

АЛГОРИТМ, УСТАНОВЛИВАЮЩИЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МНОГОЛЕНТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Аннотация. Предложен алгоритм определения эквивалентности многоленточных автоматов, представленных в виде графов, основанный на доказанной автором теореме о достаточных условиях эквивалентности. Алгоритм состоит в построении специальной (замкнутой) диаграммы с помощью элементарных операций, предложенных М. Бердом. Сформулированы правила применения этих операций, которые позволяют сделать алгоритм конечным.

Ключевые слова: многоленточный автомат, детерминированный автомат, эквивалентность.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель многоленточного детерминированного автомата впервые сформулирована в работе М. Рабина и Д. Скотта [1] в 1959 г. Там же установлена неразрешимость проблемы включения. Это характеризовало модель многоленточного автомата как принципиально отличную от одноленточных автоматов с разрешимыми проблемами включения и эквивалентности. Проблема эквивалентности многоленточных автоматов оставалась нерешенной до публикации работы М. Берда [2] в 1973 г., где рассмотрены автоматы с двумя лентами, а также введены два новых понятия: представление автомата в виде орграфа (схемы) с отмеченными дугами и определение замкнутой диаграммы (орграфа со специальными свойствами), позволяющие определить эквивалентность двух схем, если существуют их морфные отображения на такую диаграмму. Опираясь на эти понятия, М. Берд предложил алгоритм, устанавливающий эквивалентность автоматов с двумя лентами и заключающийся в построении замкнутой диаграммы по двум схемам.

Некоторое обобщение алгоритма М. Берда выполнено в работе [3], где в отличие от [2] свойство замкнутости определено не локально в вершине диаграммы, а с привлечением некоторых подграфов, представляющих одноленточные автоматы.

В 1991 г. Т. Харью и Ю. Кархумяки [4] доказали разрешимость проблемы эквивалентности в множестве автоматов с любым числом лент сведением задачи к исследованию упорядоченных групп в кольцах с делителем.

В ряде работ доказательства эквивалентности также построены с приведением многоленточного языка к групповым или полугрупповым конструкциям [5–7]. Техника таких доказательств мало приемлема для решения практически важных вопросов конструирования автоматов с многими лентами, а именно оптимизации, построения системы преобразований, надежности и т.п. Поэтому оставались актуальными разработки методов сравнения автоматов, не входящие в другие модели вычислений. Одной из таких работ является диссертация В.Е. Хачатряна [8], в которой рассмотрены структурные преобразования автоматов в графовом виде и решены указанные проблемы для некоторых подклассов.

Обобщение введенного М. Бердом понятия замкнутой диаграммы позволило автору настоящей статьи в [9] сформулировать достаточные условия эквивалентности многоленточных автоматов самого общего вида. Автоматы эквивалентны, если существуют их морфные отображения на замкнутую диаграмму. При этом понятие замкнутости в [9] отличается от понятия замкнутости, введенного М. Бердом [2]. Способ построения такой диаграммы очевиден, но основная трудность заключается в обеспечении конечности этого процесса, чему и посвящена настоящая статья.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Как и в работе [9], n -ленточный детерминированный автомат представлен далее в виде размеченного орграфа, называемого схемой. Последняя есть частный случай более общих понятий: полудиаграммы и диаграммы.

Обозначим $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ попарно непересекающиеся конечные алфавиты, а Σ — объединенный алфавит $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_n$. Полудиаграмма E над алфавитом Σ есть четверка $E = [|E|, \Sigma, G, \lambda]$, где $|E|$ — конечное множество вершин (состояний), $|E| \cap \Sigma = \emptyset$, $\lambda \in |E|$ — выход, $G \subseteq [|E| \setminus \{\lambda\}] \times \Sigma \times |E|$ — множество дуг, отмеченных символами из алфавита Σ . Две дуги, отмеченные одинаковыми символами, будем называть одноименными. Выход λ не имеет исходящих дуг.

Вершина свободна, если она не является выходом, но не имеет исходящих дуг. Вершина детерминирована, если символы любой пары исходящих из нее дуг различны.

Вершина k -алфавитна, если из нее исходят дуги, отмеченные символами из k алфавитов. Моноалфавитной будем называть 1-алфавитную вершину.

Полудиаграмма, не имеющая свободных вершин, называется беступиковой.

Дугу $(X, \sigma, Y) \in G$ условимся обозначать выражением $X - \sigma \rightarrow Y \in G$. Множество всех дуг алфавита Σ_i , исходящих из вершины M , будем называть кустом с корнем M и обозначать $q_i(M)$. Куст $q_i(M)$ является полным, если для любого $\sigma \in \Sigma_i$ куст q_i содержит дугу, отмеченную символом σ .

Полудиаграмму назовем полной, если любая ее вершина является корнем полных кустов. Последовательность $\pi = M_0 \sigma_0 M_1 \dots M_{k-1} \sigma_k M_k$, для которой $M_i - \sigma_i \rightarrow M_{i+1} \in G$ ($i=0, \dots, k-1$), есть путь из M_0 в M_k . Вершина N достижима из вершины M , если существует путь из M в N .

Трассой $A \rightarrow B$ из начальной вершины A в конечную вершину B называется поддиаграмма T_{AB} , в которой существует путь из A в B , включающий все ее дуги.

Вершину M беступиковой полудиаграммы назовем особой, если выход из M недостижим.

Путь π порождает n -ку $\nu(\pi) = (u_1, \dots, u_n)$, где слова u_1, \dots, u_n алфавитов $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ получаются из последовательности π выбором символов соответствующих алфавитов в порядке их следования. Пути π_1 и π_2 эквивалентны, если $\nu(\pi_1) = \nu(\pi_2)$.

Два пути: π_1 и π_2 , коллинеарны, если n -ки $\nu(\pi_1)$ и $\nu(\pi_2)$ таковы, что составляющие их слова можно дополнить до эквивалентных.

Диаграмма E есть такая полудиаграмма E , у которой все вершины детерминированы. Схема есть пара $S = (E, O_S)$, где E — полная диаграмма, все вершины которой моноалфавитны, O_S — вход схемы.

Обозначим $\Pi(S)$ множество путей схемы S из O_S в λ , а также $\nu[\Pi(S)]$ — множество n -ок, порождаемых всеми путями из множества $\Pi(S)$. Две схемы: S_1 и S_2 , эквивалентны тогда и только тогда, когда $\nu[\Pi(S_1)] = \nu[\Pi(S_2)]$.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ СХЕМ

Пусть $p = (M - \sigma_i \rightarrow N, M - \sigma_j \rightarrow L)$ есть пара дуг диаграммы E , $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\sigma_j \in \Sigma_j$, $\Sigma_i \neq \Sigma_j$. Пара дуг p замкнута, если в диаграмме E существуют дуги $N - \sigma_j \rightarrow Q$ и $L - \sigma_i \rightarrow Q$.

Дуга g замкнута с полным кустом q , если она замкнута с любой дугой $d \in q$.

Полные кусты замкнуты, если любая дуга одного куста замкнута со всеми дугами другого куста.

Вершина M замкнута [9], если в множестве D всех исходящих из M дуг существует последовательность подмножеств $D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_m = D$, где D_0 есть полный куст и для любого индекса r ($0 \leq r \leq m-1$) выполняются условия $D_{r+1} = D_r \cup d_r$, $d_r \in D \setminus D_r$ (здесь дуга d_r замкнута с некоторым полным кустом $q_r \subseteq D_r$). Частным случаем замкнутости вершины являются бинарная замкнутость, когда все кусты попарно замкнуты. Замкнутость, отличную от бинарной, будем называть обобщенной.

Диаграмма E замкнута, если она беступикова и все ее неособые вершины замкнуты.

Морфизмом $f : E_1 \rightarrow E_2$ из полудиagramмы E_1 в полудиagramму E_2 назовем такое отображение $|E_1| \rightarrow |E_2|$, для которого выполняются два условия:

$$(X - \sigma \rightarrow Y) \in G_1 \Rightarrow f(X) - \sigma \rightarrow f(Y) \in G_2 \text{ и } f(\lambda_1) = f(\lambda_2).$$

В работе [9] доказаны достаточные условия эквивалентности схем: если для заданных схем S_1 и S_2 существует замкнутая диаграмма E и морфизмы $s_1 : S_1 \rightarrow E$ и $s_2 : S_2 \rightarrow E$ при выполнении равенства $S_1(O_1) = S_2(O_2)$, то данные схемы эквивалентны.

3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Алгоритм сравнения схем состоит в том, что по двум заданным схемам строится замкнутая диаграмма, «включающая» эти схемы. Существенно применение условий обобщенной замкнутости вершин, что позволяет избежать бесконечного «разрастания» диаграммы. В предлагаемом алгоритме выполняются две элементарные операции над диаграммой: упаковка дуг и их замыкание [2]. Обе операции применяются к дугам, исходящим из одной вершины.

Упаковка пары одноименных дуг: $M - \sigma \rightarrow N$ и $M - \sigma \rightarrow L$, сводится к отождествлению вершин N и L и применяется к дугам, отмеченным одинаковыми символами. Упаковка ложна, если одна из отождествляемых вершин является выходом, а вторая не свободна.

Замыкание пары дуг: $d_i = M - \sigma_i \rightarrow N$ и $d_j = M - \sigma_j \rightarrow L$, $\sigma_i \in \Sigma_i$, $\sigma_j \in \Sigma_j$, $i \neq j$, заключается в добавлении дуг $g_i = L - \sigma_i \rightarrow P$ и $g_j = N - \sigma_j \rightarrow P$ и является ложным, если вершина N или L есть выход диаграммы. Дуги g_i (g_j) будем называть прямыми копиями дуг-оригиналов d_i (d_j). Отношение прямой копии определяет транзитивное отношение оригинал–копия на множестве всех дуг строящейся диаграммы.

Построение замкнутой диаграммы для схем S_1 и S_2 начинается отождествлением их входов O_1, O_2 и выходов λ_1, λ_2 . Отождествленные вершины обозначим O и Λ , выполним все возможные упаковки и полученную в результате диаграмму обозначим D_0 .

Над этой диаграммой выполним операции замыкания и упаковки по определенным далее правилам, чтобы сделать процесс конечным. Для обозначения полученной диаграммы будем увеличивать нижний индекс D_0 на единицу.

Назовем схему S_1 замыкаемой, а схему S_2 — основной. Морфизмы схем S_1 и S_2 в текущей диаграмме D_i обозначим соответственно $\text{Im}(s_{1i})$ и $\text{Im}(s_{2i})$. Отметим верхними индексами 1 и 2 соответственно все дуги замыкаемой и основной схемы и назовем их базовыми оригиналами. Принятые обозначения дуг будем переносить на их копии, а при упаковке дуг с различными индексами совмещенную дугу отмечать индексом 12. Обозначим S_i^1 текущую поддиаграмму, дуги которой имеют индексы 1 или 12, а S_i^2 — поддиаграмму с дугами, имеющими индексы 2 или 12.

Выполним замыкание дуг схемы S_1 по трассам схемы S_2 .

После отождествления входа и выхода схем и выполнения всех возможных упаковок диаграмма D_0 имеет следующие свойства:

- а) незамкнутые вершины являются корнями полных кустов, принадлежащих замыкаемой S_0^1 и основной S_0^2 поддиаграммам;
- б) замыкаемая S_0^1 и основная S_0^2 поддиаграммы полные.

С целью сделать алгоритм более обозримым объединим совокупности элементарных операций в виде модулей, одним из которых будет замыкание дуги с полным кустом $M[d, q]$, где d — дуга, а q — куст, исходящие из одной и той же вершины.

Если дуга и куст принадлежат разным алфавитам, то выполняются замыкания дуги d со всеми дугами куста q , а если одному и тому же алфавиту, то выполняется упаковка дуги d с одноименной дугой куста q .

При описании шагов алгоритма используем специальное множество Ω (буфер), в которое будем помещать дуги замыкаемой поддиаграммы и их копии, подлежащие замыканию.

Введем понятие «слой замыкания» куста дуг, отмеченных символами алфавита Σ_x . Обозначим $\Sigma_x^* = \Sigma \setminus \Sigma_x$ алфавит, не содержащий символов алфавита Σ_x .

Слой $\delta(C, \Sigma_x^*)$ имеет некоторую начальную вершину C и представляет собой объединение трасс, начинающихся в этой вершине и состоящих из дуг, отмеченных символами алфавита Σ_x^* . Вершины, из которых исходят дуги, отмеченные символами алфавита Σ_x , являются конечными вершинами слоя.

Замыкание куста по слою. Выберем одну из незамкнутых вершин (положим, вершину A) диаграммы D_0 и куст $q_x(A) \in S_0^1$, исходящий из A . Опишем процедуру замыкания куста $q_x(A)$ с дугами слоя $\delta(C, \Sigma_x^*)$. Обозначим эту процедуру $\text{Pr}[q_x(A), \delta]$.

Вначале буфер Ω пуст.

База индукции. Добавим дуги куста $q_x(A)$ в буфер Ω .

Шаг индукции. Выберем из буфера Ω произвольную дугу d и выполним модуль $M[d, q]$, где q — полный куст слоя $\delta(A, \Sigma_x^*)$ основной поддиаграммы.

Если дуга d и куст q принадлежат разным алфавитам, то добавим в буфер Ω все копии дуги d , а если одному и тому же, то выполним упаковку и удалим дугу d из буфера Ω , если эта дуга замкнута со всеми кустами слоя $\delta(A, \Sigma_x^*)$.

Если копия дуги d «появляется» в вершине, из которой исходит ее оригинал, то они упаковываются. Если упакованная дуга замкнута со всеми кустами слоя $\delta(A, \Sigma_x^*)$, то она удаляется из буфера Ω .

Конец. Процедура заканчивается, если одна из элементарных операций оказывается ложной или буфер Ω пуст. В первом случае схемы неэквивалентны (см. далее разд. 4).

Примем, что процедура $\text{Pr}[q_x(A), \delta]$ инициирована кустом $q_x(A)$, а описанный алгоритм есть инициация куста $q_x(A)$.

Полученная в результате поддиаграмма имеет свойства а) и б), как и исходная диаграмма.

Алгоритм состоит из следующих шагов.

Шаг 1. В поддиаграмме S_i^1 находим куст $q_x(N)$, который исходит из незамкнутой вершины N .

Шаг 2. Помещаем куст $q_x(N)$ в буфер и иницируем выполнение процедуры $\text{Pr}[q_x(N), \delta]$.

Шаг 3. Переходим к шагу 1.

Обеспечение конечности диаграммы рассмотрено в разд. 5.

4. КОРРЕКТНОСТЬ АЛГОРИТМА ЗАМКНАНИЯ СХЕМ

Для доказательства корректности и конечности алгоритма будем использовать понятие замкнутости трасс.

База индукции. Вначале определим понятие «замкнутость дуги по трассе». Рассмотрим дугу $d = O - a \rightarrow A$, $a \in \Sigma_a$, и трассу $T = O - b \rightarrow C - \rightarrow D - a \rightarrow E$ с начальным участком $T_{n-1} = O - b \rightarrow C - \rightarrow D$ длины $(n-1)$, дуги которого отмечены символами алфавитов $\Sigma \setminus \Sigma_a$, а дуга $d = D - a \rightarrow E$ — символом a .

Дуга $d = O - a \rightarrow A$ замкнута по трассе T , если эта дуга и $n-1$ ее копия замкнуты с дугами участка T_{n-1} , а n -я копия упакована с n -й дугой d трассы T (рис. 1). (На рис. 1–5 дуги изображены сплошными линиями, а трассы — штриховыми).

Если дуга d замкнута по трассе T , то существует трасса $T_c = A - b \rightarrow B - \rightarrow E$, состоящая из копий дуг трассы T_{n-1} . Для дуги d трассы T и T_c выполняется соотношение

$$v[\pi(d)] \oplus v[\pi(T_c)] = v[\pi(T)], \quad (1)$$

где символ \oplus обозначает операцию поэлементной конкатенации n -ок.

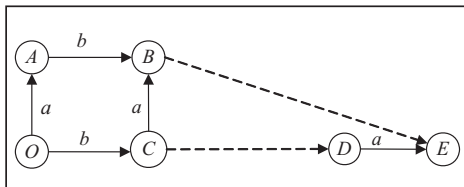


Рис. 1

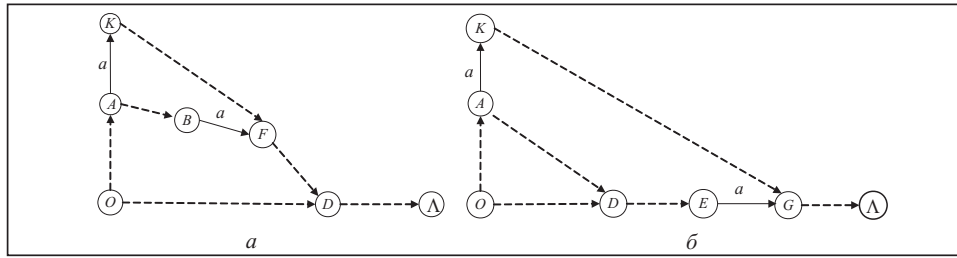


Рис. 2

Если дуга d замкнута по трассе T , то данная дуга замкнута по любой трассе с начальным участком T . В этом случае в соотношении (1) трассы T_c и T продлеваются одной и той же трассой. Дугу d будем называть замыкаемой, трассу T — основной, а трассу T_c — замыкающей.

Из соотношения (1) следует свойство замкнутости дуги d по трассе T : трасса T содержит дугу, отмеченную символом a , которая является первой из дуг, отмеченных символами алфавита Σ_a .

Используя понятие замкнутости дуги по трассе как базу индукции, определяем понятие замкнутости трассы P по трассе T .

Индуктивное предположение. Пусть замыкаемая трасса $P_m = O \rightarrow A$ длины m замкнута по основной трассе $T_n = O \rightarrow D$ и существует замыкающая трасса $T_c = A \rightarrow D$. Для этих трасс выполняется соотношение

$$v[\pi(P_m)] \oplus v[\pi(T_c)] = v[\pi(T_n)]. \quad (2)$$

Положим, что дуга $d = A - a \rightarrow K$ не принадлежит трассе T_c . Рассмотрим следующие случаи:

- дуга d замкнута по трассе $T_c = A \rightarrow D$ с замыкающей трассой $T'_c = K \rightarrow F$ (рис. 2, а), обозначим $T'_n = T_n$;
- дуга d_m замкнута по трассе $T'_n = T_c \cup (D \rightarrow E - a \rightarrow G)$ с замыкающей трассой $T'_c = K \rightarrow G$ (рис. 2, б), обозначим $T_n = O \rightarrow D \rightarrow E - a \rightarrow G$.

В обоих случаях положим, что замыкаемая трасса $P_{m+1} = O \rightarrow A - a \rightarrow K$ замкнута по основной трассе T_n с замыкающей трассой T'_c .

Используя равенства (1), (2), для трасс P_{m+1} , T'_c и T'_n получим

$$v[\pi(P_{m+1})] \oplus v[\pi(T'_c)] = v[\pi(T'_n)]. \quad (3)$$

Опишем используемые далее свойства замыкающих трасс: дуги замыкающей трассы T'_c являются копиями дуг основной трассы T'_n .

Алгоритм, приведенный в разд. 3, фактически является процедурой замыкания множества трасс T схемы S_1 по всевозможным трассам схемы S_2 .

Рассмотрим некоторую трассу $T_i \in T$. Замыкание или упаковка любой дуги d этой трассы может выполняться только тогда, когда выполнено замыкание или упаковка хотя бы одной дуги, предшествующей дуге d в этой или другой трассе. А поскольку замыкание схем начинается с замыкания дуг, исходящих из вершины O и принадлежащих различным схемам, замыкание любой дуги возможно, если выполнено замыкание хотя бы одной трассы, начинающейся в вершине O и заканчивающейся в вершине, из которой исходит дуга d .

Отметим следующее свойство строящейся диаграммы: на начальном этапе между вершинами трассы T_i и схемы S_2 не имеется путей, не проходящих через вершину O . Обозначим $\text{Im}(t_i)$ и $\text{Im}(s_i)$ морфизмы схем T_i и S_2 соответственно в диаграмму D_n .

Положим, что вершины $M \in |\text{Im}(t_i)|$ и $N \in |\text{Im}(s_i)|$ отличны от вершины O .

Теорема 1. Для того чтобы существовала трасса $T = M \rightarrow N$, где $[T \setminus \{M, N\}] \notin |\text{Im}(d_0)|$, необходимо и достаточно, чтобы существовали в $\text{Im}(d_0)$ коллинеарные трассы $O \rightarrow M$ и $O \rightarrow N$ и трасса $O \rightarrow M$ была замкнута по трассе $O \rightarrow N$.

Доказательство. Достаточность. Справедливость следует из определения замкнутости трасс и соотношения (3).

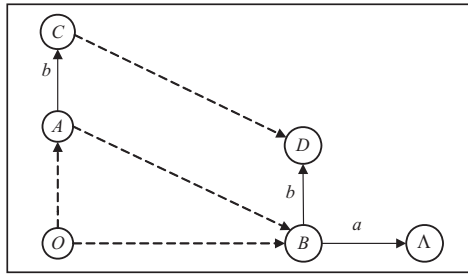


Рис. 3

что существует основная трасса $M_n \rightarrow N$, по которой замкнута трасса $M_n \rightarrow M$. Следовательно, существует замыкаемая дуга $d_{n-1} = M_{n-1} - \sigma \rightarrow M_n$ и основная трасса $M_{n-1} \rightarrow N$, по которой эта дуга замкнута. Так как все замыкаемые трассы исходят из вершины O , существует дуга $d_0 = O - \sigma \rightarrow M_1 \in S_1$, являющаяся начальной дугой трассы $O \rightarrow M$ и замкнутой по трассе $O \rightarrow N$. ■

Теорема 2. Если одна из элементарных операций, выполняемых при замыкании двух схем, оказывается ложной, то схемы неэквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим вариант, когда при замыкании двух схем: S_1 и S_2 , ложным оказалось замыкание дуг, т.е. в строящейся диаграмме D_n образовался фрагмент, показанный на рис. 3, где дуга $B - b \rightarrow D$ не может быть замкнутой с дугой $B - a \rightarrow \Lambda$, так как из выхода Λ не может исходить дуга, которую необходимо добавить для операции замыкания.

В описанном алгоритме сравнения схем выполняются замыкания трасс схемы S_1 по трассам схемы S_2 . Дуга $B - a \rightarrow \Lambda$ (см. рис. 3) принадлежит схеме S_2 , а дуга $B - b \rightarrow D$ имеет в качестве базового оригинала дугу $A - b \rightarrow C \in \text{Im}(s_1)$ и координатную трассу $T = A \rightarrow B$, не содержащую дуг алфавита Σ_b . Согласно теореме 1 координатная трасса есть результат замыкания трассы $T_1 = O \rightarrow A \in \text{Im}(s_1)$ по трассе $T_2 = O \rightarrow B \in \text{Im}(s_2)$. Для рассматриваемых трасс в силу соотношения (3) запишем

$$v[\pi(T_2)] = v[\pi(T_1)] \oplus v[\pi(T)]. \quad (4)$$

Поскольку трасса T не содержит дуг алфавита Σ_b , из равенства (4) следует, что в n -ках $v[\pi(T_2)]$ и $v[\pi(T_1)]$ слова данного алфавита совпадают. Обозначим их u_b . Однако слово алфавита Σ_b , порожденное трассой $O \rightarrow A - b \rightarrow C$ схемы S_1 , содержит слово $u_b b$, тогда как трасса $O \rightarrow B - a \rightarrow \Lambda$ схемы S_2 порождает в точности слово u_b . Это свидетельствует о неэквивалентности рассматриваемых схем.

Вариант, когда ложной оказывается операция упаковки, доказывается аналогично. ■

5. КОНЕЧНОСТЬ АЛГОРИТМА ЗАМКНУТИЯ СХЕМ

Отметим характерные особенности диаграммы, полученной при замыкании схем, если количество ее вершин неограниченно возрастает.

Теорема 3. Если диаграмма бесконечна, то она содержит фрагмент многократного замыкания пары копий дуг, у которых координатные трассы каждой из замыкаемых дуг содержат оригинал другой дуги.

Доказательство. Бесконечная диаграмма содержит бесконечное множество вершин, добавленных в ходе операции замыкания дуг. Это означает, что при построении бесконечной диаграммы выполняется бесконечное число замыканий дуг. Однако каждая дуга есть копия одной или нескольких дуг диаграммы D_0 , которые будем называть базовыми. Следовательно, существует пара таких базовых дуг-оригиналов (например, дуги d_a и d_b), копии которых замыкаются бесконечное число раз. Положим, что дуга d_a принадлежит замыкаемой схеме, а d_b есть дуга основной схемы. Такая диаграмма содержит, по крайней мере, две бесконечные (координатные) трассы, с дугами которых замыкались копии рассмат-

Необходимость. Допустим, что существует трасса $T = M \rightarrow N$, где $[|T| \setminus \{M, N\}] \notin \text{Im}(d_0)$. Такую трассу (по алгоритму) можно образовать только при выполнении операции замыкания дуги по трассе. Положим, что этой замыкаемой дугой является $d_1 = M_1 - \sigma \rightarrow M$. Значит, существует основная трасса $M_1 \rightarrow N$, по которой замкнута дуга d_1 .

Применим индукцию по длине замыкаемой трассы $M_n \rightarrow M$. Положим,

риваемых базовых дуг. Одна из этих трасс содержит бесконечное число копий дуги d_a , а другая — бесконечное число копий дуги d_b .

Поскольку не может существовать бесконечного множества координатных трасс, исходящих из одной вершины и не являющихся продолжением одна другой, бесконечная диаграмма должна включать фрагмент, в котором содержится бесконечная последовательность пар дуг, оригиналы и копии которых замкнуты. Таким образом, при формировании такой диаграммы реализуется последовательность операций, в которой замыкаются дуги, оригиналы которых замыкались ранее. Именно эта последовательность порождает бесконечные координатные трассы. ■

Из теоремы 3 следует способ предотвращения бесконечности диаграммы с помощью выполнения следующего правила: две дуги (претенденты на замыкание) не подлежат замыканию, если координатная трасса каждой из дуг-претендентов содержит оригинал другой дуги и если не имеется возможности замыкания вершины без замыкания этих дуг.

Это правило не применяется, если существует координатная трасса одной из дуг, не содержащая оригинала другой дуги.

Сформулированное положение будем называть правилом запрета. Так как в паре замыкаемых дуг: d_a и d_b , одна из них (положим, d_a) является дугой или копией дуги замыкаемой поддиаграммы, а другая d_b — дугой или копией дуги основной поддиаграммы, данные дуги принадлежат полным кустам q_a и q_b алфавитов Σ_a и Σ_b соответственно. По описанному алгоритму кусты замыкаемой поддиаграммы или их копии замыкаются с полными кустами основной поддиаграммы или их копиями. Поэтому запрет на замыкание дуг d_a и d_b распространяется и на замыкание кустов q_a и q_b , которым принадлежат эти дуги. Обеспечение конечности алгоритма сводится к проблеме замыкания вершины, из которой исходят дуги, удовлетворяющие условиям правила запрета. Покажем, что при ситуации, удовлетворяющей этим условиям, существует возможность замыкания с использованием критерия обобщенной замкнутости. Для этого изучим варианты, когда такие ситуации могут возникнуть.

Если координатные трассы каждой из замыкаемых дуг не содержат оригиналов другой замыкаемой дуги, то такое замыкание назовем первичным замыканием копий этих дуг. На рис. 4 изображен фрагмент диаграммы, содержащий замыкание дуг $d_a = C - a \rightarrow A$ и $d_b = C - b \rightarrow B$, являющихся оригиналами дуг $d_a^1 = C1 - a \rightarrow A1$ и $d_b^2 = C1 - b \rightarrow B1$. Координатная трасса дуги $C1 - a \rightarrow A1$ содержит дугу $C - b \rightarrow B$, а координатная трасса дуги $C1 - b \rightarrow B1$ — дугу $C - a \rightarrow A$. Этот фрагмент характерен тем, что существует вершина (в данном случае $C1$), общая для координатных трасс дуг d_a^1 и d_b^2 . Здесь такими трассами являются $T_a = C - a \rightarrow A - \rightarrow C1$ и $T_b = C - b \rightarrow B - \rightarrow C1$. Замыкание этих трасс, начиная с замыкания дуг d_a и d_b , воспроизводит их копии. Результатом последующего замыкания является такой же фрагмент и продолжение этого процесса может быть бесконечным. Будем называть подобный фрагмент рекурсивным.

Из рис. 4 видно, что рекурсивный фрагмент состоит из двух трасс, имеющих общие начальную и конечную вершины. Множество алфавитов, символами которых отмечены дуги одной из трасс, не пересекается с множеством алфавитов,

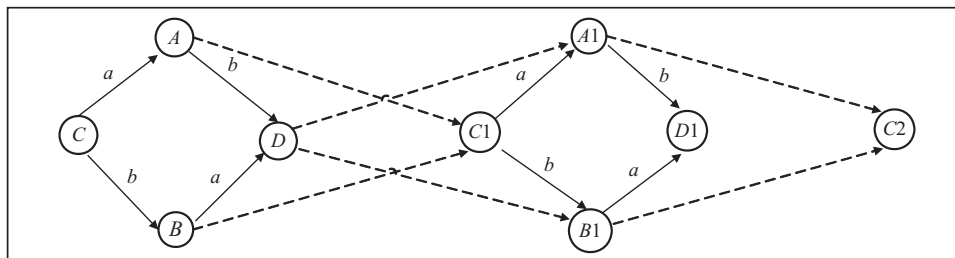


Рис. 4

символами которых отмечены дуги другой трассы. Так как замыкаемые трассы всегда имеют общую начальную вершину, образование рекурсивного фрагмента обусловлено наличием общей конечной вершины этих трасс. Рассмотрим два возможных случая образования такой вершины:

- образование вершины $C1$ не зависит от замыкания трасс T_a и T_b ;
- образование вершины $C1$ является результатом замыкания трасс, содержащих трассы T_a и T_b .

Покажем, что в обоих случаях сформулированное ранее правило запрета обеспечивает конечность диаграммы при замкнутости любой вершины.

Теорема 4. Если рекурсивный фрагмент (см. рис. 4) реализуется образованием вершины $C1$ независимо от замыкания трасс T_a и T_b , то выполнение правила запрета блокирует повторное замыкание рекурсивной структуры.

Доказательство. Положим для определенности, что дуги трассы T_a отмечены верхним индексом 1, а дуги трассы T_b — индексом 2. Поскольку трассы T_a и T_b неэквивалентны, как следует из соотношения (3), общая вершина $C1$ не может быть результатом замыкания этих трасс. Следовательно, вершина $C1$ есть результат замыкания эквивалентных трасс, отличных от T_a и T_b . Из отождествляемых при упаковке вершин одна, по крайней мере, принадлежит основной поддиаграмме, а вторая — замыкаемой. Поэтому из вершины $C1$, кроме дуг d_a и d_b , исходят кусты q^2 и q^1 соответственно основной и замыкаемой поддиаграммы.

Выполняя правило алгоритма (2), используя критерий замкнутости (3), замкнутость вершины $C1$ можно реализовать с помощью замыканий кустов q^1 и q^2 , дуги d_a^1 с кустом q^2 и дуги d_b^2 с кустом q^1 . Тем самым предотвращается замыкание дуг d_a^1 и d_b^2 , которое инициирует очередное воспроизводство рекурсивного фрагмента. ■

Используя понятие замкнутости пары дуг (см. разд. 2) как базу индукции, определяем отношение замкнутости трасс.

Если пара дуг $p = (d_i = M - \sigma_i \rightarrow N, d_j = M - \sigma_j \rightarrow L)$ замкнута, т.е. существуют замыкающие дуги $f_j = N - \sigma_j \rightarrow Q$ и $f_i = L - \sigma_i \rightarrow Q$, то выполняется соотношение

$$v[\pi(d_i)] \oplus v[\pi(f_j)] = v[\pi(d_j)] \oplus v[\pi(f_i)].$$

Индуктивное предположение. Пусть замкнуты трассы $T_n = O - \rightarrow N$ и $T_m = O - \rightarrow M$, т.е. существуют замыкающие трассы $Z_n = N - \rightarrow P$ и $Z_m = M - \rightarrow P$, для которых выполняется соотношение

$$v[\pi(T_n)] \oplus v[\pi(Z_n)] = v[\pi(T_m)] \oplus v[\pi(Z_m)], \quad (5)$$

и существует дуга $d_i = N - \sigma_i \rightarrow K$, не принадлежащая трассе Z_n . Положим, что трасса $T_{n+1} = O - \rightarrow N - \sigma_i \rightarrow K$ замкнута с трассой T_m .

Рассмотрим два случая:

- 1) дуга d_i замкнута по трассе Z_n (см. разд. 4);
- 2) дуга d_i и все ее копии замкнуты со всеми дугами трассы Z_n .

В случае 1 из соотношения (5) и понятия замкнутости дуги по трассе следует справедливость соотношения

$$v[\pi(T_{n+1})] \oplus v[\pi(Z_{n+1})] = v[\pi(T_m)] \oplus v[\pi(Z_m)], \quad (6)$$

где $Z_{n+1} = K - \rightarrow P$ — замыкающая трасса для дуги d_i и трассы Z_n .

В случае 2, когда дуга d_i и дуги трассы Z_n отмечены символами непересекающихся алфавитов, из вершины P исходит дуга $P - \sigma_i \rightarrow L$, являющаяся копией дуги d_i , и существует трасса $Z_{n+1} = K - \rightarrow L$, состоящая из копий дуг трассы Z_n . В этом случае соотношение (6) принимает вид

$$v[\pi(T_{n+1})] \oplus v[\pi(Z_{n+1})] = v[\pi(T_m)] \oplus v[\pi(Z_{m+1})], \quad (7)$$

где $Z_{m+1} = M - \rightarrow P - \sigma_i \rightarrow L$.

Из определения замкнутых трасс и соотношений (6) и (7) следует справедливость приведенного далее утверждения.

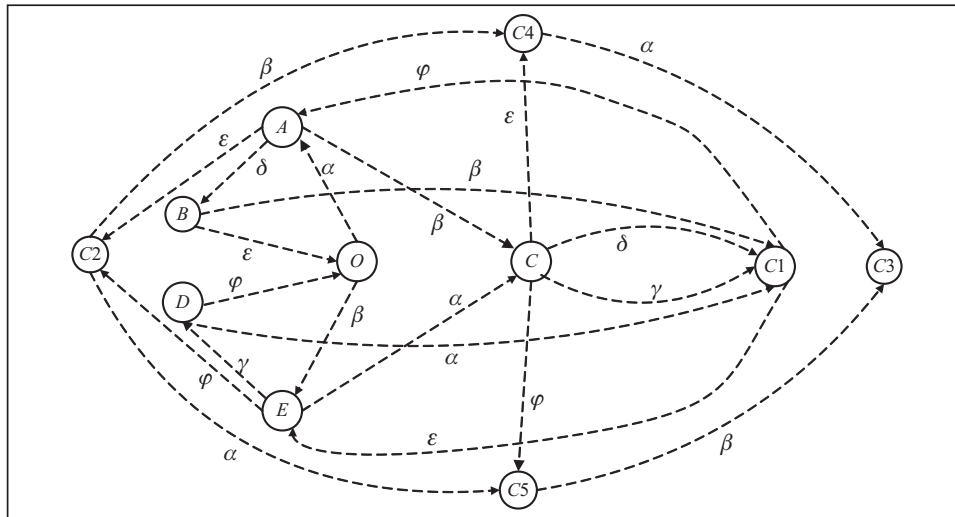


Рис. 5

Теорема 5. Замыкающие трассы дополняют замыкаемые до эквивалентных.

Рассмотрим случай, когда вершина $C1$ порождается замыканием циклов и трассы T_a и T_b являются их участками. Изучим структуру диаграммы, образованную при замыкании циклов $\Omega = O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow O$ и $\Psi = O \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow O$ (рис. 5). На этом рисунке для наглядности участки трасс Ω и Ψ , а также их копии отмечены одинаковыми символами греческого алфавита.

Положим, что трасса Ψ является основной, а трасса Ω — замыкаемой. Так как трассы коллинеарны, между порождаемыми ими непустыми парами одноалфавитных слов $(\omega_i; \psi_i)$, $i=1, \dots, n$, может быть два типа отношений: одно из этих слов пусто (случай 1) либо эти слова состоят из одинаковых подслов (случай 2). Полагаем, что в рассматриваемых циклах участки $A \rightarrow B \sim \delta$ и $E \rightarrow D \sim \gamma$ могут породить слова с отношениями второго типа, а начальные и конечные участки циклов генерируют слова непересекающихся алфавитов. Здесь знак \sim означает, что на рис. 5 трасса отмечена символом.

Заметим, что рекурсивная структура образуется только в случае, если замыкаемыми трассами порождаются слова с отношениями обоих типов. Если циклы состоят из дуг, отмеченных символами непересекающихся алфавитов, то в результате замыкания таких циклов в начальной вершине O строятся точные копии исходных циклов, которые упаковываются с исходными. Если циклы порождают слова, состоящие из одинаковых подслов, то они эквивалентны и замыкаемые дуги не достигают выхода.

Согласно утверждению теоремы 5 опишем этапы и результаты замыкания рассмотренных ранее циклов, представленных на рис. 5.

Шаг 1. Замыкание трасс $O \rightarrow A \sim \alpha$ и $O \rightarrow E \sim \beta$ образует замыкающие трассы $E \rightarrow C \sim \alpha$ и $A \rightarrow C \sim \beta$, являющиеся копиями исходных трасс.

Шаг 2. Замыкание трасс $E \rightarrow C \sim \alpha$ и $E \rightarrow D \sim \gamma$ порождает замыкающие трассы $D \rightarrow C1 \sim \alpha$ и $C \rightarrow C1 \sim \gamma$, а замыкание трасс $A \rightarrow C \sim \beta$ и $A \rightarrow B \sim \delta$ — замыкающие трассы $B \rightarrow C1 \sim \beta$ и $C \rightarrow C1 \sim \delta$.

Шаг 3. Замыкание циклов завершается замыканиями трасс, исходящих из вершин B и D . Замыкающими трасс $B \rightarrow C1 \sim \beta$ и $B \rightarrow O \sim \epsilon$ являются трасса $C1 \rightarrow E \sim \epsilon$ и уже существующая трасса $O \rightarrow E \sim \beta$. Для трасс $D \rightarrow C1 \sim \alpha$ и $D \rightarrow O \sim \varphi$ замыкающими являются трассы $C1 \rightarrow A \sim \varphi$ и существующая трасса $O \rightarrow A \sim \alpha$.

Шаг 4. В результате этих построений образовались две пары трасс: эквивалентные $C \rightarrow C1 \sim \gamma$ и $C \rightarrow C1 \sim \delta$, замыкание которых дает пустые замыкаю-

щие трассы, и трассы $C1 \rightarrow A \sim \varphi$ и $C1 \rightarrow E \sim \varepsilon$, результатом замыкания которых являются трассы $A \rightarrow C2 \sim \varepsilon$ и $E \rightarrow C2 \sim \varphi$.

Шаг 5. Для замыкания вершины A замыкаются дуги $A \rightarrow C \sim \beta$ и $A \rightarrow C2 \sim \varepsilon$ добавлением дуг $C2 \rightarrow C4 \sim \beta$ и $C \rightarrow C4 \sim \varepsilon$.

Шаг 6. Для замыкания вершины E замыкаются дуги $E \rightarrow C \sim \alpha$ и $E \rightarrow C2 \sim \varphi$ добавлением дуг $C2 \rightarrow C5 \sim \alpha$ и $C \rightarrow C5 \sim \varphi$.

На шагах 5 и 6 выбор пар дуг для замыкания сделан с учетом того, что по правилам алгоритма должны замыкаться дуги с верхними индексами 1 и 2.

Шаг 7. Для замыкания вершины $C2$ замыкаются дуги $C2 \rightarrow C4 \sim \beta$ и $C2 \rightarrow C5 \sim \alpha$ добавлением дуг $C4 \rightarrow C3 \sim \alpha$ и $C5 \rightarrow C3 \sim \beta$. Так как трассы, отмеченные символами α и β , замыкаются повторно, для их дуг удовлетворяется «правило запрета», поэтому их замыкание выполняется ввиду отсутствия другой возможности замыкания вершины $C2$.

Шаг 8. Трассы $C \rightarrow C4 \rightarrow C3$ и $C \rightarrow C5 \rightarrow C3$ составляют рекурсивную структуру, замыкание которой может породить бесконечную диаграмму. Но выполняя правило запрета, достаточно замыкать дуги трассы $C \rightarrow C5 \sim \varphi$ по дугам трассы $C \rightarrow C1 \sim \delta$, а дуги трассы $C \rightarrow C4 \sim \varepsilon$ по дугам трассы $C \rightarrow C1 \sim \gamma$, что обеспечивает замкнутость вершины C .

Заметим, что на каждом этапе выполнялись замыкания замыкаемой и основной трасс или их копий.

Описанные построения доказывают следующее утверждение.

Теорема 6. Для циклических трасс использование правил запрета блокирует повторное замыкание рекурсивной структуры.

Теоремы 4 и 6 доказывают возможность замыкания схем таким образом, чтобы предотвратить бесконечность диаграммы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный алгоритм позволяет сравнивать схемы на эквивалентность, применяя наглядные графические методы. Представляется возможным использовать подобные построения и обобщенное понятие замкнутой диаграммы для создания системы преобразований схемы, сохраняющих ее функциональность, но позволяющих варьировать число элементов. Изучение вычислительной модели многоленточного автомата актуально в связи с развитием многопоточных сетевых конструкций, методов их тестирования и оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rabin M.O., Scott D. Finite automata and their decision problema // IBM JT. Res. DEV. — 1959. — 3, N 2. — P. 114–125.
2. Bird M. The equivalence problem for deterministic multitape automata // J. Comp. Syst. Sci. — 1973. — 7, N 2. — P. 218–236.
3. Борисенко В.И. Разрешимость эквивалентности трехленточных автоматов / Ин-т кибернетики АН Украины. — Киев, 1989. — 48 с. — Деп. в ВИНТИ, № 46-В89.
4. Harju T., Karhumaki J. The equivalence problem of multitape finite automata // Theor. Comp. Sci. — 1991. — 78, N 2. — P. 345–355.
5. Letichevsky A.A., Shoukourian A.S., Shoukourian S.K. The equivalence problem of deterministic multitape finite automata: a new proof of solvability using a multidimensional tape // Language and Automata Theory and Application. Lecture Notes in Computer Science. — 2010. — 6031. — P. 392–402.
6. Furiá C. A. A survey of multi-tape automata. — <http://bugcounting.net/pubs/MultiTapeSurvey-TR12.pdf>.
7. Worrell J. Revisiting the equivalence problem for finite multitape automata. — <http://www.cs.ox.ac.uk/james.worrell/multi-tape.pdf>.
8. Хачатрян В.Е. Структурный анализ многоленточных автоматов: Автореф. дисс. ... доктора физ.-мат. наук / Институт системного программирования РАН. — М., 2008. — 30 с.
9. Борисенко В.И. Достаточное условие эквивалентности n -ленточных автоматов // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 5. — С. 33–42.

Поступила 12.09.2013