УДК 519.21

Е.В. КОСАРЕВИЧ, Я.И. ЕЛЕЙКО

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ПРОИЗВОДИТЕЛЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЫПУСКАМИ В УСЛОВИЯХ ДУОПОЛИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫХ ТОВАРОВ

Аннотация. Описаны модели количественной конкуренции в условиях дуополии дифференцированных товаров, в которых управляемая переменная производителя (объем выпуска товара) считается случайной величиной. Выделен класс распределений случайных выпусков, гарантирующий существование решений бескоалиционных игр. Получены в явном виде формулы для определения «исправленного» равновесия по Нэшу для дуополии со случайной управляемой переменной одного и обоих производителей. Предложен метод оценки меры риска производителя.

Ключевые слова: количественная конкуренция, дуополия, дифференцированные товары, «исправленное» равновесие по Нэшу, мера риска.

Принятие производителями стратегических решений часто сопровождается отсутствием точной информации о рыночном спросе и объеме выпуска товара, например, когда производитель выходит на рынок впервые или представляет на нем качественно новые товары. Поэтому возникает необходимость создания моделей конкуренции [1–3], которые учитывали бы свойственную производителям неопределенность. В условиях глобальной инфляции особенно актуально исследование рынка не однородных, а дифференцированных товаров [4, 5].

ИССЛЕДОВАНИЕ ДУОПОЛИИ СО СЛУЧАЙНЫМ ВЫПУСКОМ ТОВАРА ОДНИМ ПРОИЗВОДИТЕЛЕМ

Рассмотрим количественное конкурентное взаимодействие двух производителей на рынке дифференцированных товаров. Пусть товар i производится предприятием i, $i \in \{1, 2\}$. Предположим, что решение об объеме выпуска товара, принимаемое одним производителем, является случайным, а решение другого производителя — детерминированным.

Пусть объем q_1 товара, выпускаемого первым предприятием, — случайная величина с плотностью распределения $f(x; \lambda)$, где $\lambda > 0$ — изменяемый параметр распределения (неизвестный в момент начала взаимодействия производителей), а функция $f(x; \lambda)$ такая, что $Eq_1 < \infty$, $Eq_1^2 < \infty$ $\forall \lambda > 0$, $E(\cdot)$ — оператор математического ожидания. Поскольку объем выпуска товара первым производителем случайный, последний максимизирует свою ожидаемую прибыль, принимая решение об ожидаемом объеме выпуска, $Eq_1 = \int xf(x; \lambda)dx = \varphi(\lambda)$. Второй производитель максимизирует ожидаемую прибыль, выбирая детерминированный объем q_2 выпуска товара.

Количественное конкурентное взаимодействие двух производителей со случайным объемом выпуска товара одним из них представим в виде игры в стратегической форме $G_1^{(2)} = (I, \{S_i\}, \{E\pi_i(Eq_1, q_2)\}, i \in I)$, где $I = \{1, 2\}$ — множество игроков; S_i — множество допустимых стратегий игрока $i \in I$; $E\pi_i(Eq_1, q_2) = E\left(q_i D_i^{-1}\left(\sum_{j \in I} q_j\right) - c_i(q_i)\right)$ — функция выигрыша (ожидаемая прибыль) игрока $i \in I$; $D_i^{-1}\left(\sum_{j \in I} q_j\right)$ — обратная функция рыночного спроса на товар i; $c_i(q_i)$ — функция издержек игрока $i \in I$.

Заметим, что $G_1^{(2)}$ является игрой в чистых стратегиях (Eq_1 для первого и q_2 для второго игрока), несмотря на то, что объем выпуска товара одним из производителей в данной модели — случайная величина.

Модель независимой конкуренции игроков определяется задачей максимизации ожидаемой прибыли:

— для первого производителя

$$E\left(q_1 D_1^{-1}\left(\sum_{j\in I} q_j \right) - c_1(q_1) \right) \to \max_{Eq_1 \in S_1}; \tag{1}$$

— для второго производителя

$$E\left(q_2 D_2^{-1}\left(\sum_{s\in I} q_s \right) - c_2(q_2) \right) \to \max_{q_2 \in S_2}. \tag{2}$$

Определение 1. «Исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_1^{(2)}$ будем называть набор $q^* = ((Eq_1)^*, (q_2)^*)$ ожидаемого и детерминированного выпусков товаров соответственно первым и вторым производителями такой, что

$$\begin{aligned} &E\pi_1(q^*) \ge E\pi_1(Eq_1, (q_2)^*) \;\; \forall Eq_1 \in S_1, \\ &E\pi_2(q^*) \ge E\pi_2((Eq_1)^*, q_2) \;\; \forall q_2 \in S_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть обратная функция спроса (цена) на товар i является линейной, т.е.

$$D_i^{-1}(q_1 + q_2) = a - b_1 q_i - b_2 q_j\,, \;\; i, j \in I,\; i \ne j, \tag{4}$$

где $a > 0,\; b_1 > 0,\; b_2 > 0$ — некоторые параметры. Тогда при случайном объеме выпуска товара первым производителем имеем $E(D_1^{-1}(q_1+q_2)) = a - b_1 Eq_1 - b_2 q_2$, $E(D_2^{-1}(q_1+q_2)) = a - b_1 q_2 - b_2 Eq_1$, причем $E(D_i^{-1}(q_1+q_2)) \ge 0$, откуда $Eq_1 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} q_2;\, \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} q_2 \right\}$, $q_2 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_1;\, \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_1 \right\}$. Таким образом, область допустимых стратегий игроков $S_1 = \left[0, \min\left\{ \frac{a}{b_1}; \frac{a}{b_2} \right\} \right]$, $S_2 = \left[0, \min\left\{ \frac{a}{b_1}; \frac{a}{b_2} \right\} \right]$.

С учетом (4) при линейных функциях издержек и одинаковых предельных постоянных издержках ($c_1 = c_2 = c$) ожидаемая прибыль первого производителя составляет

$$E\pi_1(Eq_1, q_2) = aEq_1 - b_1 Eq_1^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1, \tag{5}$$

$$Eq_1 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} q_2;\, \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} q_2 \right\},$$

где $Eq_1^2 = \psi(\lambda)$. Ввиду функциональной зависимости между λ и Eq_1 получаем $Eq_1^2 = \psi(Eq_1)$, а следовательно, (5) примет вид

$$E\pi_1(Eq_1, q_2) = aEq_1 - b_1\psi(Eq_1) - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1, \tag{6}$$

$$Eq_1 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} q_2;\, \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} q_2 \right\}.$$

Используя детерминированную стратегию, второй производитель максимизирует свою ожидаемую прибыль, которая ввиду (4) составляет

$$E\pi_2(Eq_1, q_2) = aq_2 - b_1 q_2^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cq_2, \tag{7}$$

$$q_2 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_1;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_1 \right\}.$$

С учетом (6), (7) задачи (1), (2) принимают вид

$$aEq_1 - b_1\psi(Eq_1) - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1 \to \max_{Eq_1 \in S_1}, \tag{8}$$

$$Eq_1 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} q_2;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} q_2 \right\},$$

$$aq_2 - b_1 q_2^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cq_2 \to \max_{q_2 \in S_2}, \tag{9}$$

$$q_2 \le \min\left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_1;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_1 \right\}.$$

Реакция производителя на действие конкурента (кривая реакции) определяется решением задач (8), (9) при фиксированном обьеме (ожидаемого) выпуска товара конкурентом.

Теорема 1 (о форме «исправленного» равновесия по Нэшу в игре $G_1^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии). Пусть функция $\psi(Eq_1)$ принадлежит классу квадратичных относительно переменной Eq_1, причем $\psi(Eq_1) = k_1(Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3$, где $k_1 > 0$, k_2, k_3 — некоторые константы. Тогда при выполнении условий

$$a > c, \tag{10}$$

$$b_1 > b_2, \tag{11}$$

$$k_1 > \frac{1}{2}, \tag{12}$$

$$-\frac{(a-c)(b_1 - b_2)}{b_1 b_2} \le k_2 \le \frac{(a-c)(2b_1 - b_2)}{2b_1^2} \tag{13}$$

набор ожидаемого и детерминированного выпусков товаров соответственно первым и вторым производителями

$$(Eq_1)^* = \frac{(a-c)(2b_1 - b_2) - 2b_1^2 k_2}{4k_1 b_1^2 - b_2^2}, \tag{14}$$

$$(q_2)^* = \frac{(a-c)(2k_1 b_1 - b_2) + b_1 b_2 k_2}{4k_1 b_1^2 - b_2^2} \tag{15}$$

является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_1^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии.

Доказательство. Ввиду условия теоремы функции выигрыша (6) и (7) игроков имеют вид

$$E\pi_1(Eq_1, q_2) = aEq_1 - b_1(k_1(Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3) - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1,$$

$$Eq_1 \le \left\{ \min \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} q_2 ;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} q_2 \right\},$$

$$E\pi_2(Eq_1, q_2) = aq_2 - b_1 q_2^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cq_2,$$

$$q_2 \le \min \left\{ \frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_1 ;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_2 \right\}.$$

Легко видеть, что функция $E\pi_2(Eq_1, q_2)$ является вогнутой по переменной q_2, а функция $E\pi_1(Eq_1, q_2)$ — по Eq_1. Поэтому оптимальный обьем (ожидаемого) выпуска товара одним из производителей при фиксированном обьеме (ожидаемого) выпуска товара конкурентом находим из условий оптимальности первого порядка для задач (8), (9), которые принимают вид:

— для первого производителя

$$aEq_1 - b_1(k_1(Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3) - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1 \to \max_{Eq_1 \in S_1} ; \tag{16}$$

— для второго производителя

$$aq_2 - b_1 q_2^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cq_2 \to \max_{q_2 \in S_2} . \tag{17}$$

Заметим, что условия оптимальности для задач (16), (17) следующие:

$$\frac{\partial(E\pi_1(Eq_1, q_2))}{\partial(Eq_1)} = 0, \qquad \frac{\partial(E\pi_2(Eq_1, q_2))}{\partial q_2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial(aEq_1 - b_1(k_1(Eq_1)^2 + k_2 Eq_1 + k_3) - b_2 q_2 Eq_1 - cEq_1)}{\partial(Eq_1)} = 0,$$

$$\frac{\partial(aq_2 - b_1 q_2^2 - b_2 q_2 Eq_1 - cq_2)}{\partial q_2} = 0.$$

Из условий оптимальности получаем соответствующие кривые реакции:

— для первого игрока

$$B_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{a - c - b_1 k_2}{2k_1 b_1} - \dfrac{b_2}{2b_1 k_1} q_2, & \text{если} \quad q_2 \le \dfrac{a - c - b_1 k_2}{b_2}, \\ 0, & \text{если} \quad q_2 > \dfrac{a - c - b_1 k_2}{b_2}; \end{cases}$$

— для второго игрока

$$B_2(Eq_1) = \begin{cases} \dfrac{a - c}{2b_1} - \dfrac{b_2}{2b_1} Eq_1, & \text{если} \quad Eq_1 \le \dfrac{a - c}{b_2}, \\ 0, & \text{если} \quad Eq_1 > \dfrac{a - c}{b_2}. \end{cases}$$

Согласно (3) набор ожидаемого и детерминированного выпусков товаров соответственно первым и вторым производителями является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_1^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии, если $(Eq_1)^* = B_1((q_2)^*)$, $(q_2)^* = B_2((Eq_1)^*)$. Поэтому равновесный набор находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (Eq_1)^* = \dfrac{a-c+k_2}{2k_1 b_1} - \dfrac{b_2}{2b_1 k_1}(q_2)^*, \\ (q_2)^* = \dfrac{a-c}{2b_1} - \dfrac{b_2}{2b_1}(Eq_1)^*. \end{cases}$$

Получаем решение (14), (15), которое является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_1^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии.

Условия (10)–(13) теоремы гарантируют неотрицательность равновесных объемов (ожидаемых) выпусков и обеспечивают выполнение условий $Eq_1 \le \left\{ \min \dfrac{a}{b_1} - \dfrac{b_2}{b_1} q_2 ; \dfrac{a}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_2} q_2 \right\}$, $q_2 \le \min\left\{ \dfrac{a}{b_1} - \dfrac{b_2}{b_1} Eq_1 ; \dfrac{a}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_2} Eq_1 \right\}$ для $E(D_i^{-1}(q_1 + q_2)) \ge 0, \ i \in \{1,2\}$.

Теорема доказана.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДУОПОЛИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЫПУСКАМИ ТОВАРОВ

Рассмотрим ситуацию на рынке дифференцированных товаров, когда их выпуски обоими производителями являются случайными. Пусть объем q_i товара i, выпускаемого предприятием $i \in I$, — случайная величина с плотностью распределения $f_i(x_i; \lambda_i)$, где $\lambda_i > 0$ — изменяемый параметр распределения, а функция $f_i(x_i; \lambda_i)$ такая, что $Eq_i < \infty$, $Eq_i^2 < \infty \ \forall \lambda_i > 0$. Поскольку объемы выпусков товаров производителями случайные, каждый из них максимизирует свою ожидаемую прибыль, принимая решение об ожидаемом объеме выпуска $Eq_i = \int x_i f_i(x_i; \lambda_i) dx_i = \varphi_i(\lambda_i)$.

Количественное конкурентное взаимодействие двух производителей со случайными объемами выпусков товаров представим в виде игры в стратегической форме $G_2^{(2)} = (I, \{S_i\}, \{E\pi_i(Eq_1, Eq_2)\}, i \in I)$, где $I = \{1,2\}$ — множество игроков; S_i — множество допустимых стратегий игрока $i \in I$; $E\pi_i(Eq_1, Eq_2) = E\left(q_i D_i^{-1}\left(\sum_{j \in I} q_j \right) - c_i(q_i) \right)$ — функция выигрыша (ожидаемая прибыль) игрока $i \in I$; $D_i^{-1}\left(\sum_{j \in I} q_j \right)$ — обратная функция рыночного спроса на товар i; $c_i(q_i)$ — функция издержек игрока $i \in I$.

С учетом (4) при случайном объеме выпуска товара производителем i имеем $E(D_i^{-1}(q_1 + q_2)) = a - b_1 Eq_i - b_2 Eq_j$, причем $E(D_i^{-1}(q_1 + q_2)) \ge 0$, откуда $Eq_i \le \min\left\{ \dfrac{a}{b_1} - \dfrac{b_2}{b_1} Eq_j ; \dfrac{a}{b_2} - \dfrac{b_1}{b_2} Eq_j \right\}$. Таким образом, областью допустимых стратегий игрока i является $S_i = \left[0, \min\left\{ \dfrac{a}{b_1} ; \dfrac{a}{b_2} \right\} \right]$.

Определение 2. «Исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_2^{(2)}$ будем называть набор $q^* = ((Eq_1)^*, (Eq_2)^*)$ ожидаемых выпусков товаров производителями такой, что

$$\begin{aligned} &E\pi_1(q^*) \ge E\pi_1(Eq_1, (Eq_2)^*) \quad \forall Eq_1 \ge 0, \\ &E\pi_2(q^*) \ge E\pi_2((Eq_1)^*, Eq_2) \quad \forall Eq_2 \ge 0. \end{aligned} \tag{18}$$

При линейных функциях издержек и одинаковых предельных постоянных издержках ($c_1 = c_2 = c$) ожидаемая прибыль производителя i составляет

$$E\pi_i(Eq_1, Eq_2) = aEq_i - b_1 Eq_i^2 - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i, \tag{19}$$

$$Eq_i \le \min\left\{\frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_j;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_j\right\},$$

где $Eq_i^2 = \psi_i(\lambda_i)$. Ввиду функциональной зависимости между λ_i и Eq_i получаем $Eq_i^2 = \psi_i(Eq_i)$, а следовательно, (19) примет вид

$$E\pi_i(Eq_1, Eq_2) = aEq_i - b_1\psi_i(Eq_i) - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i, \tag{20}$$

$$Eq_i \le \min\left\{\frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_j;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_j\right\}.$$

С учетом (20) задачи (1), (2) принимают вид

$$aEq_i - b_1\psi_i(Eq_i) - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i \to \max_{Eq_i \in S_i}, \tag{21}$$

$$Eq_i \le \min\left\{\frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} Eq_j;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} Eq_j\right\}.$$

Реакция производителя на действия конкурента (кривая реакции) определяется решением задачи (21) при фиксированном объеме ожидаемого выпуска товара конкурентом.

Теорема 2 (о форме «исправленного» равновесия по Нэшу в игре $G_2^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии). Пусть функции $\psi_i(Eq_i)$ принадлежат классу квадратичных относительно переменных Eq_i, причем $\psi_i(Eq_i) = k_1^{(i)}(Eq_i)^2 + k_2^{(i)} Eq_i + k_3^{(i)}$, где $k_1^{(i)} > 0$, $k_2^{(i)}$, $k_3^{(i)}$ — некоторые константы. Тогда при выполнении условий

$$a > c, \tag{22}$$

$$b_1 > b_2, \tag{23}$$

$$k_1^{(1)} k_1^{(2)} > \frac{b_2^2}{4b_1^2}, \tag{24}$$

$$k_2^{(i)} \le \frac{a-c}{b_1} - \frac{b_2(a - c - b_1 k_2^{(j)})}{2b_1^2 k_1^{(j)}} \tag{25}$$

набор ожидаемых выпусков товаров производителями

$$(Eq_1)^* = \frac{2b_1 k_1^{(2)}(a - c - b_1 k_2^{(1)}) - b_2(a - c - b_1 k_2^{(2)})}{4k_1^{(1)} k_1^{(2)} b_1^2 - b_2^2}, \tag{26}$$

$$(Eq_2)^* = \frac{2b_1 k_1^{(1)}(a - c - b_1 k_2^{(2)}) - b_2(a - c - b_1 k_2^{(1)})}{4k_1^{(1)} k_1^{(2)} b_1^2 - b_2^2} \tag{27}$$

является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_2^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии.

Доказательство. Ввиду условия теоремы функция выигрыша (20) производителя i имеет вид

$$E\pi_i(Eq_i, Eq_j) = aEq_i - b_1(k_1^{(i)}(Eq_i)^2 + k_2^{(i)}Eq_i + k_3^{(i)}) - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i,$$

$$Eq_i \le \min\left\{\frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}Eq_j;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2}Eq_j\right\}.$$

Легко видеть, что функция $E\pi_i(Eq_i, Eq_j)$ является вогнутой по переменной Eq_i. Поэтому оптимальний объем ожидаемого выпуска товара одним из производителей при фиксированном объеме ожидаемого выпуска товара конкурентом находим из условий оптимальности первого порядка для соответствующей задачи.

Задача (21) максимизации функции выигрыша игрока i при фиксированном объеме ожидаемого выпуска товара конкурентом принимает вид

$$aEq_i - b_1(k_1^{(i)}(Eq_i)^2 + k_2^{(i)}Eq_i + k_3^{(i)}) - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i \to \max_{Eq_i \in S_i}. \qquad (28)$$

Условия оптимальности для задачи (28) следующие:

$$\frac{\partial(E\pi_i(Eq_i, Eq_j))}{\partial(Eq_i)} = 0$$

или

$$\frac{\partial(aEq_i - b_1(k_1^{(i)}(Eq_i)^2 + k_2^{(i)}Eq_i + k_3^{(i)}) - b_2 Eq_i Eq_j - cEq_i)}{\partial(Eq_i)} = 0.$$

Из условий оптимальности получаем кривую реакции для игрока i

$$B_i(Eq_j) = \begin{cases} \dfrac{a - c - b_1 k_2^{(i)}}{2b_1 k_1^{(i)}} - \dfrac{b_2}{2b_1 k_1^{(i)}} Eq_j, & \text{если} \quad Eq_j \le \dfrac{a - c - b_1 k_2^{(i)}}{b_2}, \\ 0, & \text{если} \quad Eq_j > \dfrac{a - c - b_1 k_2^{(i)}}{b_2}. \end{cases}$$

Согласно (18) набор ожидаемых выпусков товаров производителями является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_2^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии, если $(Eq_i)^* = B_i((Eq_j)^*)$. Поэтому равновесный набор находим из системы уравнений

$$\begin{cases} (Eq_1)^* = \dfrac{a - c - b_1 k_2^{(1)}}{2b_1 k_1^{(1)}} - \dfrac{b_2}{2b_1 k_1^{(1)}}(Eq_2)^*, \\ (Eq_2)^* = \dfrac{a - c - b_1 k_2^{(2)}}{2b_1 k_1^{(2)}} - \dfrac{b_2}{2b_1 k_1^{(2)}}(Eq_1)^*. \end{cases}$$

Получаем решение (26), (27), которое является «исправленным» равновесием по Нэшу в игре $G_2^{(2)}$ в условиях дифференцированной дуополии.

Условия (22)–(25) теоремы гарантируют неотрицательность равновесных объемов ожидаемых выпусков и обеспечивают выполнение условия $Eq_i \le \min\left\{\frac{a}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}Eq_j;\ \frac{a}{b_2} - \frac{b_1}{b_2}Eq_j\right\}$ для $E(D_i^{-1}(q_1 + q_2)) \ge 0$, $i \in \{1, 2\}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим ситуацию, когда случайные выпуски товаров производителями не являются независимыми. В данном случае предложенные методы анализа конкуренции предприятий в концепции равновесия по Нэшу не применяются. Этим обусловлена необходимость разработки иного подхода к анализу взаимодействия производителей со случайными выпусками товаров в условиях дифференцированной дуополии. Далее покажем, что, используя аппарат условных математических ожиданий [6], можно получить значение ожидаемой прибыли производителя, если не имеется предположений о независимости случайных выпусков.

В то же время при принятии производителями стратегических управленческих решений значение ожидаемой прибыли малоинформативно. Более важной является оценка степени риска. В качестве относительной меры риска производителя [7] будем использовать коэффициент вариации (степень рассеивания случайной величины относительно ожидаемого значения), который позволяет обеспечить сопоставимость результатов при различных вариантах стратегии поведения и разработать оптимальную стратегию управления риском.

Пусть выпуски товаров q_1 и q_2 соответственно первым и вторым производителями — случайные величины с абсолютно непрерывными распределениями на интервалах $[\alpha_1, \alpha_2]$ и $[\beta_1, \beta_2]$. Предположим, что q_1 и q_2 не являются независимыми, известна плотность их совместного распределения $f_{(q_1,q_2)}(x, y)$.

Ожидаемая прибыль первого производителя при условии, что объем q_2 выпуска товара вторым производителем случайный, есть случайная величина

$$E(\pi_1 / q_2) = (a-c)E(q_1 / q_2) - b_1 E(q_1^2 / q_2) - b_2 E(q_1 q_2 / q_2),$$

где π_1 — прибыль первого предприятия, $E(\cdot / \cdot)$ — оператор условного математического ожидания.

Определение 3. Величину $V(E(\pi_1 / q_2)) = \dfrac{\sqrt{D[E(\pi_1 / q_2)]}}{E[E(\pi_1 / q_2)]}$ будем называть мерой риска первого производителя при принятии решений в условиях количественной конкуренции, когда не имеется предположений о независимости случайных выпусков.

Заметим, что при фиксированном объеме выпуска товара вторым производителем $q_2 = y$ условная ожидаемая прибыль первого производителя составляет

$$E(\pi_1 / q_2 = y) = (a-c)E(q_1 / q_2 = y) - b_1 E(q_1^2 / q_2 = y) - b_2 E(q_1 q_2 / q_2 = y)$$

$$\forall y \in [\beta_1, \beta_2].$$

Используя интегральную формулу полного математического ожидания [6], получаем усредненную ожидаемую прибыль первого производителя

$$E[E(\pi_1 / q_2)] = \int_{\beta_1}^{\beta_2} E(\pi_1 / q_2 = y) f_{q_2}(y) dy,$$

где

$$f_{q_2}(y) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x, y) dx,$$

или

$$E[E(\pi_1 / q_2)] = \int_{\beta_1}^{\beta_2} f_{q_2}(y)[(a-c)E(q_1 / q_2 = y) - b_1 E(q_1^2 / q_2 = y) - b_2 y E(q_1 / q_2 = y)] dy,$$

где

$$E(q_1/q_2=y)=\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx},\quad E(q_1^2/q_2=y)=\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx},$$

$$y\in[\beta_1,\beta_2].$$

Выполнив некоторые преобразования, получим формулу для вычисления усредненной ожидаемой прибыли первого производителя

$$E[E(\pi_1/q_2)]=(a-c-b_2y)\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y)dxdy-b_1\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y)dxdy. \quad (29)$$

Заметим, что вычислить $E\pi_1$ можно также, не используя условного математического ожидания, непосредственно на основании соотношений (1), (2), (4). Тем не менее, применение аппарата условных математических ожиданий позволяет найти значение $D[E(\pi_1/q_2)]$, а значит, получить количественную оценку меры риска производителя при любом фиксированном значении стратегии конкурента.

Действительно,

$$D[E(\pi_1/q_2)]=E[(E(\pi_1/q_2))^2]-(E[E(\pi_1/q_2)])^2. \quad (30)$$

Аналогично предыдущим утверждениям получаем

$$E[(E(\pi_1/q_2))^2]=\int_{\beta_1}^{\beta_2}(E(\pi_1/q_2=y))^2 f_{q_2}(y)dy \quad \forall y\in[\beta_1,\beta_2]$$

или

$$E[(E(\pi_1/q_2)^2)]=\int_{\beta_1}^{\beta_2} f_{q_2}(y)[(a-c-b_2y)E(q_1/q_2=y)-b_1E(q_1^2/q_2=y)]^2dy=$$

$$=\int_{\beta_1}^{\beta_2} f_{q_2}(y)[(a-c-b_2y)^2(E(q_1/q_2=y))^2]dy+\int_{\beta_1}^{\beta_2} f_{q_2}(y)[b_1^2(E(q_1^2/q_2=y))^2]dy-$$

$$-\int_{\beta_1}^{\beta_2} f_{q_2}(y)[2b_1(a-c-b_2y)E(q_1/q_2=y)E(q_1^2/q_2=y)]dy \quad \forall y\in[\beta_1,\beta_2].$$

Выполнив некоторые преобразования, получим

$$E[(E(\pi_1/q_2))^2]=$$

$$=\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[(a-c-b_2y)^2\frac{\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx\right)^2}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}\right]dy+\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[b_1^2\frac{\left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx\right)^2}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}\right]dy-$$

$$-\int_{\beta_1}^{\beta_2}\left[2b_1(a-c-b_2y)\frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_{(q_1,q_2)}(x,y)dx}\right]dy \quad \forall y\in[\beta_1,\beta_2]. \quad (31)$$

Из (29) следует

$$(E[E(\pi_1 / q_2)])^2 = \left((a-c-b_2 y) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy - b_1 \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy \right)^2 =$$

$$= (a-c-b_2 y)^2 \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy \right)^2 + b_1^2 \left(\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy \right)^2 -$$

$$-2b_1 (a-c-b_2 y) \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^2 f_{(q_1,q_2)}(x,y) dx dy \quad \forall y \in [\beta_1, \beta_2]. \quad (32)$$

Таким образом, учитывая формулы (29)–(32) и определение 3, можно вычислить значение меры риска первого производителя (в настоящей статье формула для $V(E(\pi_1 / q_2))$ не приведена).

Описанный метод поиска относительной меры риска применяется также и для второго производителя. Предложенный подход позволяет в случае, когда не имеется предположения о независимости случайных выпусков, получить значение ожидаемой прибыли производителя и оценить меру его риска при любом фиксированном значении стратегии конкурента, что очень важно при принятии стратегических управленческих решений.

Построенные в статье модели количественной конкуренции в условиях дуополии дифференцированных товаров, в которых объем их выпуска считается случайной величиной, по сравнению с классическими моделями дуополии более адаптированы к реальным рынкам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cournot A. Researches into the mathematical principles of the theory of wealth. English edition of Cournot (1838) translated by N.T. Bacon. — New York: A.M. Kelley, 1971. — 213 p.
2. Nash J. Equilibrium points in n-person games // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1950. — **36.** — P. 48–49.
3. Фон Нейман Дж., Моргенштерн Э. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. – 708 с.
4. Singh N., Vives X. Price and quantity competition in a differentiated duopoly // RAND J. Economics. — 1984. — **15**, N 4. — P. 546–554.
5. Горбачук В.М. Равновесия Курно–Нэша и Бертрана–Нэша для гетерогенной дуополии дифференцированных продуктов // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 29–37.
6. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов. — Киев: Вища шк., 1975. — 296 с.
7. Kosarevych K.V., Aliyev S.A., Yeleyko Ya.I. Method of assessment of producers risks in one model of quantitative market competition // Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. — 2014. — **2**, N 2. — P.15–21.

Поступила 07.04.2015