

МНОГОШАГОВЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ В ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Аннотация. Рассмотрен явный многошаговый одностадийный метод, позволяющий численно интегрировать дифференциальные уравнения, составляющие основу модели циркуляции атмосферы, путем преобразования начально-краевой задачи конвективной диффузии в задачу Коши. Полученный метод имеет преимущество перед существующими вследствие высокой точности и малых вычислительных затрат.

Ключевые слова: задача конвективной диффузии, дискретное представление частных производных, задача Коши для ОДУ, многошаговый метод.

ВВЕДЕНИЕ

Последние годы характеризуются значительным прогрессом в разработке и оперативном применении современных численных гидродинамических методов прогнозов погоды и изменения климата на Земле. Это стало возможным, прежде всего, вследствие появления более совершенных математических моделей, эффективных методов их реализации и средств высокопроизводительных параллельных вычислений [1]. Современные представления о закономерностях протекания основных физических и термодинамических процессов в атмосфере, а также об их взаимозависимости позволяют описать данные процессы уравнениями гидродинамики, моделировать различные звенья общей циркуляции атмосферы и прогнозировать погодные явления. Существующие в мировой практике прогностические модели классифицируются по типу метеорологических процессов, специфике их математической реализации, сроку прогнозов и размеру территории.

До 80-х годов прошлого века оперативные службы погоды развитых стран использовали модели прогноза глобальных синоптических процессов, несмотря на то, что качество таких прогнозов было почти неизменным. Повышенный интерес к глобальным моделям объясняется, прежде всего, тем, что они допускают значительные упрощения и их численное решение осуществляется на сетках с шагом 50 км и более [2–7].

Региональные модели, описывающие метеорологические процессы и явления, которые определяют формирование погоды в отдельных регионах, предназначены для более обоснованных и детализированных в пространстве и во времени прогнозов погоды [8–13]. Эти модели, детально учитывающие рельефные, температурные и влажностные неоднородности подстилающей поверхности, описывают локальные процессы на относительно небольших территориях и численно реализуются на телескопических сетках, что связано с технологическими проблемами.

В общем случае решений уравнений гидродинамики и тепло-, массопереноса, составляющих основу модели циркуляции атмосферы и задачи прогноза погоды, в аналитическом виде не существует. Основными методами их решения являются численные [5], точность и эффективность которых зависит от размерности задачи. Выбрать оптимальный метод решения нелегко, поскольку цель (точность) и средства (экономичность) противоречивы. Несмотря на постоянное совершенствование ЭВМ, проблемы точности и экономичности численных методов решения уравнений Навье–Стокса актуальны и в настоящее время [14, 17].

Сложность физического механизма процессов в атмосфере обуславливает структурную сложность используемой системы нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, что способствует появле-

нию в решении неустойчивости, узких переходных зон с большими градиентами функций и весьма сложных пространственно-временных структур. Вследствие наличия малого параметра при производных второго порядка эти уравнения могут менять свой тип (гиперболический или параболический) в зависимости от моделируемого режима движения в атмосфере, в результате чего возникают проблемы при аппроксимации конвективных и фрикционных членов уравнений гидродинамики. Обычно эти проблемы (в частности, ложное представление, фазовая скорость, вычислительная дисперсия) решаются путем представления уравнений модели циркуляции атмосферы в консервативной форме и применения разностных схем более высокого порядка точности для аппроксимации конвективных членов этих уравнений. В предлагаемой работе используется аппроксимация частной производной разностным оператором четвертого порядка (третьего на неравномерной сетке) на трехточечном шаблоне.

Область устойчивости любого явного конечно-разностного метода ограничена, поэтому для решения большинства прикладных задач рекомендуют применять неявные методы. Однако реализовать их, как правило, значительно сложнее, чем явные. Так, при численном моделировании метеорологических задач использование какого-либо неявного метода для интегрирования уравнений гидродинамики без понижения точности разностной схемы обуславливает применение итерационных методов, поведение которых ввиду нелинейности уравнений непредсказуемо и, следовательно, всегда остается нерешенной проблема сходимости данных методов. Предлагаемый далее численный метод не имеет описанных недостатков.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольнике $\bar{Q} = \{x, t : 0 \leq x \leq \ell, 0 \leq t \leq T\}$, не снижая общности, а лишь в целях уменьшения громоздкости изложения, рассмотрим начально-краевую задачу для скалярного одномерного уравнения конвективной диффузии некоторой функции $q(x, t)$:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial q}{\partial x} \right), \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$q(x, 0) = \eta(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$q|_{x=a} = \alpha(t), \quad q|_{x=b} = \beta(t), \quad t > 0.$$

Предположим, что параметры задачи $v(x, t)$, $\mu(x, t) \geq 0$, $\eta(x)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ достаточно гладки, а начальные и граничные условия согласованы так, что задача (1) имеет единственное решение $q(x, t)$.

Уравнение параболического типа (1) включает члены, описывающие те же физические процессы, что и члены, входящие в уравнение гидромеханики, а именно:

- нестационарный член $\partial q / \partial t$, описывающий скорость изменения величины q во времени;
- конвективный член $v \partial q / \partial x$, описывающий конвекцию величины q , обусловленную движением окружающей среды со скоростью v ;
- диффузионный (или диссипативный) член $\partial(\mu \partial q / \partial x) / \partial x$, описывающий физическую диффузию величины q в окружающей среде вдоль оси x .

Разобьем отрезок $[a, b]$ на J неравных частей точками $x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J$ и обозначим расстояния между ними h_j , $j = 0, 1, \dots, J-1$. Кроме того, разобьем временной отрезок $[0, T]$ на N равных частей точками $t^n = nTN^{-1}$, $n = 0, 1, \dots, N$, с шагом τ . Введем в рассмотрение сеточное множество (x_j, t^n) , $j = 0, 1, \dots, J$, $n = 0, 1, \dots, N$, аппроксимирующее прямоугольник \bar{Q} . Тогда области \bar{Q} будет соответствовать дискретная область \bar{Q}_j^n — прямоугольник, образованный отрезком прямой оси x с внутренними $j = 1, \dots, J-1$ и граничными $j = 0, \dots, J$ узлами, а также отрезком прямой интервала времени t с узлами $n = 1, 2, \dots, N$. Здесь и да-

лее для того чтобы отличать временную сетку от пространственной, величины, относящиеся к отдельным моментам времени, обозначены надстрочным индексом n , а величины, заданные в узлах пространственной сетки, — подстрочным индексом j . Пусть в узлах, образующих построенную сетку ϖ_h , заданы дискретные значения $q_j^n = q(x_j, t^n)$ функции $q(x, t)$.

Для дискретной функции q_j^n определим приближенные значения ψ_j частной производной $(\partial q / \partial x)_j^n$ на основе соотношений

$$\psi_{j+1} + 2 \left(1 + \frac{h_j}{h_{j-1}} \right) \psi_j + \frac{h_j}{h_{j-1}} \psi_{j-1} = \frac{3}{h_j} \left\{ q_{j+1}^n - \left[1 - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 \right] q_j^n - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 q_{j-1}^n \right\} - \frac{h_j h_{j-1}^2}{24} \left[1 - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^4 q}{\partial x^4} \right)_j, \quad j = 2, 3, \dots, J-1, \quad (2)$$

полученных разложением функции ψ в ряд Тейлора в окрестности точек x_j ($j = [2, J-1]$). Из (2) видно, что эти соотношения имеют третий порядок, когда $h_j \neq h_{j-1}$, и четвертый — при $h_j = h_{j-1}$. Рассматриваемые производные $\psi_j = (\partial q / \partial x)_j^n$ входят в (2) неявно. Они вычисляются по заданным значениям q_j^n ($j = [1, J]$) решением систем алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом прогонки.

Аналогично можно получить приближенные значения ξ_j частной производной второго порядка $[\partial(\mu \partial q / \partial x) / \partial x]_j^n$, представляя функцию $\vartheta_j = (\mu \partial q / \partial x)_j^n$ в виде $\vartheta_j = \mu_j \psi_j$.

Отметим основное преимущество предложенного метода аппроксимации производных, входящих в дифференциальные уравнения конвективной диффузии, перед стандартной точечной аппроксимацией. Поскольку решение q_j систем алгебраических уравнений (2) во всех точках j зависит от значений q в других точках, оно зависит от x_j глобально, а не локально, как в случае применения стандартных локальных трехточечных разностных аппроксимаций производных первого и второго порядков.

В общем виде разностные выражения производной первого и второго порядков уравнения (2) можно записать в виде

$$A_j U_{j+1} + B_j U_j + C_j U_{j-1} = F_j, \quad j = 2, 3, \dots, J-1, \quad (3)$$

где

$$U = \begin{Bmatrix} \psi \\ \xi \end{Bmatrix}, \quad A_j = 1, \quad B_j = 2 \left(1 + \frac{h_j}{h_{j-1}} \right), \quad C_j = \frac{h_j}{h_{j-1}},$$

$$F_j = \begin{Bmatrix} \frac{3}{h_j} \left\{ q_{j+1}^n - \left[1 - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 \right] q_j^n - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 q_{j-1}^n \right\} \\ \frac{3}{h_j} \left\{ \vartheta_{j+1} - \left[1 - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 \right] \vartheta_j - \left(\frac{h_j}{h_{j-1}} \right)^2 \vartheta_{j-1} \right\} \end{Bmatrix}.$$

Поскольку $A_j > 0, B_j > 0, C_j > 0, B_j > A_j + C_j$, величина ошибок округления при реализации метода прогонки посредством рекуррентных соотношений

$$U_j = E_j U_{j+1} + D_j, \quad j = J-1, J-2, \dots, 1,$$

$$E_j = -\frac{\gamma_j}{B_j + A_j E_{j-1}}, \quad j=1, 2, \dots, J-1, \quad (4)$$

$$D_j = \frac{F_j - A_j D_{j-1}}{B_j + A_j E_{j-1}}, \quad j=1, 2, \dots, J-1,$$

не будет расти [2]. Граничные условия на левой границе позволяют определить значения $E_0 = 0, D_0 = U_\Gamma$, а граничные условия на правой границе — значение U_J .

Таким образом, аппроксимация частных производных первого и второго порядков (2)–(4) позволяет получить весьма точное (четвертого порядка на равномерной сетке) сеточное представление составляющих конвективно-диффузионных членов уравнения задачи (1) по координатному направлению x . Остается провести необходимые алгебраические вычисления для того, чтобы с учетом полученных дискретных значений членов, входящих в уравнение (1), перейти к задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial t} &= \Lambda q_j, \quad t > 0, \\ q_j \Big|_{t=0} &= q_j^0 \quad \forall x_j \in \varpi_h, \end{aligned} \quad (5)$$

решаемой для каждой отдельной пространственной узловой точки j сетки ϖ_h . В (5) разностное представление дифференциального оператора $D = -v\partial/\partial x + \partial(\mu\partial/\partial x)/\partial x + \varphi$ обозначено Λ . Следовательно Λq_j есть численное значение конвективно-диффузионной части уравнения (1) в точке x_j сетки ϖ_h в области \bar{Q} .

Задачу (5), если ввести обозначение $f(t, q) = \Lambda q_j, y = q_j$, можно решить для конкретных значений j, n ($1 < j < J, 1 < n < N$) с помощью разностных методов для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка как задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= f(t, y), \quad t \in [t_l, t_l + T], \\ y \Big|_{t=t_j} &= y_j, \quad j=0, 1, 2, \dots, J. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, если дифференциальному оператору D в уравнении (1) поставить в соответствие сеточный оператор Λ , удовлетворяющий основным требованиям аппроксимации: заданному порядку точности, сходимости $\Lambda q \rightarrow Dq$ при $h \rightarrow 0$, где h — шаг пространственной сетки, и транспортности (возмущение, нанесенное на функцию q , переносится конвекцией только в направлении скорости), а также решить задачу (5) для всех конкретных значений индексов $j \in (1, J)$ в постановке задачи Коши (6), то получим решение задачи (1) в области Q .

ЯВНЫЙ МНОГОШАГОВЫЙ ОДНОСТАДИЙНЫЙ МЕТОД

В практике численного решения задачи для дифференциального уравнения первого порядка применяются, как правило, одношаговые методы [6, 15, 16], при построении которых предполагается использовать информацию о решаемой задаче только на отрезке, длиной в один шаг $\tau = t_l - t_{l-1}, l=1, 2, \dots, N$. Такие методы наряду с удобными для вычислений особенностями имеют один существенный недостаток — небольшую точность. В методах, точность $O(\tau^p)$ которых соответствует случаям $p > 1$, подобную информацию на каждом этапе процесса нужно, вообще говоря, получать заново, что предопределяет большую трудоемкость вычислительных правил. Отказавшись от требования одношаговости, можно вычислительные методы строить так, чтобы часть полученной информации на нескольких соседних шагах вычислительного процесса использовалась повторно. Аналогичные методы, использующие информацию о решаемой задаче на отрезке, длиной более одного шага, являются основными объектами описанного далее исследования.

Структура существующих общих многошаговых методов весьма сложна [10], поэтому воспользуемся только специальным классом многошаговых одностадий-

ных методов (МШПС), у которых процедура шага заключается в составлении линейной комбинации значений y_i и f_i , $i = n, n+1, n+2, \dots, n+l$. Повторные подстановки значений f , являющиеся сутью многостадийных методов, недопустимы.

Наиболее широко в l -шаговой одностадийной схеме решения задачи (6) применяется процедура шага в виде

$$\sum_{i=0}^l a_i y_{n+i} - \tau_l \sum_{i=0}^l b_i f_{n+i} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (7)$$

Множитель τ_l перед второй суммой выделен для того, чтобы коэффициенты b_i и a_i были безразмерными. Матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_N \\ b_0 & \dots & b_N \end{pmatrix}$$

размера $2 \times (N+1)$ — производящая матрица схемы (7). Если $b_l = 0$, то вычислительные методы вида (7) обычно называют явными, если $b_l \neq 0$ — неявными.

Заметим, что формула вычислений (7) должна быть точной в том случае, когда $y(t)$ есть постоянная величина ($y' = f \equiv 0$). Тогда из нее следует

$$a_l \neq 0, \quad \sum_{i=0}^l a_i = 0. \quad (8)$$

Линейной l -шаговой процедуре (7) и ее производящей матрице, выполнив замену $\vartheta^i = y_i$ и $r^i = f_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, l$, поставим в соответствие характеристические многочлены

$$\Phi_a(\vartheta) = \sum_{i=0}^l a_i \vartheta^i, \quad \Phi_b(r) = \sum_{i=0}^l b_i r^i. \quad (9)$$

Очевидно, что число c тогда и только тогда будет корнем многочлена $\Phi_a(\vartheta)$, когда при $\vartheta = c$ многочлен Φ_a равен нулю. Так как единица является нулем характеристического многочлена Φ_a , она не может быть нулем характеристического многочлена Φ_b . Поэтому в каждом классе процедур существует единственная линейная l -шаговая схема и соответствующая ей единственная производящая матрица, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=0}^l b_i = 1. \quad (10)$$

Далее конечно-разностную схему (7), подчиняющуюся условиям (8)–(10), будем называть нормированной.

Коэффициенты a_i и b_i можно выбирать различными способами так, чтобы (7) аппроксимировало $\partial y / \partial t - f(t, y) = 0$. В работах [9, 10] описаны приемы построения и исследования погрешности, аппроксимации, устойчивости и сходимости некоторых специальных классов эффективных линейных l -шаговых схем. Приведенная в них систематизация теоретических результатов показывает, что основные требования устойчивости МШПС касаются в основном коэффициентов a_i характеристического многочлена Φ_a (9) и формулируются следующими определениями:

- характеристический многочлен Φ_a удовлетворяет корневому критерию, если его корни лежат в единичном замкнутом круге, а на единичной окружности не имеет кратных нулей;

- линейная l -шаговая схема называется сильно устойчивой, если ее характеристический многочлен Φ_a удовлетворяет корневому критерию.

Простейшие и в то же время наиболее используемые схемы (7) получаются на основе квадратурных формул и метода неопределенных коэффициентов, однако не все они устойчивы. В связи с этим потребуем, чтобы действительные коэффициенты искомой линейной l -шаговой схемы удовлетворяли корневому критерию в узком смысле, т.е. чтобы характеристический многочлен Φ_a (9) имел

исключительно действительные корни, находящиеся внутри единичного отрезка вещественной оси, а в единице не было кратных нулей.

Такому требованию при $a_1=1$, $a_2=2$ удовлетворяет явная схема

$$a_1 a_2 y_l - (a_1 + a_2 + a_1 a_2) y_{l-1} + (a_1 + a_2 + 1) y_{l-2} - y_{l-3} = \\ = \left\{ A + B + \tau_l \left[a_1 a_2 - (a_1 + a_2 + 1) \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} + \frac{\tau_{l-2} + \tau_{l-1}}{\tau_l} \right] \right\} f_{l-1} - \\ - A f_{l-2} - B f_{l-3} + O[\tau^4], \quad (11)$$

где

$$A = \frac{1}{6} \frac{\tau_l^3}{\tau_{l-1} \tau_{l-2}} \left[\left(2 + 3 \frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right) a_1 a_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^2 \left(\frac{\tau_{l-1} + 3\tau_{l-2}}{\tau_l} \right) (1 + a_1 + a_2) - \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^3 \right], \\ B = -\frac{1}{6} \frac{\tau_l^3}{\tau_{l-2} (\tau_{l-1} + \tau_{l-2})} \left[\left(2 + 3 \frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right) a_1 a_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\tau_{l-1}}{\tau_l} \right)^3 (1 + a_1 + a_2) + \frac{2\tau_{l-2} - \tau_{l-1}}{\tau_l} \left(\frac{\tau_{l-1} + \tau_{l-2}}{\tau_l} \right)^2 \right].$$

Естественно, увеличение значения l повышает сложность решения, особенно в приложении к метеорологическим задачам моделирования циркуляции атмосферы и прогноза погоды. Следовательно, выбор определенного значения l зависит от характера решаемой задачи. Вряд ли целесообразно использовать большие значения l в тех случаях, когда применяются методы с ограниченными значениями l и не ожидается существенного улучшения результатов. Поэтому в схеме (11) выбрано такое значение l , которое обеспечивает точность $O[\tau^4]$ решения задачи Коши, согласующуюся с точностью $O[h^4]$ аппроксимации производных, входящих в дифференциальные уравнения конвективной диффузии (1).

Отметим, что построение неявного метода, включающего дополнительное приближенное значение $f(t_n, y_n)$, не дает явного выражения для нахождения y_n , а только уравнения для этой неизвестной. Обычно значение y_n находят лишь приближенно, пользуясь, как правило, каким-либо методом последовательных приближений. Итерации значительно усложняют процесс вычислений y_n и являются существенным недостатком неявного метода. Особенно это касается случаев, когда $f(t_n, y_n)$ — значение разностных выражений для конвективных и диффузионных членов нелинейных дифференциальных уравнений гидродинамики, поскольку нелинейность уравнений не позволяет априори обеспечить сходимость соответствующего итерационного процесса.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В целях первоначальной оценки рассмотренного в настоящей статье явного метода МШС решено большое количество тестовых, включая жестких, задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Численный эксперимент показал, что предложенный метод не уступает лучшим из существующих. Среди таких задач — тесты VDPOL, ROBER, OREGO, HIRES и CUSP из [7].

Пример 1. Рассмотрим тестовую задачу Коши, которая описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} + y \cos t = e^{-\sin t}, \quad t > 0, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (12)$$

с начальным условием $y(0) = 0$ и имеет точное решение $y(t) = te^{-\sin t}$, изображенное на рис. 1 сплошной линией. Данная задача выбрана в целях демонстра-

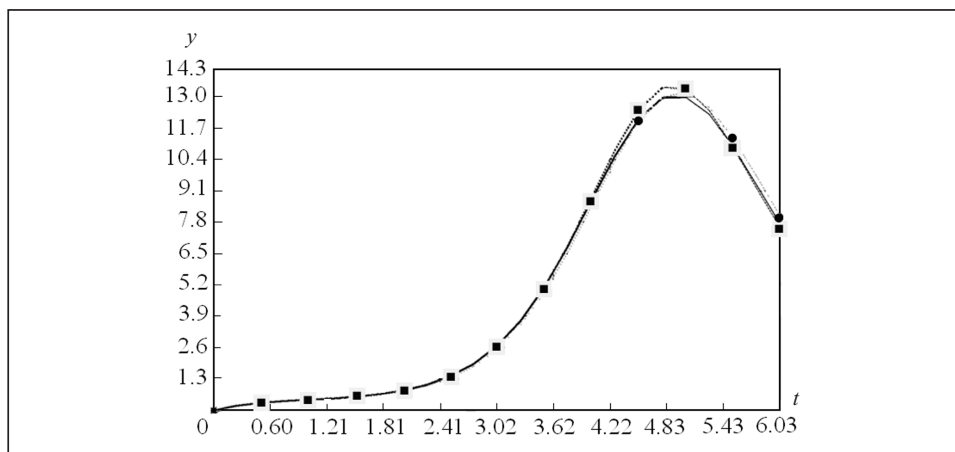


Рис. 1. Графическое представление результатов точного и численного решений задачи (12)

ции поведения решения предложенной разностной схемы для класса задач, допускающих как ниспадающее, так и растущее решение. (В метеорологических задачах иногда возникают решения подобного типа.) Она позволяет проследить зависимость ошибки от растущего решения.

Задача (12) численно решалась с помощью явного метода МШ1С и для сравнения — с помощью весьма популярного метода Рунге–Кутты на сетках с шагами $h = 2\pi / N$ при $N = 25, 50$ и 100 . Согласно результатам решения явный метод МШ1С является устойчивым, что согласуется с теоретическим анализом. Сравнительная качественная оценка методов МШ1С и Рунге–Кутты (см. рис. 1, результаты обозначены \bullet и \blacksquare соответственно), которая проводилась по максимальной относительной ошибке в пределах интервала интегрирования, оказалась мало презентабельной, поскольку полученные решения слабо различимы. Количественная оценка, представленная в табл. 1, показала, что метод МШ1С не только точнее, но и эффективнее метода Рунге–Кутты, так как требует в четыре раза меньше вычислений значений правой части дифференциального уравнения.

Пример 2. Рассмотрим решение жесткой нелинейной задачи [6], которая описывается уравнениями

$$\frac{du}{dt} = v - \zeta \cdot u \cdot (u^2 + v^2 - 1), \quad \frac{dv}{dt} = -u - \zeta \cdot v \cdot (u^2 + v^2 - 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (13)$$

с начальными условиями $u(0) = 0, v(0) = 1$.

Независимо от значения параметра жесткости ζ эта тестовая задача имеет точное решение $u = \sin t, v = \cos t$, изображенное на рис. 2 сплошными линиями.

Задача решалась предлагаемым явным методом МШ1С на сетке с постоянным шагом $h = 2\pi \cdot 10^{-6}$. Численные результаты (отмечены точками на кривых, см. рис. 2) позволяют качественно оценить точность решения. Для количественной оценки эффективности метода МШ1С осуществлялись следующие операции:

- вычислялась максимальная абсолютная ошибка на всем интервале интегрирования;

- оценивались вычислительные затраты (Nf) с помощью подсчета количества вычислений правых частей дифференциальных уравнений (13);

- проводилось сравнение данного метода с реализованными на более мелкой сетке явным адаптивным методом [6] и неявным методом, наиболее эффективным решателем жестких задач сис-

Таблица 1

Количество узлов сетки, N	Погрешность решения задачи (12) методами	
	МШ1С	Рунге–Кутта
25	0.03317900	0.04566500
50	0.00656670	0.02208500
100	0.00093927	0.01078000

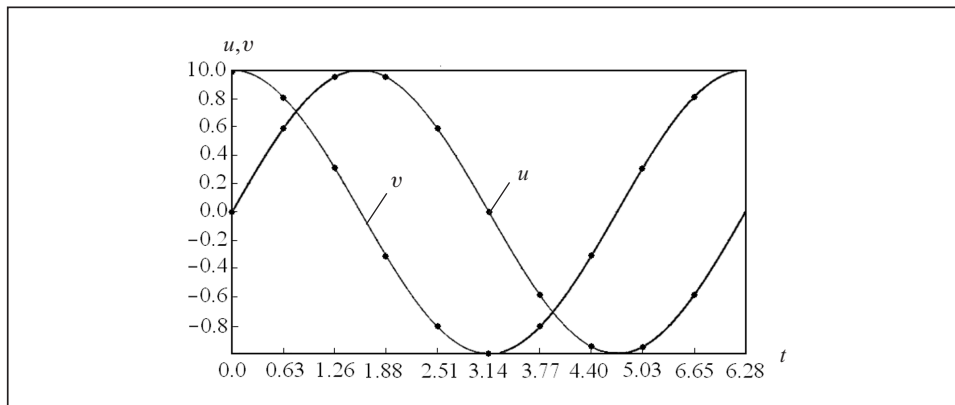


Рис. 2. Графическое представление результатов точного и численного решений задачи (13)

Таблица 2

Метод	Шаг сетки, h	Параметр жесткости, ζ	Абсолютная максимальная ошибка	Nf	NJ	NLU
МШС	$2\pi \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2.05 \cdot 10^{-3}$	6	0	0
		$1 \cdot 10^{-4}$	$4.41 \cdot 10^{-4}$	6	0	0
Адаптивный	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1.53 \cdot 10^{-5}$	203	0	0
		$1 \cdot 10^{-4}$	$4.88 \cdot 10^{-5}$	246	0	0
MATLAB ode 15s	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2.83 \cdot 10^{-4}$	330	33	94
		$1 \cdot 10^{-4}$	$3.34 \cdot 10^{-4}$	1379	184	443

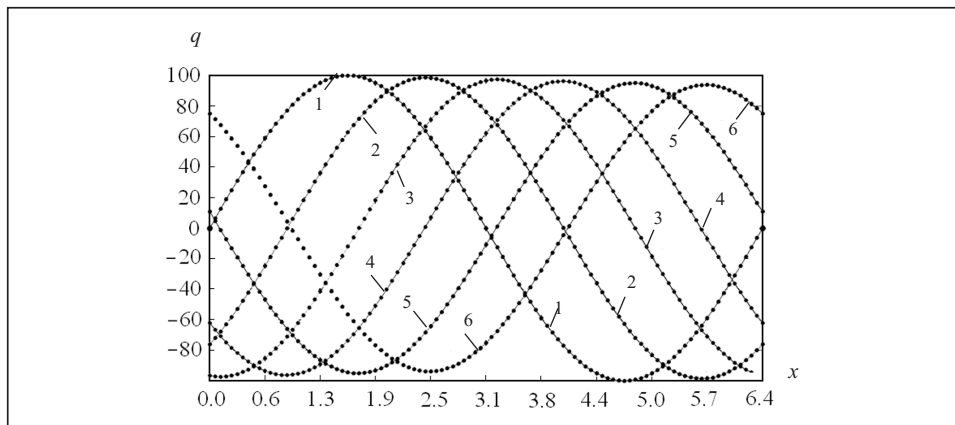


Рис. 3. Графическое представление результатов точного и численного решений задачи (1)

темы MATLAB ode 15s [7], для которого приводятся также количество операций матрицы Якоби (NJ) и число LU-разложений (NLU).

Результаты представлены в табл. 2. Низкая эффективность неявного метода MATLAB ode 15s объясняется быстрым изменением якобиана в процессе решения.

Пример 3. Рассмотрим задачу (1). При $v = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\eta(x) = \sin(x)$, $a = 0$, $b = 2\pi$ она имеет аналитическое решение $q(x, t) = \exp(-\mu t) \cdot \sin(x - vt)$ (на рис. 3 представлено сплошной линией), позволяющее оценить эффективность, точность и устойчивость предлагаемого метода при решении гидродинамических задач. Результаты численного решения тестовой начально-краевой за-

дачи для скалярного одномерного уравнения конвективной диффузии на сетке с шагами $h = 2\pi / J$ и $\tau = h$ при $J = 100$ на рис. 3 отмечены точками, а цифрами — результаты, полученные через каждые 20 временных шагов. Как следует из рис. 3, численные результаты практически не отличаются от точного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретический и численный анализы предложенного явного метода МШ1С решения задачи конвективной диффузии (1) показали, что он экономичен, аппроксимирует точное решение в узлах сетки с порядком $O[h^4, \tau^4]$ и устойчив на произвольных допустимых сетках. Вследствие точности и эффективности метод можно применять при решении весьма сложной задачи моделирования общей циркуляции атмосферы и климата Земли.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прусов В.А., Дорошенко А.Ю. Моделювання природних і техногенних процесів в атмосфері. — К.: Наук. думка, 2006. — 541 с.
2. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию). — М.: Наука, 1973. — 400 с.
3. Рунч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
4. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592с.
5. Численные методы, используемые в атмосферных моделях / Под ред. В.П. Садокова. — Ленинград: Гидрометеоздат, 1982. — 359 с.
6. Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equations. — New York; London: J. Wiley & Sons, 1962. — 407 p.
7. Stetter H.J. Analysis of discretization methods for ordinary differential equations. — Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1973. — 461 p.
8. Doroshenko A.Yu., Prusov V.A. Methods of efficient modeling and forecasting regional atmospheric processes // Advances in Air Pollution Modeling for Environmental Security. NATO Science Series / I. Faragó, Á. Havasi, K. Georgiev (Eds). — Springer-Verlag, 2005. — 54. — P. 143–152.
9. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.Н. Метод численного решения многомерной задачи конвективной диффузии / Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 1. — С. 100–107.
10. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.Н. Выбор параметра модифицированного аддитивно-усредненного метода // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 4. — С. 98–105.
11. Прусов В.А., Дорошенко А.Е., Черныш Р.Н., Гук Л.Н. Эффективная разностная схема численного решения задачи конвективной диффузии // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 3. — С. 64–74.
12. Prusov V., Doroshenko A., Faragó I., Havasi Á. On the numerical solution of the three-dimensional advection-diffusion equation // Проблемы программирования. — 2006. — № 2–3. — С. 641–647.
13. Prusov V.A., Doroshenko A.Yu. On efficient numerical solution of one-dimensional convection–diffusion equations in modelling atmospheric processes // International Journal of Environment and Pollution. — 2008. — 32, N 2. — P. 231–249.
14. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. — М.: Мир, 1990. — 726 с.
15. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
16. Скворцов Л.М. Явный многошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — 47, № 6. — С. 959–967.
17. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 248 с.

Поступила 30.09.2014