (24)$$

где $K_1(y,t) = \frac{k^4}{2} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda|+\gamma(\lambda))^2} d\lambda - \frac{k^2}{2} \left(i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|y-t|) + \ln|y-t| \right)$.

При $y \in (a_q, b_q)$ в уравнении (24), разделенном в сумму интегралов, только два слагаемых имеют особенность: интегралы по t от $\frac{F^-(t)}{(t-y)^2}$ и $\ln|y-t| F^-(t)$ по

(a_q, b_q) . Таким образом, уравнение (24) представляется в виде системы m гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода. Эта система имеет вид

$$hF^-(y) - \frac{1}{\pi} \int_{a_q}^{b_q} \frac{F^-(t)}{(t-y)^2} dt - \frac{k^2}{2\pi} \int_{a_q}^{b_q} \ln|y-t| F^-(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{a_l}^{b_l} K_2(y,t) F^-(t) dt = -2ik \cos \alpha de^{iky \sin \alpha}, \quad y \in (a_q, b_q), \quad q = \overline{1, m}, \quad (25)$$

где

$$K_2(y,t) = \frac{k^4}{2} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda(y-t)}{\gamma(\lambda)(|\lambda|+\gamma(\lambda))^2} d\lambda - \frac{k^2}{2} \left(i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(k|y-t|) + \delta_{lq} \ln|y-t| - \frac{2}{k^2} \frac{(1-\delta_{lq})}{(t-y)^2} \right).$$

Далее сведем интервалы интегрирования в системе (25) к стандартному интервалу $(-1,1)$. Пусть, как и выше, $y = s_q(\xi)$, $t = s_q(\tau)$, а $x = \lambda/k$. Тогда система (25) после алгебраических преобразований примет следующий вид:

$$\frac{h}{\omega} c k \frac{b_q - a_q}{2} F^-(s_q(\xi)) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{F^-(s_q(\tau))}{(\tau - \xi)^2} d\tau - \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \ln|\tau - \xi| F^-(s_q(\tau)) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 K_{2,lq}(\xi, \tau) F^-(s_l(\tau)) d\tau = -2ik \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha de^{iks_q(\xi) \sin \alpha}, \quad \xi \in (-1,1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (26)$$

где

$$K_{2,lq}(\xi, \tau) = \frac{k^2}{2} \frac{b_q - a_q}{2} \frac{b_l - a_l}{2} (K_{2,lq}^1(\xi, \tau) - K_{2,lq}^2(\xi, \tau)),$$

$$K_{2,lq}^1(\xi, \tau) = \int_0^1 \frac{\cos\left(xk \frac{b_l - a_l}{2} (\tau - \xi)\right)}{i\sqrt{1-x^2} (i\sqrt{1-x^2} - x)^2} dx + \int_1^\infty \frac{\cos\left(xk \frac{b_l - a_l}{2} (\tau - \xi)\right)}{\sqrt{x^2 - 1}(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} dx,$$

$$K_{2,lq}^2(\xi, \tau) = i \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}\left(k \frac{b_l - a_l}{2} |\tau - \xi|\right) +$$

$$+ \delta_{lq} \ln \left| \frac{b_l - a_l}{2} (\tau - \xi) \right| - \left(\frac{1}{k} \frac{2}{b_l - a_l} \right)^2 \frac{1 - \delta_{lq}}{(\tau - \xi)^2}.$$

В соответствии с условием (11) решение системы (26) ищется в классе функций, сужение которых на (a_q, b_q) имеет вид $F^-(s_q(\xi))|_{\xi \in (-1,1)} = v_q^-(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}$ для любого натурального q от единицы до m . Здесь $v_q^-(\xi)$ — функция, которая имеет производную, непрерывную по Гёльдеру. Таким образом, система (26) примет следующий вид:

$$\frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} v_q^-(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_q^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2}}{(\tau - \xi)^2} d\tau -$$

$$- \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 \int_{-1}^1 \ln |\tau - \xi| v_q^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 K_{2,lq}(\xi, \tau) v_l^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau =$$

$$= -2ik \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha d e^{iks_q(\xi) \sin \alpha}, \quad \xi \in (-1,1), \quad q = \overline{1, m}. \quad (27)$$

ДИСКРЕТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Проведем дискретизацию систем интегральных уравнений (18) и (27): построим соответствующие системы линейных алгебраических уравнений.

Решением системы интегральных уравнений (18) является $(v_q^+(\xi))_{q=1}^m$. Полагаем, что приближенное решение системы (18) имеет вид $(v_{q,n_q}^+(\xi))_{q=1}^m$, где $v_{q,n_q}^+(\xi)$ — интерполяционный полином степени n_q . Левая часть каждого уравнения системы (18) представляет сумму трех линейных операторов. В [22] показано, что первый и третий операторы, действуя на полином, не сохраняют его степень, а второй — сохраняет. Здесь введена система интегральных уравнений относительно приближенного решения системы уравнений (18), где в каждом уравнении первое и третье слагаемые — операторы, сохраняющие степень полинома и близкие по норме к соответствующим слагаемым. В [9, 10] показано, каким образом строятся такие операторы, введены соответствующие функциональные пространства и даны оценки норм разности соответствующих операторов.

Правая часть q -го уравнения системы интегральных уравнений относительно приближенного решения — интерполяционный полином степени n_q . Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_q} \frac{v_{q,n_q}^+(t_k^{n_q})}{\sqrt{1-(t_k^{n_q})^2}} l_{n_q-1,k}^I(\xi) + \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|\xi - \tau| v_{q,n_q}^+(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 Q_{4,lq,n_l}(\xi, \tau) v_{l,n_l}^+(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \\ & = -2 \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} d \sum_{k=1}^{n_q} e^{iks_q(t_k^{n_q}) \sin \alpha} l_{n_q-1,k}^I(\xi), \quad \xi \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $l_{n_q-1,k}^I(\xi) = \frac{T_{n_q}(\xi)}{T'_{n_q}(t_k^{n_q})(\xi - t_k^{n_q})}$ — базисный полином, $T_{n_q}(\xi)$ — полином

Чебышева первого рода степени n_q , а $\{t_k^{n_q}\}_{k=1}^{n_q}$ — его корни, $t_k^{n_q} = \cos \frac{2k-1}{2n_q} \pi$,

$k = \overline{1, n_q}$; $Q_{4,lq,n_l}(\xi, \tau)$ — интерполяционный полином $Q_{4,lq}(\xi, \tau)$ с узлами $\{t_k^{n_l}\}_{k=1}^{n_l}$ по каждой переменной, $Q_{4,lq,n_l}(t_j^{n_l}, t_k^{n_l}) = Q_{4,lq}(t_j^{n_l}, t_k^{n_l})$, $j = \overline{1, n_q}$,

$k = \overline{1, n_q}$. Обозначим $a_{jk,n_p}^{(1)} = \frac{l_{n_q-1,k}^I(t_j^{n_p})}{\sqrt{1-(t_k^{n_q})^2}}$, $j = \overline{1, n_p}$, $k = \overline{1, n_q}$.

Для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа [22]. В результате их применения левая часть q -го уравнения системы (28) станет полиномом степени n_q . Правая часть q -го уравнения системы (28) по построению является полиномом степени n_q . Совпадения левой и правой частей q -го уравнения системы (28) в n_q различных точках — $\{t_j^{n_q}\}_{j=1}^{n_q}$ необходимо и достаточно для их тождественного равенства. Таким образом, решение системы (28) связано с решением следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно $\left((v_{q,n_q}^+(t_k^{n_q}))_{k=1}^{n_q} \right)_{q=1}^m$:

$$\sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{n_q} a_{jk,n_q n_p} v_{q,n_q}^+(t_k^{n_q}) = a_{jp}, \quad j = \overline{1, n_p}, \quad p = \overline{1, m}, \quad (29)$$

где $a_{jk,n_q n_p} = a_{jk,n_q n_p}^{(1)} - \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} a_{jk,n_q n_p}^{(2)} + a_{jk,n_q n_p}^{(3)}$, сомножитель $a_{jk,n_q n_p}^{(1)}$

определен выше, $a_{jk,n_q n_p}^{(2)} = -\frac{1}{n_q} \left(\ln 2 + \sum_{M=1}^{n_q-1} \frac{T_M(t_j^{n_p}) T_M(t_k^{n_q})}{M} \right)$, $a_{jk,n_q n_p}^{(3)} =$

$= \frac{1}{n_q} Q_{4,lq,n_q}(t_j^{n_p}, t_k^{n_q})$, $a_{jp} = -2 \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} d e^{iks_q(t_j^{n_q}) \sin \alpha}$. Таким образом, име-

ет место следующая теорема.

Теорема 1. Интерполяционный полином, построенный по решению системы линейных алгебраических уравнений (29), является решением системы интегральных уравнений (28).

Решением системы интегральных уравнений (27) является $(v_q^-(\xi))_{q=1}^m$. Полагаем, что приближенное решение системы (27) имеет вид $(v_{q,n_q-2}^-(\xi))_{q=1}^m$, где $v_{q,n_q-2}^-(\xi)$ — интерполяционный полином степени $(n_q - 2)$. Левая часть каждого уравнения системы (27) представляет сумму четырех линейных операторов. В [9, 10] показано, что первый, третий и четвертый операторы, действуя на полином, не сохраняют его степень, а второй оператор — сохраняет. Здесь введена система интегральных уравнений относительно приближенного решения системы уравнений (27), где в каждом уравнении первое, третье и четвертое слагаемые — операторы, сохраняющие степень полинома и близкие по норме соответствующим слагаемым. В [9, 10] показано, как строятся такие операторы, введены соответствующие функциональные пространства и даны оценки норм разности соответствующих операторов.

Правая часть системы интегральных уравнений относительно приближенного решения — интерполяционный полином степени $(n_q - 2)$. Эта система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} \sum_{k=1}^{n_q-1} v_{q,n_q-2}^-(t_{0k}^{n_q}) \sqrt{1 - (t_{0k}^{n_q})^2} l_{n_q-2,k}^{II}(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{v_{q,n_q-2}^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2}}{(\tau - \xi)^2} d\tau - \\ & - \frac{k^2}{2} \left(\frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 (B_{n_q-2} v_{q,n_q-2}^-)(\xi) + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^m \int_{-1}^1 K_{2,lq,n_l-2}(\xi, \tau) v_{l,n_l-2}^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau = \\ & = -2ik \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha d \sum_{k=1}^{n_q-1} e^{iks_q(t_{0k}^{n_q}) \sin \alpha} l_{n_q-2,k}^{II}(\xi), \quad \xi \in (-1, 1), \quad q = \overline{1, m}, \quad (30) \end{aligned}$$

где $l_{n_q-2,k}^{II}(\xi) = \frac{U_{n_q-1}(\xi)}{U'_{n_q-1}(t_{0k}^{n_q})(\xi - t_{0k}^{n_q})}$ — базисный полином, $U_{n_q-1}(\xi)$ — полином Чебышева второго рода степени $(n_q - 1)$, а $\{t_{0k}^{n_q}\}_{k=1}^{n_q-1}$ — его корни,

$t_{0k}^{n_q} = \cos \frac{k}{n_q} \pi$, $k = \overline{1, n_q - 1}$; B_{n_q-2} — линейный оператор, который определен

следующим образом: $(B_{n_q-2} v_{q,n_q-2}^-)(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\ln |\tau - \xi| - \frac{2T_{n_q-1}(\xi)T_{n_q-1}(\tau)}{n_q - 1} - \frac{2T_{n_q}(\xi)T_{n_q}(\tau)}{n_q} \right) v_{q,n_q-2}^-(\tau) \sqrt{1 - \tau^2} d\tau$; $K_{2,lq,n_l-2}(\xi, \tau)$ — интерполяционный

полином $K_{2,lq}(\xi, \tau)$ с узлами $\{t_{0k}^{n_l}\}_{k=1}^{n_l-1}$ по каждой переменной, $K_{2,lq,n_l-2}(t_{0j}^{n_l}, t_{0k}^{n_l}) = K_{2,lq}(t_{0j}^{n_l}, t_{0k}^{n_l})$, $j = \overline{1, n_l - 1}$, $k = \overline{1, n_l - 1}$. Обозначим $b_{jk,n_q n_p}^{(1)} = \sqrt{1 - (t_{0k}^{n_q})^2} l_{n_q-2,k}^{II}(t_{0j}^{n_p})$, $j = \overline{1, n_q - 1}$, $k = \overline{1, n_p - 1}$.

Для построения дискретной математической модели используются квадратурные формулы интерполяционного типа [22]. В результате их применения левая часть q -го уравнения системы (30) станет полиномом степени $(n_q - 2)$. Правая часть q -го уравнения этой системы по построению является полиномом степени $(n_q - 2)$.

Совпадения левой и правой частей q -го уравнения системы (30) в $(n_q - 2)$ различных точках — $\{t_j^{n_q}\}_{j=1}^{n_q}$ необходимо и достаточно для их тождественного равенства. Таким образом, решение системы (30) связано с решением следующей системы линейных алгебраических уравнений относительно $\left((v_{q,n_q-2}^-(t_{0k}^{n_q}))_{k=1}^{n_q-1} \right)_{q=1}^m$:

$$\sum_{q=1}^m \sum_{k=1}^{n_q-1} b_{jk,n_q n_p} v_{q,n_q-2}^-(t_{0k}^{n_q}) = b_{jp}, \quad j = \overline{1, n_p-1}, \quad p = \overline{1, m}, \quad (31)$$

где $b_{jk,n_q n_p} = \frac{h}{\omega} ck \frac{b_q - a_q}{2} b_{jk,n_q n_p}^{(1)} - b_{jk,n_q n_p}^{(2)} + \left(k \frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 b_{jk,n_q n_p}^{(3)} + b_{jk,n_q n_p}^{(4)}$,

сомножитель $b_{jk,n_q n_p}^{(1)}$ определен выше; $b_{jk,n_q n_p}^{(2)} = \frac{1}{n(t_{0j}^{n_p} - t_{0k}^{n_q})} \left(1 - (t_{0k}^{n_q})^2 \right) \times$

$\times ((-1)^{k+j+1} + 1)$, если $k \neq j$, и $b_{jk,n_q n_p}^{(2)} = -\frac{n_q}{2}$, если $k = j$; $b_{jk,n_q n_p}^{(3)} = \frac{1}{n_q} ((t_{0k}^{n_q})^2 - 1) \times$

$\times \left(\ln 2 + 2 \sum_{M=1}^{n_q-1} \frac{T_M(t_{0j}^{n_p}) T_M(t_{0k}^{n_q})}{M} \right)$; $b_{jk,n_q n_p}^{(4)} = \frac{1}{n_q} (1 - (t_{0k}^{n_q})^2) K_{2,lq,n_l-2}(t_{0j}^{n_p}, t_{0k}^{n_q})$,

$b_{jp} = -2ik \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha de^{iks_q(t_{0j}^{n_q}) \sin \alpha}$. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Интерполяционный полином, построенный по решению системы линейных алгебраических уравнений (31), является решением системы интегральных уравнений (30).

Как показано выше, для решения задачи рассеяния необходимо решить две системы линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узловых точках, а именно системы (29) и (31).

При решении задачи рассеяния E -поляризованной волны коэффициенты систем (29) и (31) вычисляются по следующим формулам:

$$a_{jk,n_q n_p} = a_{jk,n_q n_p}^{(1)} - i\mu \frac{Z_0}{Z} ck \frac{b_q - a_q}{2} a_{jk,n_q n_p}^{(2)} + a_{jk,n_q n_p}^{(3)},$$

$$j = \overline{1, n_p}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n_q}, \quad q = \overline{1, m};$$

$$a_{jp} = -2i\mu \frac{Z_0}{Z} ck \frac{b_q - a_q}{2} de^{iks_q(t_j^{n_q}) \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n_p}, \quad p = \overline{1, m};$$

$$b_{jk,n_q n_p} = i\mu \frac{Z_0}{Z} ck \frac{b_q - a_q}{2} b_{jk,n_q n_p}^{(1)} - b_{jk,n_q n_p}^{(2)} + \left(k \frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 b_{jk,n_q n_p}^{(3)} + b_{jk,n_q n_p}^{(4)},$$

$$j = \overline{1, n_p-1}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n_q-1}, \quad q = \overline{1, m};$$

$$b_{jp} = -2ik \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha de^{iks_q(t_{0j}^{n_q}) \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n_p-1}, \quad p = \overline{1, m}.$$

При решении задачи рассеяния H -поляризованной волны коэффициенты систем (29) и (31) вычисляются по следующим формулам:

$$a_{jk,n_q n_p} = a_{jk,n_q n_p}^{(1)} - i\varepsilon \frac{Z}{Z_0} ck \frac{b_q - a_q}{2} a_{jk,n_q n_p}^{(2)} + a_{jk,n_q n_p}^{(3)},$$

$$j = \overline{1, n_p}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n_q}, \quad q = \overline{1, m};$$

$$a_{jp} = -2i\varepsilon \frac{Z}{Z_0^2} ck \frac{b_q - a_q}{2} de^{iks_q(t_j^{n_q}) \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n_p}, \quad p = \overline{1, m};$$

$$b_{jk,n_q n_p} = i\varepsilon \frac{Z}{Z_0} ck \frac{b_q - a_q}{2} b_{jk,n_q n_p}^{(1)} - b_{jk,n_q n_p}^{(2)} + \left(k \frac{b_q - a_q}{2} \right)^2 b_{jk,n_q n_p}^{(3)} + b_{jk,n_q n_p}^{(4)},$$

$$j = \overline{1, n_p - 1}, \quad p = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n_q - 1}, \quad q = \overline{1, m};$$

$$b_{jp} = -2 \frac{i}{Z_0} k \frac{b_q - a_q}{2} \cos \alpha de^{iks_q(t_{0j}^{n_q}) \sin \alpha}, \quad j = \overline{1, n_p - 1}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Таким образом, параметрами задачи рассеяния E -поляризованной волны являются $\left\{ \frac{b_q - a_q}{2} \right\}_{q=1}^m$, Z , α и μ ; параметрами задачи рассеяния H -поляризованной волны являются $\left\{ \frac{b_q - a_q}{2} \right\}_{q=1}^m$, Z , α и ε .

Легко увидеть, что $C^\pm(\lambda) = \frac{\Phi^+(\lambda) \pm \Phi^-(\lambda)}{2}$. Тогда с учетом связи $\Phi^+(\lambda)$ с $F^+(t)$ и $\Phi^-(\lambda)$ с $F^-(t)$ получим $C^\pm(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_L \left(\frac{1}{\gamma(\lambda)} F^+(t) \pm F^-(t) \right) e^{-i\lambda t} dt$.

Перепишем $C^\pm(\lambda)$ в следующем виде:

$$C^\pm(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^m \int_{a_q}^{b_q} \left(\frac{1}{\gamma(\lambda)} F^+(t) \pm F^-(t) \right) e^{-i\lambda t} dt.$$

Пусть $t = s_q(\xi)$, тогда

$$C^\pm(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\gamma(\lambda)} F^+(s_q(\xi)) \pm F^-(s_q(\xi)) \right) e^{-i\lambda s_q(\xi)} d\xi.$$

С учетом представлений $F^+(s_q(\xi)) = \frac{2}{b_q - a_q} \frac{v_q^+(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}$ и $F^-(s_q(\xi)) = v_q^-(\xi) \sqrt{1 - \xi^2}$

функция $C^\pm(\lambda)$ примет следующий вид:

$$C^\pm(\lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma(\lambda)} \sum_{q=1}^m \int_{-1}^1 \frac{v_q^+(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-i\lambda s_q(\xi)} d\xi \pm$$

$$\pm \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2} \int_{-1}^1 v_q^-(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} e^{-i\lambda s_q(\xi)} d\xi.$$

Используя квадратурные формулы интерполяционного типа [22], получаем

$$C^{\pm}(\lambda) = \frac{1}{4\pi\gamma(\lambda)} \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^+(t_k^{n_q}) e^{-i\lambda s_q(t_k^{n_q})} \pm \\ \pm \frac{1}{4} \sum_{q=1}^m \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{n_q - 1} \sum_{k=1}^{n_q-1} v_q^-(t_{0k}^{n_q}) e^{-i\lambda s_q(t_{0k}^{n_q})} (1 - (t_{0k}^{n_q})^2).$$

Пусть $x = \lambda / k$, тогда искомая функция $u^{\pm}(y, z)$ примет следующий вид:

$$u^{\pm}(y, z) = \frac{i}{2\pi} \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^+(t_k^{n_q}) \int_0^1 \cos k(y - s_q(t_k^{n_q}))x \frac{e^{ik\sqrt{1-x^2}z}}{\sqrt{1-x^2}} d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^+(t_k^{n_q}) \int_1^{\infty} \cos k(y - s_q(t_k^{n_q}))x \frac{e^{-k\sqrt{x^2-1}z}}{\sqrt{x^2-1}} d\lambda \mp \\ \mp \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m k \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{n_q - 1} \sum_{k=1}^{n_q-1} v_q^-(t_{0k}^{n_q}) (1 - (t_{0k}^{n_q})^2) \int_0^1 \cos(k(y - s_q(t_k^{n_q}))x) e^{ik\sqrt{1-x^2}z} d\lambda \mp \\ \mp \frac{1}{2} \sum_{q=1}^m k \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{n_q - 1} \sum_{k=1}^{n_q-1} v_q^-(t_{0k}^{n_q}) (1 - (t_{0k}^{n_q})^2) \times \\ \times \int_1^{\infty} \cos(k(y - s_q(t_k^{n_q}))x) e^{-k\sqrt{x^2-1}z} d\lambda. \quad (32)$$

Таким образом, выражение (32) по найденным решениям систем линейных алгебраических уравнений восстанавливает функцию $u^{\pm}(y, z)$ — решение (4)–(11).

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ: ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ И ПОЛЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Представленный численно-аналитический метод решения задачи рассеяния работает в широком диапазоне значений параметров и может использоваться при математическом моделировании решетчатых антенн.

Для иллюстрации полученных при различных параметрах решений и больших значениях величины $\sqrt{y^2 + z^2}$ (в дальней зоне) используется диаграмма направленности, определяемая формулой

$$D^{\pm}(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u^{\pm}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{(kr)^{-1/2} e^{i(kr - \pi/4)}}, \quad (33)$$

где $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ — зависимость переменных r и φ от переменных y и z . С помощью метода стационарной фазы [23] выражение (33) преобразовано к следующему виду:

$$D^{\pm}(\varphi) = \frac{i\sqrt{\pi}}{4\pi} (1+i) \sum_{q=1}^m \frac{1}{n_q} \sum_{k=1}^{n_q} v_q^+(t_k^{n_q}) e^{ikt_k^{n_q} \cos \varphi} \mp \\ \mp \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi} \frac{1+i}{\sin \varphi} \sum_{q=1}^m k \frac{b_q - a_q}{2} \frac{1}{n_q - 1} \sum_{k=1}^{n_q-1} v_q^-(t_{0k}^{n_q}) (1 - (t_{0k}^{n_q})^2) e^{-ikt_{0k}^{n_q} \cos \varphi}. \quad (34)$$

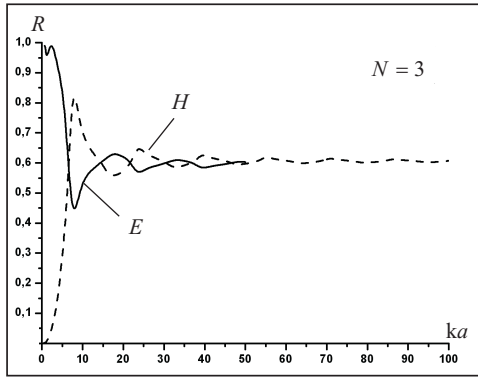


Рис. 1

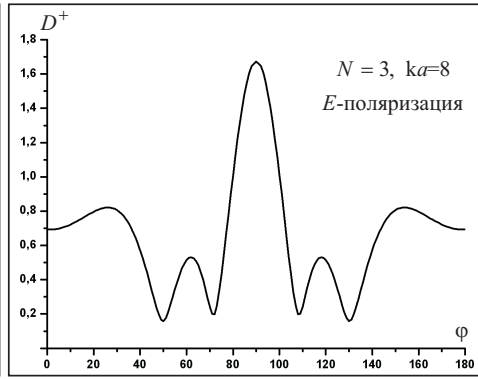


Рис. 2

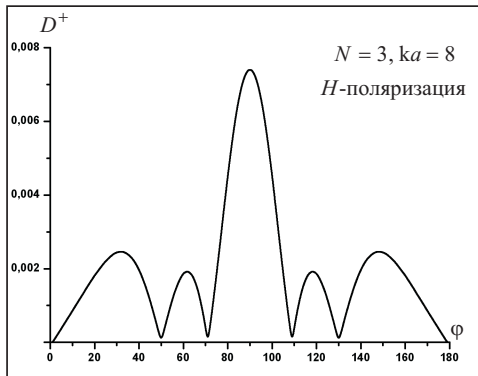


Рис. 3

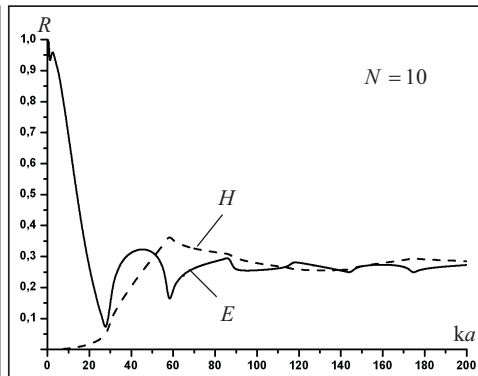


Рис. 4

Для частотного анализа отражающей способности решеток используется коэффициент рассеяния, который определен на основе (34) следующим образом:

$$R(k(b_m - a_1)) = \int_0^\pi D^+(\varphi) d\varphi / k(b_m - a_1).$$

График зависимости коэффициента рассеяния R от произведения волнового числа и ширины решетки $k(b_m - a_1)$ позволяет определить особые значения $k(b_m - a_1)$, которые соответствуют хорошо отражающимся или хорошо проходящим волнам. Назовем такие значения $k(b_m - a_1)$ резонансными.

Рассмотрим решетки различных сечений. На рис. 1 приведены графики зависимости коэффициента рассеяния E - и H -поляризованных волн решеткой, которая имеет плоское сечение вида $\left[-a, -\frac{3}{5}a\right] \cup \left[-\frac{1}{5}a, \frac{1}{5}a\right] \cup \left[\frac{3}{5}a, a\right]$. Параметры задачи:

$Z = 10^{-6} - 0,002i$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. На рис. 2 приведена диаграмма направленности E -поляризованной волны при $ka = 8$, на рис. 3 — диаграмма направленности H -поляризованной волны при $ka = 8$. Заметим, что $ka = 8$ соответствует минимуму коэффициента рассеяния E -поляризованной волны и максимуму коэффициента рассеяния H -поляризованной волны. Так, диаграмма направленности на рис. 2 имеет широкие боковые лепестки, которые характерны для минимального отражения E -поляризованной волны. На рис. 3 диаграмма направленности при $ka = 8$ по сравнению с другими ka имеет короткий центральный лепесток, что характерно для максимального отражения H -поляризованной волны. Численный эксперимент показал, что диаграммы рассеяния, соответствующие минимумам коэффициента рассеяния H -поляризованной волны, не обладают широкими боковыми лепестками.

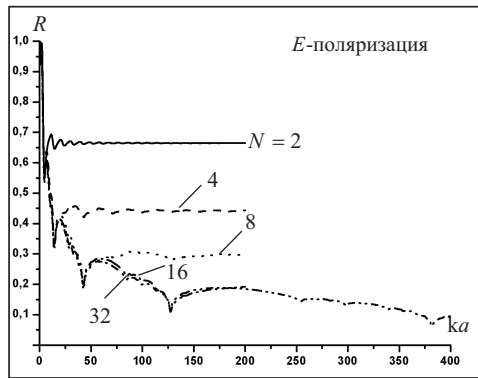


Рис. 5

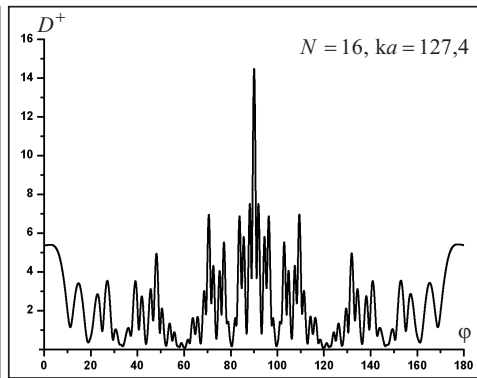


Рис. 6

На всех рисунках, иллюстрирующих зависимость коэффициента рассеяния от ka , в правом верхнем углу N обозначаем количество лент в решетке.

На рис. 4 приведены графики коэффициента рассеяния E - и H -поляризованных волн решеткой, размещенной на отрезке $[-a, a]$ и состоящей из десяти лент шириной $1/15a$. Расстояние между соседними лентами в три раза больше ширины ленты. Значения других параметров равны приведенным выше.

Графики на рис. 1 и 4 показывают, что при достаточно больших ka значения коэффициента рассеяния близки отношению суммы ширины всех лент к общей ширине решетки. Таким образом, выполняется оценка Кирхгофа, что подтверждает эффективность метода и отсутствие ошибок в численном решении задачи. Из этих графиков видно, что значение ka , соответствующее максимуму или минимуму рассеяния E -поляризованной волны, соответствует минимуму или максимуму коэффициента рассеяния H -поляризованной волны. Кроме того, коэффициенты рассеяния решеток, составленных из равноудаленных одна от другой лент одинаковой ширины, не обладают большим количеством резонансных ka .

Для решения некоторых прикладных задач необходимы решетки, имеющие достаточно большое число резонансных ka . Среди них особый интерес представляют решетки, плоским сечением которых является предфрактал. Их картина рассеяния отличается от картины рассеяния решеток, составленных из равноудаленных лент. Ниже представлены результаты исследования решеток, имеющих в сечении предфрактальные множества Кантора первого, второго, третьего, четвертого и пятого порядков, которые построены на отрезке $[-a, a]$. Порядок предфрактала соответствует шагу его построения. Предфрактальное множество Кантора первого порядка состоит из двух лент, второго порядка — из четырех, третьего порядка — из восьми, четвертого порядка — из шестнадцати и пятого порядка — из тридцати двух лент. На рис. 5 и 8 приведены графики коэффициентов рассеяния для E - и H -поляризованных волн соответственно. Параметры задачи соответствуют параметрам, приведенным выше. Оценка Кирхгофа значений коэффициента рассеяния выполняется для всех порядков предфракталов Кантора.

На рис. 6 и 7 приведены диаграммы направленности E -поляризованной волны при $ka = 127,4$ и $ka = 178$, а на рис. 9 и 10 — диаграммы направленности H -поляризованной волны при $ka = 32$ и $ka = 42,5$.

Таким образом, с ростом порядка предфрактала в случае рассеяния E -поляризованных волн коэффициент рассеяния приобретает экстремумы, а в случае рассеяния H -поляризованных волн — теряет экстремумы. График коэффициента рассеяния сглаживается и небольшие резонансы исчезают. Так, в случае рассеяния E -поляризованной волны решетка, сечением которой является предфрактал Кантора первого порядка, обладает одним существенным максимумом коэффи-

циента рассеяния. Решетка, сечением которой является предфрактал Кантора второго порядка, обладает двумя существенными максимумами. При этом первый максимум почти совпадает с характерным максимумом решетки, имеющей в сечении предфрактал Кантора первого порядка. С ростом порядка предфрактала эта закономерность сохраняется. Решетка, сечением которой является предфрактал Кантора пятого порядка, обладает пятью существенными максимумами. Все они, кроме одного, характерны для решеток, имеющих в сечении предфракталы меньшего порядка.

В случае рассеяния E -поляризованной волны высота главного лепестка диаграммы направленности, соответствующей максимуму коэффициента рассеяния, больше высоты главного лепестка диаграммы направленности, соответствующей минимуму коэффициента рассеяния. А в случае рассеяния H -поляризованной волны высота главного лепестка диаграммы направленности, соответствующей максимуму коэффициента рассеяния, меньше, чем высота главного лепестка диаграммы направленности, соответствующей минимуму коэффициента рассеяния.

Было проведено сравнение решений, полученных приведенным здесь способом, с решениями, полученными по методу, представленному в работе [11]. Оказалось, что решения очень близки — различие в четвертом и пятом знаках после запятой.

Предложенный метод позволяет моделировать различные расположения лент решетки при различных параметрах. Например, использование предфрактальных включений в решетку позволяет получить характеристики отражения и диаграммы направленности, характерные для решеток с предфрактальным сечением. Таким образом, сохраняя высокую отражающую способность решетки, можно получить достаточно большое количество экстремумов коэффициента рассеяния [24].

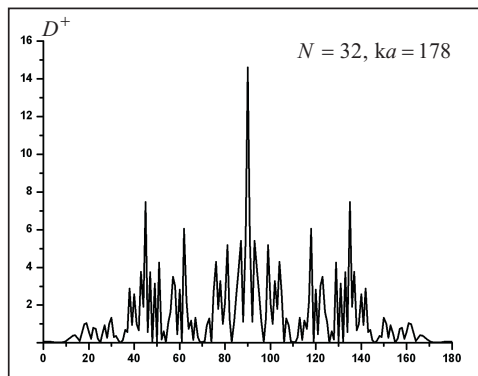


Рис. 7

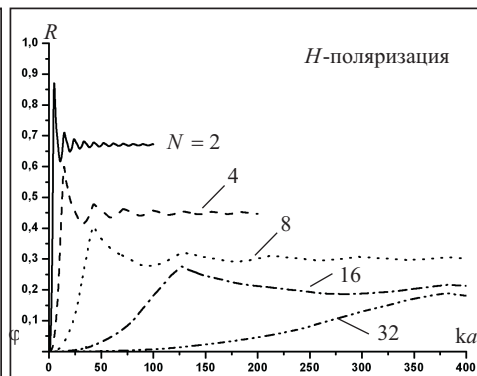


Рис. 8

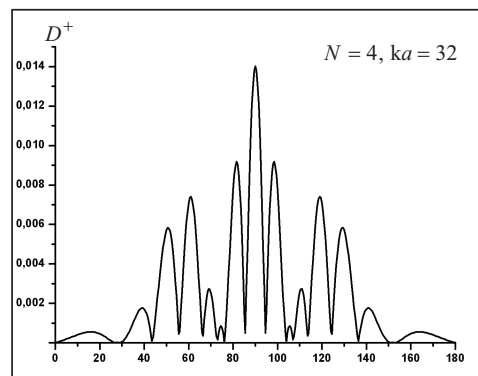


Рис. 9

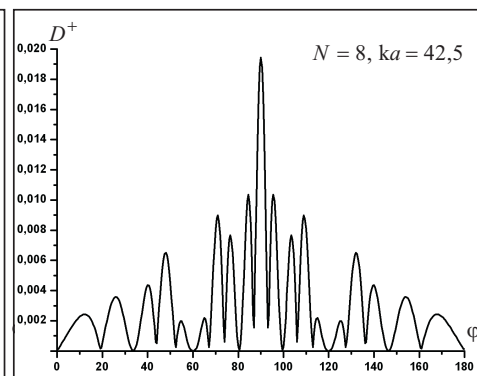


Рис. 10

Наличие параметра, характеризующего проводимость лент, позволяет моделировать антенные решетки, которые одинаково отражают E -поляризованные и H -поляризованные волны. Для этого необходимо составлять решетку из лент с различными значениями этого параметра. Для получения такого эффекта необходимо комплектовать решетку из лент с малым значением модуля Z и лент с большими значениями модуля Z . Малые значения соответствуют лентам, находящимся в сверхпроводящем состоянии и хорошо отражающим E -поляризованные волны, а большие значения — лентам из феррита, хорошо отражающим H -поляризованные волны. Также этот параметр позволяет приблизительно оценить потери от рассеяния: необходимо сравнивать решения, полученные при физически обоснованных значениях Z , с решениями соответствующих задач рассеяния идеальными проводниками [25].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый численно-аналитический метод решения третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца. Построены математические модели физических процессов рассеяния и дифракции волн. Проведен численный анализ рассеивающих способностей импедансных решеток различных сечений: классических и предфрактальных. Результаты частотного анализа дали возможность точно охарактеризовать некоторые особенности и эффекты волновых процессов рассеяния и дифракции. Представлены диаграммы направленности и графики зависимостей коэффициентов рассеяния от волновых чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. — Харьков: Изд-во Академии внутренних войск Министерства внутренних дел Украины, 2012. — 544 с.
2. Imgran A., Naqvi Q.A., Hongo K. Diffraction of electromagnetic plane wave by an impedance strip // Progress in Electromagnetics Research. — 2007. — PIER 75. — P. 303–318.
3. Гандель Ю.В., Лифанов И.К. Решение задачи дифракции электромагнитных волн на решетке из тонких сверхпроводящих лент // Электромагнитные волны и электронные системы. — 1999. — 4, № 2. — С. 15–16.
4. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. — М.: Высш. шк., 1991. — 224 с.
5. Tsalamengas J.L. Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. P. 1: TM-Case // Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Antennas and Propagation. — 2010. — 58, N 10. — P. 3265–3274.
6. Tsalamengas J.L. Exponentially converging Nystrom methods in scattering from infinite curved smooth strips. P. 2: TE-Case // Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on Antennas and Propagation. — 2010. — 58, N 10. — P. 3275–3281.
7. Гандель Ю.В., Ерёмченко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: учебное пособие. Ч. II. — Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та имени Максима Горького, 1992. — 145 с.
8. Гандель Ю.В., Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И. Рассеяние электромагнитных волн тонкой сверхпроводящей лентой // Доклады Академии наук. — 1996. — 351, № 4. — С. 462–464.
9. Гандель Ю.В., Кононенко А.С. Обоснование численного решения одного гиперсингулярного интегрального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — 42, № 9. — С. 1256–1262.

10. Костенко А. В. Численный метод решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода // Украинский математический журнал. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1228–1236.
11. Gandel Yu.V., Kravchenko V.F., Morozova N.N. Electromagnetic wave diffraction on a lattice of thin superconducting band // Electromagnetic Waves & Electronic Systems. — 1997. — **2**, N 1. — P. 4–15.
12. Щукин А. Н. Распространение радиоволн. — М.: Связьиздат, 1940. — 399 с.
13. Леонтович М. А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел // Исследования по распространению радиоволн. Второй сборник. — М.; Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. — С. 5–12.
14. Кравченко В. Ф. Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. — М.: Физматлит, 2006. — 280 с.
15. Kostenko O.V. A mathematical model for the characteristic impedance: the dependence on temperature and frequency // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. — Сер.: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. — 2013. — **23**, № 1089. — С. 103–112.
16. Костенко А. В. Еще раз о дифракции плоской монохроматической электромагнитной волны на импедансной ленте // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. — Сер.: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. — 2012. — **20**, № 1037. — С. 110–124.
17. Meixner J. Die Kantenbedingung in der theorie der beugung elektromagnetischer wellen an vollkommen leitenden ebenen schirmen // Annalen der Physik. — 1949. — **6**, N 2. — P. 1–9.
18. Ваксман В. М. Об условии Мейкснера на ребре // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1969. — № 3. — С. 50–57.
19. Абрамовиц М., Стиган И. А. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
20. Гандель Ю. В., Полянская Т. С. Обоснование численного метода решения систем сингулярных интегральных уравнений задач дифракции на решетках // Дифференциальные уравнения. — 2003. — **39**, № 9. — С. 1229–1239.
21. Гандель Ю. В. Парные и гиперсингулярные интегральные уравнения задач дифракции электромагнитных волн на плоских решетках и экранах // Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003), 2003. — С. 53–58.
22. Гандель Ю. В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. — Харьков: Изд-во Харьков. национального ун-та им. В.Н. Каразина, 2001. — 92 с.
23. Гандель Ю. В. Элементарные асимптотические оценки. — Харьков: Изд-во Харьков. гос. ун-та имени Максима Горького, 1977. — 50 с.
24. Kostenko O.V. A mathematical model of electromagnetic wave diffraction on a lattice of the special form: frequency analyze and loss // Book of Abstracts of International Conference “Days on Diffraction 2013”, 2013. — P. 48–49.
25. Kostenko O.V. Analysis of electromagnetic reflection capacity of an impedance strip // Book of Abstracts of Mathematical Modeling and Analysis 2013 and Approximation Methods and Orthogonal Expansions 2013, 2013. — P. 64.

Поступила 27.03.2014