УДК 519.872

А.И. ПЕСЧАНСКИЙ, А.И. КОВАЛЕНКО

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И ТЕХНИЧЕСКИМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ НЕНАДЕЖНОГО КАНАЛА

Аннотация. Построена полумарковская модель однолинейной системы обслуживания $GI/G/1/0$ с учетом технического обслуживания ненадежного обслуживающего прибора. Найдены стационарные надежностные и экономические характеристики системы и выполнена двухкритериальная оптимизация периодичности проведения технического обслуживания.

Ключевые слова: однолинейная система обслуживания с ненадежным прибором, техническое обслуживание прибора, стационарное распределение вложенной цепи Маркова, стационарные характеристики, двухкритериальная оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

На возможность учета вероятности отказов и восстановления обслуживающих приборов впервые указано в статье [1]. Исследования систем обслуживания в этом направлении проводились, например, в работах [2–6]. Одним из возможных методов повышения стационарных показателей систем с ненадежными каналами является проведение их технического обслуживания (ТО). В настоящей статье построена модель функционирования однолинейной системы обслуживания с потерями, ненадежным прибором и проведением его ТО по достижении им заданной наработки на отказ. В предположении общего вида случайных величин, описывающих систему, с помощью аппарата теории полумарковских процессов с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [7, 8] находятся стационарные надежностные и экономические показатели системы, а также определяется оптимальная периодичность проведения ТО.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В однолинейную систему обслуживания с потерями поступает рекуррентный поток требований, порожденный случайной величиной β с произвольной функцией распределения $G(t)=P\{\beta \le t\}$. Длительность обслуживания требования — случайная величина α с функцией распределения $F(t)=P\{\alpha \le t\}$.

Во время обслуживания требования по достижении прибором суммарной наработки, реализуемой как случайная величина γ с функцией распределения $\Phi(t)=P\{\gamma \le t\}$, происходит отказ прибора и сразу начинается его аварийное восстановление (АВ). Отсчет наработки прибора на отказ начинается с момента начала обслуживания первого требования по окончании его АВ. Длительность АВ — случайная величина σ_a с функцией распределения $\Psi_a(t)=P\{\sigma_a \le t\}$.

Кроме этого, предполагается проведение ТО прибора, которое начинается сразу же по достижении прибором суммарной наработки, равной детерминированной величине τ. После ТО наработка обнуляется и отсчет наработки на следующее ТО начинается с момента обслуживания прибором первого требования по завершении предыдущего ТО. Длительность проведения ТО — случайная величина σ_p с функцией распределения $\Psi_p(t)=P\{\sigma_p \le t\}$.

Требование, обслуживаемое в момент отказа прибора или начала проведения ТО, теряется как и все требования, поступившие в систему во время ремонтных или профилактических работ. Предполагается, что случайные величины

$\alpha, \beta, \gamma, \sigma_a$ и σ_p независимы, имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\varphi(t)$, $\psi_a(t)$, $\psi_p(t)$, конечные математические ожидания $E\alpha$, $E\beta$, $E\gamma$, $E\sigma_a$, $E\sigma_p$ и дисперсии $D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$, $D\sigma_a$, $D\sigma_p$ соответственно.

Цель статьи — построение полумарковской модели функционирования описанной выше системы обслуживания, нахождение ее стационарных характеристик и оптимизация периодичности проведения ТО прибора для повышения эффективности ее функционирования.

ПОЛУМАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Опишем пространство физических состояний системы: 1 — прибор занят обслуживанием требования; 0 — прибор свободен; 2 — проводится АВ прибора; 3 — осуществляется ТО прибора.

Следуя методике, изложенной в работах [7, 8], расширим фазовое пространство физических состояний системы до фазового пространства полумарковских состояний, добавляя к кодам физических состояний непрерывные координаты, обеспечивающие марковское свойство фазовых состояний в моменты их изменений. В итоге фазовое пространство системы будет иметь вид

$$E = \{1, 1v, 1uv, 1xuv, 2xv, 2xv0, 3x, 3x0, 0x, 0xv, 0xuv;\ x > 0,\ u > 0,\ 0 < v < \tau\}.$$

Расшифруем коды состояний: 1 — начинает обслуживаться первое требование, поступившее по завершении ТО прибора; $1v$ — начинает обслуживаться первое требование, поступившее по окончании АВ прибора; величина суммарной наработки по окончании последнего ТО равна v; $1uv$ — начинает обслуживаться поступившее в систему требование; величина оставшейся наработки прибора до отказа равна u; суммарная наработка после ТО равна v; $1xuv$ — требование, поступившее в систему, теряется по причине занятости прибора обслуживанием, до конца которого осталось время x; величина оставшейся наработки прибора до отказа равна u; суммарная наработка после ТО равна v; $2xv$ — произошел отказ прибора и началось его аварийное восстановление; до поступления следующего требования осталось время x; суммарная наработка по окончании ТО равна v; $2xv0$ — поступившее в систему требование теряется по причине проведения аварийного восстановления прибора, до окончания которого осталось время x; суммарная наработка после ТО равна v; $3x$ — началось ТО прибора; до поступления следующего требования осталось время x; $3x0$ — поступившее в систему требование теряется по причине проведения ТО прибора, до окончания которого осталось время x; $0x$ — ТО прибора закончено; до поступления следующего требования осталось время x; $0xv$ — закончено аварийное восстановление прибора; до поступления следующего требования осталось время x; суммарная наработка после ТО равна v; $0xuv$ — закончено обслуживание требования; до поступления следующего требования осталось время x; величина оставшейся наработки прибора до отказа равна u; суммарная наработка после ТО равна v.

Временная диаграмма функционирования системы изображена на рис. 1. Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\theta_1 = \alpha \Lambda \beta \Lambda \gamma \Lambda \tau,\ \theta_{1xuv} = \beta \Lambda x \Lambda u \Lambda (\tau - v),\ \theta_{1uv} = \alpha \Lambda \beta \Lambda u \Lambda (\tau - v),\ \theta_{2xv} = \sigma_a \Lambda x,$$

$$\theta_{1v} = \alpha \Lambda \beta \Lambda \gamma \Lambda (\tau - v),\ \theta_{oxuv} = \theta_{0xv} = \theta_{0x} = x,\ \theta_{2xv0} = \theta_{3x0} = \beta \Lambda x,\ \theta_{3x} = \sigma_p \Lambda x,$$

где Λ — знак минимума.

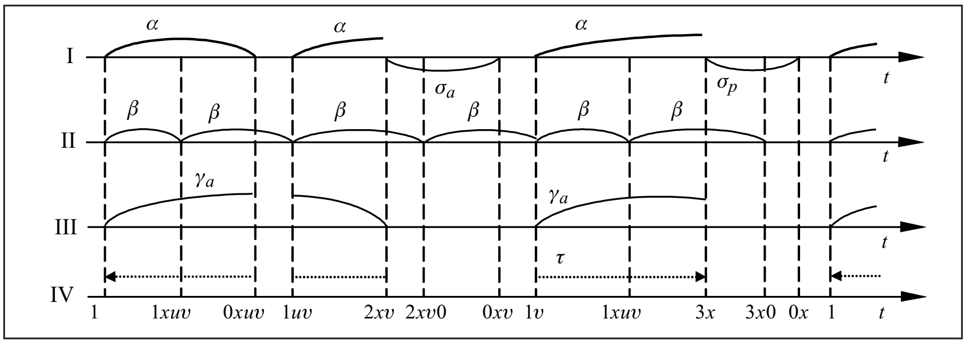

Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы: I — процесс обслуживания требований; II — рекуррентный поток требований; III — наработка до АВ; IV — наработка после ТО

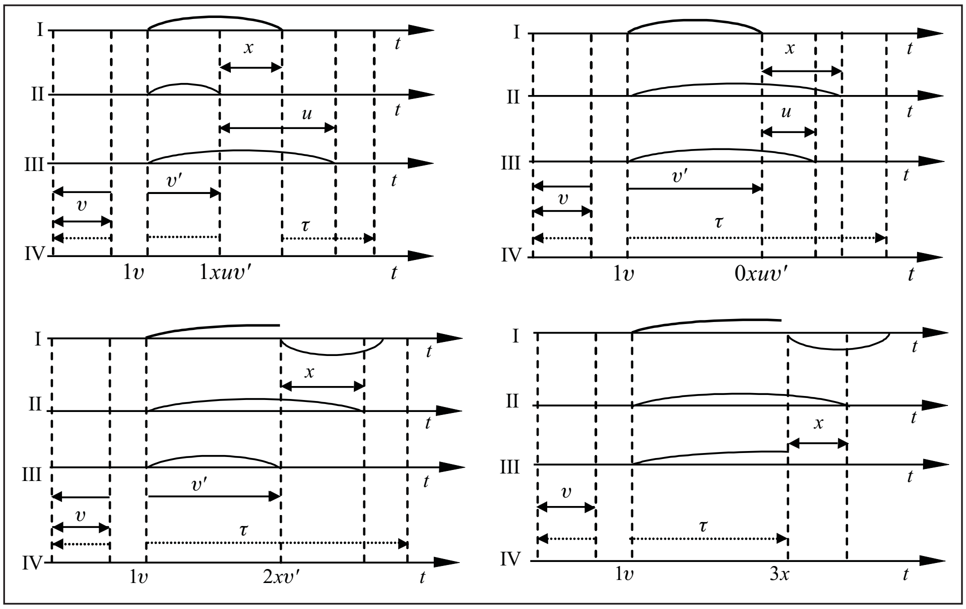

Рис. 2. Диаграмма переходов вложенной цепи Маркова из состояния $1v$

Опишем случайные события переходов. События переходов из состояния $1v$ иллюстрируются диаграммами на рис. 2 и определяются выражениями

$$\begin{gathered}\{1v \to 1, \alpha-\beta, \gamma-\beta, v+\beta\} = \{\beta < \alpha \Lambda \gamma \Lambda (\tau - v)\}, \\ \{1v \to 0, \beta-\alpha, \gamma-\alpha, v+\alpha\} = \{\alpha < \beta \Lambda \gamma \Lambda (\tau - v)\}, \\ \{1v \to 2, \beta-\gamma, 0, v+\gamma\} = \{\gamma < \alpha \Lambda \beta \Lambda (\tau - v)\}, \\ \{1v \to 3, \beta-\tau+v\} = \{\tau - v < \alpha \Lambda \beta \Lambda \gamma\}.\end{gathered} \tag{1}$$

Из соотношений (1) определяем плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из состояния $1v$:

$$p_{1v}^{1dxdudv'} = P\{\alpha-\beta \in dx, \gamma-\beta \in du,\ v+\beta \in dv'\} =$$

$$= f(v'-v+x)g(v'-v)\varphi(v'-v+u)dxdudv',\ x>0,\ u>0,\ v<v'<\tau;$$

$$p_{1v}^{0dxdudv'} = P\{\beta-\alpha \in dx,\ \gamma-\alpha \in du, v+\alpha \in dv'\} =$$

$$= f(v'-v)g(v'-v+x)\varphi(v'-v+u)dxdudv',\ x>0,\ u>0,\ v<v'<\tau;$$

$$p_{1v}^{2dxdv'} = P\{\beta-\gamma \in dx,\ v+\gamma \in dv',\ \alpha > v'-v\} =$$
$$= \overline{F}(v'-v)g(v'-v+x)\varphi(v'-v)dxdv',\ x>0,\ v<v'<\tau;$$
$$p_{1v}^{3dx} = P\{\beta-\tau+v \in dx, \alpha>\tau-v, \gamma>\tau-v\} = \overline{F}(\tau-v)g(\tau-v+x)\overline{\Phi}(\tau-v)dx,\ x>0.$$

Аналогично определяются плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из других состояний системы.

ФИНАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Разобьем фазовое пространство состояний E на непересекающиеся подмножества состояний, соответствующие различным физическим состояниям прибора: $E_0 = \{0x, 0xv, 0xuv\}$ — прибор находится в состоянии ожидания требования; $E_1 = \{1, 1v, 1uv, 1xuv\}$ — прибором проводится обслуживание требования; $E_2 = \{2xv, 2xv0\}$ — проводится восстановление прибора; $E_3 = \{3x, 3x0\}$ — проводится ТО прибора.

Предельные значения переходных вероятностей $\Phi(t, x, E_i) = P\{S(t) \in \in E_i / S(0) = x\}$, $x \in E$, $i = \overline{0, 3}$, полумарковского процесса $S(t)$ определим с помощью соотношений [7, 8]

$$p_i^* = \lim_{t\to\infty} \Phi(t, x, E_i) = \int_{E_i} m(x)\rho(dx)\left(\int_E m(x)\rho(dx)\right)^{-1},\ i=\overline{0,3}, \qquad (2)$$

где $m(x)$ — среднее время пребывания системы в состоянии $x \in E$; $\rho(\cdot)$ — стационарное распределение вложенной цепи Маркова.

Средние времена пребывания в состояниях определяются следующими формулами:

$$E\theta_1 = \int_0^\tau \overline{F}(t)\overline{G}(t)\overline{\Phi}(t)dt,\ E\theta_{1uv} = \int_0^{u\Lambda(\tau-v)} \overline{F}(t)\overline{G}(t)dt,\ E\theta_{1v} = \int_0^{\tau-v} \overline{F}(t)\overline{G}(t)\overline{\Phi}(t)dt,$$

$$E\theta_{2xv} = \int_0^x \overline{\Psi}_a(t)dt,\ E\theta_{1xuv} = \int_0^{x\Lambda u\Lambda(\tau-v)} \overline{G}(t)dt,\ E\theta_{0x} = E\theta_{0xv} = E\theta_{0xuv} = x, \qquad (3)$$
$$E\theta_{3x} = \int_0^x \overline{\Psi}_p(t)dt, E\theta_{2xv0} = E\theta_{3x0} = \int_0^x \overline{G}(t)dt.$$

Стационарное распределение вложенной цепи Маркова есть решение системы интегральных уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$\rho(B) = \int_E \rho(dx)P(x, B),\ B \in \mathcal{B},$$

где $P(x, B)$ — вероятность перехода из состояния x во множество состояний B, принадлежащих σ-алгебре $\mathcal{B}$-измеримых множеств из E.

Обозначим ρ_1 значение стационарного распределения для состояния 1, а $\rho(1xuv)$, $\rho(1uv)$, $\rho(1v)$, $\rho(0xuv)$, $\rho(0xv)$, $\rho(0x)$, $\rho(2xv)$, $\rho(2xv0)$, $\rho(3x)$ и $\rho(3x0)$ — плотности стационарного распределения для состояний $1xuv$, $1uv$, $1v$, $0xuv$, $0xv$, $0x$, $2xv$, $2xv0$, $3x$ и $3x0$ соответственно. Исключение из уравнений системы функций $\rho(1xuv)$, $\rho(1uv)$, $\rho(2xv)$, $\rho(2xv0)$ приводит к уравнению восстановления для плотности $\rho(1v)$:

$$\rho(1v) = \int_0^v \varphi(v-y)\rho(1y)dy + \rho_1\varphi(v).$$

Решение этого уравнения есть плотность функции восстановления, порожденной случайной величиной γ: $\rho(1v)=\rho_1 h_\varphi(v)$. Используя найденную плотность, можно получить выражения для остальных стационарных плотностей. Значение постоянной ρ_1 находится из условия нормировки.

С учетом найденного стационарного распределения и соотношений (3) интегралы в формуле (2) преобразуются к виду

$$\int_{E_1} m(x)\rho(dx)=\rho_1\int_0^\tau \overline{F}(t)\overline{G}(t)\overline{\Phi}(t)dt+\int_0^\tau \rho(1v)dv\int_0^{\tau-v}\overline{F}(t)\overline{G}(t)\overline{\Phi}(t)dt+$$
$$+\int_0^\tau dv\int_0^{\tau-v}\overline{F}(t)\overline{G}(t)dt\int_t^\infty \rho(1uv)du+\int_0^\tau dv\int_0^{\tau-v}\overline{G}(t)dt\int_t^\infty dx\int_t^\infty \rho(1xuv)du=\rho_1\tau, \qquad (4)$$

$$\int_{E_2} m(x)\rho(dx)=\rho_1 E\sigma_a H_\varphi(\tau),\ \int_{E_3} m(x)\rho(dx)=\rho_1 E\sigma_p, \qquad (5)$$

$$\int_{E_0} m(x)\rho(dx)=\rho_1 E\beta\left[\hat{H}_\varphi(\tau)+\int_0^\tau h_f(x)\overline{\Phi}(x)\hat{H}_\varphi(\tau-x)dx+\right.$$
$$+\int_0^\tau \overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau-t)dt\int_0^t h_f(t-s)\overline{F}(s)h_g(s)ds+\int_0^\tau h_g(t)\overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau-t)dt+$$
$$\left.+\int_0^\infty \psi_a(x)dx\int_0^\tau \hat{H}_\varphi(\tau-u)\varphi(u)du\int_0^x \hat{H}_g(x-s)l(u,s)ds+\int_0^\infty \psi(t)H_g^\kappa(t)dt\right]-$$
$$-\rho_1[\tau+E\sigma_a H_\varphi(\tau)+E\sigma_p], \qquad (6)$$

$$\int_{E} m(x)\rho(dx)=\rho_1 E\beta\left[\hat{H}_\varphi(\tau)+\int_0^\tau h_f(x)\overline{\Phi}(x)\hat{H}_\varphi(\tau-x)dx+\right.$$
$$+\int_0^\tau \overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau-t)dt\int_0^t h_f(t-s)\overline{F}(s)h_g(s)ds+\int_0^\tau h_g(t)\overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau-t)dt+$$
$$\left.+\int_0^\infty \psi_a(x)dx\int_0^\tau \hat{H}_\varphi(\tau-u)\varphi(u)du\int_0^x \hat{H}_g(x-s)l(u,s)ds+\int_0^\infty \psi(t)H_g^\kappa(t)dt\right]. \qquad (7)$$

В формулах (4)–(7) использованы следующие обозначения: $\hat{H}_\varphi(x)=1+H_\varphi(x)$, $H_\varphi(x)=\sum_{n=1}^\infty \Phi^{*(n)}(x)$ — функция восстановления, порожденная случайной наработкой на отказ γ; $h_f(x)$ и $h_g(x)$ — плотности соответственно функций восстановления $H_f(x)=\sum_{n=1}^\infty F^{*(n)}(x)$ и $H_g(x)=\sum_{n=1}^\infty G^{*(n)}(x)$, порожденными случайными величинами α и β; $H_g^\kappa(t)$ — функция восстановления запаздывающего процесса восстановления, порожденного функциями распределения $\mathrm{K}(t)=\int_0^t \kappa(x)dx$ и $G(t)$; функция $\kappa(x)$ — плотность распределения времени с момента начала ТО прибора до ближайшего момента поступления требования в систему:

$$\kappa(x)=\overline{\Phi}(\tau)l(\tau,x)+\int_0^\tau h_\varphi(\tau-s)\overline{\Phi}_a(s)l(s,x)ds,$$

где

$$l(u,x)=\overline{F}(u)v_g(u,x)+\int_0^u h_f(u-s)\overline{F}(s)v_g(s,x)ds.$$

По переменной x функция $l(u, x)$ — плотность распределения прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного случайной величиной β в момент достижения прибором наработки u, а $v_g(u, x)$ — плотность распределения прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного случайной величиной β:

$$v_g(u,x)=g(u+x)+\int_0^u h_g(u-s)g(s+x)ds.$$

Подставив (4)–(7) в соотношения (2), получим выражения для определения финальных вероятностей системы.

СРЕДНИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВРЕМЕНА ПРЕБЫВАНИЯ В СОСТОЯНИЯХ

Средние времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i определим с помощью соотношений [7, 8]

$$T(E_i)=\int_{E_i} m(x)\rho(dx)\left[\int_{E\setminus E_i}\rho(dx)P(x,E_i)\right]^{-1},\ \ i=\overline{0,3}. \tag{8}$$

Учитывая вероятности переходов вложенной цепи Маркова из состояний, а также вид стационарного распределения, интегралы в знаменателях дробей формул (8) преобразуются к виду

$$\int_{E\setminus E_0}\rho(dx)P(x,E_0)=\rho_1\left[H_\varphi(\tau)+\int_0^\tau h_f(x)\overline{\Phi}(x)\hat{H}_\varphi(\tau-x)dx\right], \tag{9}$$

$$\int_{E\setminus E_2}\rho(dx)P(x,E_1)=\rho_1 H_\varphi(\tau),\quad \int_{E\setminus E_3}\rho(dx)P(x,E_3)=\rho_1. \tag{10}$$

Если подставить (4)–(7) и (9), (10) в формулы (8), то получим выражения для нахождения средних стационарных времен пребывания системы в состояниях. Отметим, что в случае отсутствия ТО прибора, найденные надежностные характеристики принимают известный вид [9, 10].

СРЕДНЕЕ ЧИСЛО ТРЕБОВАНИЙ, ПОСТУПАЮЩИХ В СИСТЕМУ ЗА ПЕРИОД РЕГЕНЕРАЦИИ

Полумарковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой системы, является регенерирующим. Моментами регенерации, в частности, являются моменты поступления первых требований в свободную систему после завершения ТО прибора. В предложенной кодировке состояний системы — это моменты попадания системы в состояния 1.

Заметим, что выражения для стационарных характеристик системы, которые вытекают из соотношений (2) и (8), можно также найти с помощью общей теории регенерирующих процессов. Покажем, что характеристики системы выражаются через среднее число требований $\overline{N}$, поступающих за период регенерации. Число N есть сумма случайных величин: $N=1+N_a+N_{ser}+N_{1,loss}+N_{2,loss}+N_{3,loss}$, где N_{ser} — число полностью обслуженных требований; N_a — число требований, принятых к обслуживанию, но не обслуженных по причине отказа прибора; $N_{1,loss}, N_{2,loss}, N_{3,loss}$ — числа необслуженных требований по причине занятости прибора соответственно обслуживанием, проведением АВ и ТО.

Число N_a совпадает с числом АВ на периоде регенерации, поэтому среднее значение $\overline{N}_a$ этой случайной величины совпадает со значением функции восстановления, порожденной случайной величиной γ, в точке τ: $\overline{N}_a=H_\varphi(\tau)$.

Среднее число $\overline{N}_{ser}$ обслуженных требований за период регенерации найдем по формуле полного математического ожидания:

$$\overline{N}_{ser}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{N_a=n\}n\int_0^{\tau}H_f(x)\varphi_n(x)dx+\sum_{n=0}^{\infty}P\{N_a=n\}\int_0^{\tau}H_f(x)\chi_n(x)dx, \quad (11)$$

где $H_f(x)$ — функция восстановления, порожденная временем обслуживания требований α; $\varphi_n(x)$ и $\chi_n(x)$ — плотности соответственно функции распределения наработки на отказ и функции распределения времени между моментом начала обслуживания требования по окончании последнего за период АВ прибора и началом проведения его ТО при условии, что за период регенерации произошло ровно n аварийных отказов:

$$\varphi_n(x)=\frac{\varphi(x)}{P\{N_a=n\}}[\Phi^{*(n-1)}(\tau-x)-\Phi^{*(n)}(\tau-x)],\ n=1,2,\ldots;$$

$$\chi_n(x)=\frac{\overline{\Phi}(x)}{P\{N_a=n\}}\varphi^{*(n)}(\tau-x),\ n=1,2,\ldots;\ \chi_0(x)=\frac{\overline{\Phi}(x)}{P\{N_a=0\}}\delta(x-\tau).$$

В результате преобразований выражения в правой части формулы (11) получаем

$$\overline{N}_{ser}=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_0^{\tau}H_f(x)\varphi(x)[\Phi^{*(n-1)}(\tau-x)-\Phi^{*(n)}(\tau-x)]dx+H_f(\tau)\overline{\Phi}(\tau)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\tau}H_f(x)\overline{\Phi}(x)\varphi^{*(n)}(\tau-x)dx=\int_0^{\tau}H_f(x)\varphi(x)\hat{H}_{\varphi}(\tau-x)dx+H_f(\tau)\overline{\Phi}(\tau)+$$
$$+\int_0^{\tau}H_f(x)\overline{\Phi}(x)h_{\varphi}(\tau-x)=\int_0^{\tau}h_f(x)\overline{\Phi}(x)\hat{H}_{\varphi}(\tau-x)dx. \quad (12)$$

Аналогично определяются математические ожидания $\overline{N}_{1,loss}$, $\overline{N}_{2,loss}$, $\overline{N}_{3,loss}$ чисел потерянных требований за период регенерации по причине занятости прибора обслуживанием, АВ и проведением его ТО соответственно. Выражения для этих характеристик имеют вид

$$\overline{N}_{1,loss}=\int_0^{\tau}h_g(t)\overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_{\varphi}(\tau-t)dt+\int_0^{\tau}\overline{\Phi}(t)\hat{H}_{\varphi}(\tau-t)dt\int_0^{t}h_f(t-s)\overline{F}(s)h_g(s)ds, \quad (13)$$

$$\overline{N}_{2,loss}=\int_0^{\infty}\psi_a(x)dx\int_0^{\tau}\hat{H}_{\varphi}(\tau-u)\varphi(u)du\int_0^{x}\hat{H}_g(x-s)l(u,s)ds, \quad (14)$$

$$\overline{N}_{3,loss}=\int_0^{\infty}\psi_p(t)H_g^{\kappa}(t)dt. \quad (15)$$

Таким образом, среднее число требований, поступающих в систему за период регенерации, определяется выражением

$$\overline{N}=\hat{H}_{\varphi}(\tau)+\int_0^{\tau}h_f(x)\overline{\Phi}(x)\hat{H}_{\varphi}(\tau-x)dx+\int_0^{\tau}\overline{\Phi}(t)\hat{H}_{\varphi}(\tau-t)dt\int_0^{t}h_f(t-s)\overline{F}(s)h_g(s)ds+$$
$$+\int_0^{\tau}h_g(t)\overline{F}(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_{\varphi}(\tau-t)dt+\int_0^{\infty}\psi_a(x)dx\int_0^{\tau}\hat{H}_{\varphi}(\tau-u)\varphi(u)du\int_0^{x}\hat{H}_g(x-s)l(u,s)ds+$$
$$+\int_0^{\infty}\psi_p(t)H_g^{\kappa}(t)dt. \quad (16)$$

Используя средние значения поступающих заявок за период регенерации, выпишем стационарные характеристики системы. Финальные вероятности и средние стационарные времена пребывания прибора в состояниях определяются соответственно формулами

$$p_0^* = 1 - \frac{\tau + E\sigma_a \overline{N}_a + E\sigma_p}{E\beta\overline{N}}, \quad p_1^* = \frac{\tau}{E\beta\overline{N}}, \quad p_2^* = \frac{E\sigma_a \overline{N}_a}{E\beta\overline{N}}, \quad p_3^* = \frac{E\sigma_p}{E\beta\overline{N}}, \tag{17}$$

$$T(E_0) = \frac{E\beta\overline{N} - (\tau + E\sigma_a \overline{N}_a + E\sigma_p)}{1 + \overline{N}_{ser} + \overline{N}_a}, \quad T(E_1) = \frac{\tau}{1 + \overline{N}_{ser} + \overline{N}_a},$$
$$T(E_2) = E\sigma_a, \quad T(E_3) = E\sigma_p. \tag{18}$$

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ

Найдем стационарные экономические показатели функционирования системы: $S(\tau)$ — средний удельный доход в единицу календарного времени; $C(\tau)$ — средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования прибора. Для их определения воспользуемся формулами характеристик эффективности для регенерирующего процесса [11], которые для рассматриваемой модели принимают вид

$$S(\tau) = \frac{C_1 \overline{N}_{ser} - c_a E\sigma_a \overline{N}_a - c_p E\sigma_p}{E\beta\overline{N}}, \quad C(\tau) = \frac{c_a E\sigma_a \overline{N}_a + c_p E\sigma_p}{E\beta\overline{N} - (E\sigma_a \overline{N}_a + E\sigma_p)}, \tag{19}$$

где C_1 — доход, получаемый за обслуживание одного требования; c_a — затраты в единицу времени аварийного восстановления; c_p — затраты в единицу времени при проведении ТО прибора.

ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА И ОБСЛУЖИВАНИЯ

Система $M/M/1/0$. Входящий в систему поток требований является простейшим с интенсивностью λ. Время обслуживания требования распределено по показательному закону с параметром μ. Случайные величины — наработка на отказ прибора γ, время восстановления σ_a и время ТО прибора σ_p имеют законы распределения общего вида. В результате преобразования формул (12)–(15) при сделанных предположениях получаем $\overline{N}_{ser} = \mu\tau$, $\overline{N}_{1,loss} = \lambda\tau$, $\overline{N}_{2,loss} = \lambda E\sigma_a H_\varphi(\tau)$ и $\overline{N}_{3,loss} = \lambda E\sigma_p$. Выражения для определения стационарных характеристик системы (17)–(19) принимают вид:

$$p_0^* = \frac{1 + \mu\tau + H_\varphi(\tau)}{1 + (\mu+\lambda)\tau + (1 + \lambda E\sigma_p) H_\varphi(\tau) + \lambda E\sigma_a},$$
$$p_1^* = \frac{\lambda\tau}{1 + (\mu+\lambda)\tau + (1 + \lambda E\sigma_p) H_\varphi(\tau) + \lambda E\sigma_a},$$
$$p_2^* = \frac{\lambda E\sigma_a H_\varphi(\tau)}{1 + (\mu+\lambda)\tau + (1 + \lambda E\sigma_p) H_\varphi(\tau) + \lambda E\sigma_a},$$
$$p_3^* = \frac{\lambda E\sigma_p}{1 + (\mu+\lambda)\tau + (1 + \lambda E\sigma_p) H_\varphi(\tau) + \lambda E\sigma_a}, \tag{20}$$
$$T(E_0) = \frac{1}{\lambda}, \quad T(E_1) = \frac{\tau}{1 + \mu\tau + H_\varphi(\tau)}, \quad T(E_2) = E\sigma_a, \quad T(E_3) = E\sigma_p;$$
$$S = \frac{\lambda(C_1\mu\tau - c_a E\sigma_a H_\varphi(\tau) - c_p E\sigma_p)}{1 + (\mu+\lambda)\tau + (1 + \lambda E\sigma_p) H_\varphi(\tau) + \lambda E\sigma_a}, \quad C = \frac{\lambda(c_p E\sigma_p + c_a E\sigma_a H_\varphi(\tau))}{1 + (\mu+\lambda)\tau + H_\varphi(\tau)}.$$

Система $M/G/1/0$. В этом случае в формулы (17)–(19) нужно подставить следующие выражения для подсчета средних чисел требований, поступающих в систему за период регенерации:

$$\overline{N}_a = H_\varphi(\tau),\ \ \overline{N}_{ser} = \int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt,$$

$$\overline{N}_{1,loss} = \lambda\tau,\ \ \overline{N}_{2,loss} = \lambda E\sigma_a H_\varphi(\tau),\ \ \overline{N}_{3,loss} = \lambda E\sigma_p.$$

В частности, если АВ прибора и его ТО считать мгновенными (на практике это означает, что времена АВ и ТО намного меньше наработок на отказ), характеристики системы $M/G/1/0$ принимают вид

$$p_0^* = 1 - p_1^*,\ \ p_1^* = \frac{\lambda\tau}{\hat{H}_\varphi(\tau) + \int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt + \lambda\tau},$$

$$T(E_0) = \frac{1}{\lambda},\ \ T(E_1) = \frac{\tau}{\hat{H}_\varphi(\tau) + \int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt}.$$

Если обозначить C_p и C_a соответственно затраты на проведение ТО и АВ прибора, то экономические показатели системы будут определяться выражениями

$$S(\tau) = \frac{\lambda\left[C_1\int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt - C_a H_\varphi(\tau) - C_p\right]}{\lambda\tau + \hat{H}_\varphi(\tau) + \int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt}, \tag{21}$$

$$C(\tau) = \frac{\lambda[C_a H_\varphi(\tau) + C_p]}{\lambda\tau + \hat{H}_\varphi(\tau) + \int_0^\tau h_f(t)\overline{\Phi}(t)\hat{H}_\varphi(\tau - t)dt}. \tag{22}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИБОРА

Двухкритериальная задача оптимизации состоит в нахождении периодичности проведения ТО прибора, обеспечивающей глобальный максимум позитивного критерия — среднего удельного дохода в единицу календарного времени $S(\tau)$, глобальный минимум негативного критерия — средних удельных затрат в единицу времени исправного функционирования системы $C(\tau)$.

Для сужения множества парето-оптимальных решений сформулированной двухкритериальной задачи в качестве целевой функции используется линейная свертка частных критериев: $M(\tau) = a_s S(\tau) - a_c C(\tau)$ [12], где a_s и a_c — весовые коэффициенты, определяющие «показатели относительной важности» критериев $S(\tau)$ и $C(\tau)$ соответственно. Таким образом, задача оптимизации сводится к нахождению точки τ_{opt}^M абсолютного максимума функции $M(\tau)$.

Нетрудно убедиться, что для системы $M/M/1/0$ при условии экспоненциального распределения наработки прибора на отказ и мгновенных АВ и ТО задача оптимизации периодичности проведения ТО решения не имеет, т.е. проведение ТО прибора не улучшает стационарные характеристики системы.

В предположении непрерывности характеристик эффективности исследуемой системы достаточным условием существования критических точек функции $M(\tau)$ является выполнение неравенства

$$\lim_{\tau\to 0}(a_s S'(\tau)-a_c C'(\tau))\cdot \lim_{\tau\to\infty}(a_s S'(\tau)-a_c C'(\tau))<0. \qquad (23)$$

В случае, когда частными критериями являются функции (20), условие (23) принимает вид

$$a_s\{h_\varphi(0)[c_p E\sigma_p(1+\lambda E\sigma_a)-c_a E\sigma_a(1+\lambda E\sigma_p)]+C_1\mu(1+\lambda E\sigma_p)+(\lambda+\mu)c_p E\sigma_p\}+$$

$$+a_c(1+\lambda E\sigma_p)^2\{(c_p E\sigma_p-c_a E\sigma_a)h_\varphi(0)+(\lambda+\mu)c_p E\sigma_p\}\cdot\left\{a_s\left[\lambda+\mu+\frac{1}{E\gamma}\right]^2\times\right.$$

$$\times\left[(\lambda+\mu)c_p E\sigma_p+\frac{1}{2}[(\lambda+\mu)c_a E\sigma_a+C_1\mu(1+\lambda E\sigma_a)]\left(\frac{D\gamma}{(E\gamma)^2}-1\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{E\gamma}(c_p E\sigma_p(1+\lambda E\sigma_a)-c_a E\sigma_a(1+\lambda E\sigma_p))+c_1\mu(1+\lambda E\sigma_p)\right]+$$

$$+a_c\left[\lambda+\mu+\frac{1}{E\gamma}+\frac{\lambda E\sigma_a}{E\gamma}\right]^2\left\{\frac{1}{2}(\lambda+\mu)c_a E\sigma_a\left(\frac{D\gamma}{(E\gamma)^2}-1\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{E\gamma}(c_p E\sigma_p-c_a E\sigma_a)+(\lambda+\mu)c_p E\sigma_p\right\}\right\}<0.$$

Пример 1. Определить оптимальную периодичность проведения ТО для системы $M/M/1/0$ при условии, что наработка прибора на отказ имеет распределение Эрланга седьмого порядка со средним значением 35 ч; средние времена между поступлениями требований и их обслуживаниями равны соответственно 0,2 ч и $1/3$ ч; средние длительности АВ и ТО равны 1 ч и 0,6 ч соответственно; доход за полностью обслуженное требование $C_1=100$ ден. ед., расходы в единицу времени АВ и ТО прибора $c_a=1800$ ден. ед./ч, $c_p=380$ ден. ед./ч.

В качестве функции восстановления $H_\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi^{*(k)}(t)$ достаточно взять четыре слагаемых (увеличение числа слагаемых не приводит к изменению окончательных результатов с точностью до двух значащих цифр после запятой).

В результате расчетов в математическом пакете Maple получаем при отсутствии ТО экономические показатели системы $S(\infty)=153{,}17$ ден. ед. и $C(\infty)=42{,}65$ ден. ед. В случае проведения ТО прибора субоптимальные решения двухкритериальной задачи оптимизации равны $\tau_{\text{opt}}^S=18{,}03$ ч, $\tau_{\text{opt}}^C=17{,}62$ ч. Линейная свертка частных критериев при весовых коэффициентах $a_s=a_c=0{,}5$ достигает наибольшего значения при достижении прибором суммарной наработки $\tau_{\text{opt}}^M=17{,}83$ ч; при этом $S(\tau_{\text{opt}}^M)=168{,}47$ ден. ед., $C(\tau_{\text{opt}}^M)=17{,}64$ ден. ед. Графики зависимостей частных критериев и их линейной свертки от периодичности проведения ТО прибора представлены на рис. 3.

Проведение ТО прибора увеличивает средний удельный доход в единицу времени функционирования системы на 9 % и уменьшает средние удельные затраты в единицу времени исправного функционирования системы на 58,6 %. В случае, когда для рассмотренной системы расходы на ТО прибора составляют, например, 1300 ден. ед., задача оптимизации периодичности ТО решения не имеет.

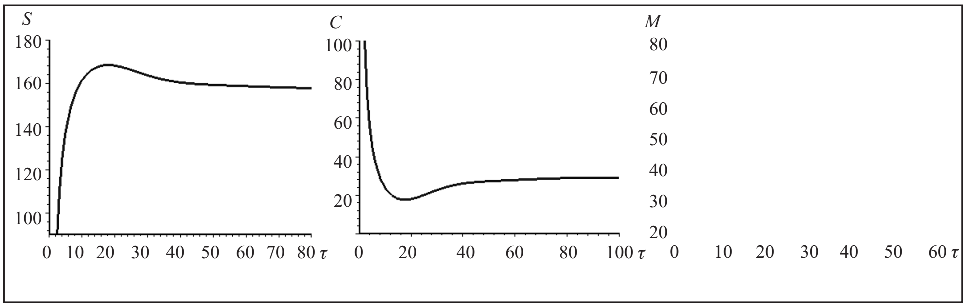

Рис. 3. Графики зависимостей среднего удельного дохода $S(\tau)$, средних удельных затрат $C(\tau)$ и их свертки $M(\tau)$ от периодичности технического обслуживания τ

Если частными критериями задачи оптимизации являются функции (21) и (22), то достаточное условие (23) существования решения задачи оптимизации принимает вид

$$\{a_s C_1 h_f(0) + (C_p - C_a) h_\varphi(0) + C_p(\lambda + h_f(0))\} \cdot \left\{ \frac{\lambda C_a}{2}(D\gamma - (E\gamma)^2) - C_a E\gamma + \right.$$
$$+ C_p E\gamma(\lambda E\gamma + 1) + \left[E\gamma(C_p - C_a) - \frac{a_s C_1 \lambda}{2}(D\gamma + (E\gamma)^2) \right] \times$$
$$\left. \times \int_0^\infty H_f(t)\varphi(t)dt + (C_a + a_s C_1(1 + \lambda E\gamma)) \int_0^\infty t h_f(t)\overline{\Phi}(t)dt \right\} < 0.$$

Пример 2. Рассмотрим систему $M / E_2 / 1/0$ при мгновенных АВ и ТО, в которой среднее время между поступлениями требований равно $1/6$ ч; время обслуживания требований имеет распределение Эрланга второго порядка со средним значением $1/5$ ч, а суммарная наработка на отказ прибора — распределение Эрланга третьего порядка со средним значением 50 ч. Доход, расходы на АВ и ТО прибора соответственно равны $C_1 = 100$ ден. ед., $C_a = 3500$ ден. ед., $C_p = 180$ ден. ед. Функция восстановления $H_\varphi(t)$ определяется выражением [13]

$$H_\varphi(t) = \frac{1}{3}\left(\lambda t - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

При отсутствии ТО экономические показатели системы соответствуют $S(\infty) = 233{,}95$ ден. ед., $C(\infty) = 34{,}96$ ден. ед. В случае проведения ТО прибора субоптимальные решения двухкритериальной задачи оптимизации суть $\tau_{\text{opt}}^S = 13{,}17$ ч, $\tau_{\text{opt}}^C = 11{,}62$ ч. Линейная свертка частных критериев при весовых коэффициентах $a_s = a_c = 0{,}5$ достигает наибольшего значения в точке $\tau_{\text{opt}}^M = 12{,}42$ ч; при этом $S(\tau_{\text{opt}}^M) = 256{,}07$ ден. ед., $C(\tau_{\text{opt}}^M) = 13{,}97$ ден. ед. В случае, когда для рассмотренной системы расходы на ТО прибора составляют, например, 1500 ден. ед., задача оптимизации периодичности ТО решения не имеет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье построена полумарковская модель функционирования системы обслуживания $GI/G/1/0$ с учетом аварийных отказов и проведения технического обслуживания ненадежного прибора. На основе найденного стационарного распределения вложенной цепи Маркова (как решения системы интегральных уравнений) получены математические выражения для определения финальных вероятностей, средних времен пребывания системы в состояниях, средних удельных затрат и дохода. Рассмотрены численные примеры решения задачи двухкритериальной оптимизации проведения ТО прибора. Для сужения парето-оптимальных решений задачи использована линейная свертка экономических критериев.

С помощью изложенной в статье методики можно построить модель ТО системы, когда наработка на отказ обнуляется не только после ТО, но и после аварийного восстановления прибора. Кроме того, исследуется система, в которой полное восстановление прибора осуществляется в результате ТО, а после аварийного отказа происходит его минимальное восстановление, т.е. интенсивность отказов после восстановления прибора такая же, как и в момент отказа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Про одне узагальнення формул Ерланга // Докл. АН УССР. — 1959. — **4**. — С. 347–360.
2. Марьянович Т.П. Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором // Украинский математический журнал. — 1962. — **14**, № 4. — С. 417–422.
3. Марьянович Т.П. Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться // Украинский математический журнал. — 1960. — **12**, № 3. — С. 279–286.
4. Gray W., Scott M., Wang P. A vacation queueing model with service breakdowns // Applied Math. Modeling. — 2000. — **24**. — P. 391–400.
5. Емельянов Г.В. Системы массового обслуживания с приборами, которые могут выходить из строя и восстанавливаться // Проблемы передачи информации. — 1967. — **3**, № 3. — С. 59–63.
6. Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. Исследование надежности однолинейной системы с потерями требований // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — № 2. — С. 89–101.
7. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. — Киев: Наук. думка, 1982. — 236 с.
8. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.И., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.
9. Peschansky A.I. Semi-Markov models of one-server loss queues with recurrent input. — LAP LAMPERT Academic Publishing, 2013. — 138 p.
10. Песчанский А.И., Коваленко А.И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 69–79.
11. Каштанов В.А., Медведев А.И. Теория надежности сложных систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 470 с.
12. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. — М.: Высш. шк., 2002. — 287 с.
13. Байхельт Ф., Франкен П. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.

Поступила 10.01.2014