УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

КОМБИНИРОВАННЫЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНФЛИКТНЫХ ЗАДАЧ[1]

Аннотация. Предлагаются понятия равновесий, которые, несмотря на сложность своей формулировки, весьма полезны относительно поиска единственного решения игровых задач (статических и динамических), включая случаи, когда некоторые известные равновесия, существенные с точки зрения поиска решения, оказываются пустыми.

Ключевые слова: теория игр, комбинированные конфликтные равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

В классической теории игр [1–10] для каждого класса задач (антагонистических, бескоалиционных, некооперативных, кооперативных и др.) были найдены соответствующие им понятия равновесия. Однако оказывалось, что в каждом классе не для всех задач известные понятия равновесия существуют, и с этим согласились бы все участники игр. Например, классическое равновесие по Нэшу [8] существует далеко не во всех бескоалиционных играх, для которых предназначалось, и при этом оно может быть даже неприемлемым для всех участников [11, с. 7]. Отсутствие в большинстве игр равновесия и содержательная неудовлетворительность некоторых равновесий потребовали новых подходов к построению теории конфликтов.

В построенной в работах [11–16] теории все задачи из любого класса игровых задач имеют устойчивое равновесие (решение), которое не может быть неприемлемым ни для одного из участников. Более того, в подавляющем числе случаев оно почти всегда единственно и может быть найдено по единой для всех классов задач методике. В этой теории предложена некая система иерархически связанных между собой конфликтных равновесий (не содержащих в своем определении никаких искусственно навязываемых участникам норм поведения), обеспечивающая существование решения, а единственность решения (только в случае отсутствия какой-либо симметрии в игре) зависит от того, насколько много в этой иерархии используется естественных понятий равновесия.

В настоящей статье предлагаются два новых весьма сложных понятия конфликтных равновесий с целью в какой-то мере приблизиться к решению проблемы единственности в любых статических и динамических задачах и уточнить иерархию между равновесиями.

НОВЫЕ ПОНЯТИЯ РАВНОВЕСИЙ И МЕТОДИКА ИХ ПОИСКА

Чтобы не принимать во внимание несущественных усложнений, связанных как с переходом от задач с двумя участниками к задачам со многими участниками, так и с рассмотрением произвольных функционалов на произвольных множествах, в данной статье представлены задачи с N участниками, причем при следующих ограничениях, не снижающих общности полученных результатов.

Допущение. Пусть Q_i, $i=1,\dots,N$, — метрические пространства, G — компактное множество в их произведении $Q_1\times\ldots\times Q_N$ и пусть также на множестве G определены непрерывные функции (функционалы) $J_i(q)$, $i=1,\dots,N$, $q=(q_1,\dots,q_N)$.

[1]Работа поддержана Программой фундаментальных исследований ОНИТ РАН и РФФИ № 15–01–08838–а.

Предположим, что i-й участник (игрок), выбирая стратегию (состояние) q_i из доступного ему сечения $G(q^i)$ (где $q^i = q_1 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_N$) множества G или из проекции $\Pr_{Q_i} G$ множества G на пространство Q_i, стремится обеспечить максимум своей «платежной» функции (функционала) $J_i(q)$, $i = 1, \ldots, N$. Введем также обозначение $J^i = \sum_{k \neq i} J_k$.

Для понимания роли предлагаемых новых понятий $\overline{D}'^P$- и D^{AP}-равновесий приведем сначала те равновесия из [11–16], в иерархический ряд которых можно включить эти новые равновесия; потребность в этом ярко проявляется в приведенных ниже примерах бескоалиционных игр.

Определение 1. Ситуацию (точку) $q^* \in G$ назовем A_i-экстремальной, если при заданной стратегии q^{i*} $N-1$ игрока допустимой оказывается только одна стратегия $q_i^* = G(q^{i*})$ или если каждой стратегии $q_i \in G(q^{i*}) \setminus q_i^*$ i-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну ответную стратегию $\hat{q}^i = \hat{q}^i < q_i >$ остальных $N-1$ игроков такую, чтобы

$$J_i(q_i, \hat{q}^i) \leq J_i(q^*). \tag{1}$$

Обозначая A_i множество всех A_i-экстремальных ситуаций, назовем ситуацию (точку) $q^* \in G$ ситуацией симметричного слабого активного равновесия (или A-равновесием), если $q^* \in A_1 \cap \ldots \cap A_N \stackrel{\Delta}{=} A$.

Равновесие A, существующее (с любой заданной точностью ε) в любых задачах [11–15], причем даже в случае отсутствия компактности G и непрерывности функций J_i, является гарантом существования решения любой конфликтной задачи и выступает в роли наиболее слабого равновесия, причем любые другие возможные (симметричные) равновесия ищутся именно на множестве A и позволяют выделить на нем наиболее сильное равновесие, с которым вынуждены согласиться участники.

Согласно определению 1, если $q^* \in A_i$, то i-му игроку нецелесообразно отклоняться от этой ситуации ввиду угрозы со стороны остальных игроков (что следует из определения множества A_i). Очевидно, что устойчивость ситуации $q^* \in A_i$ окажется тем сильнее, чем выгоднее она для всех остальных участников. Это приводит к следующему естественному (джентльменскому) усилению A-равновесных ситуаций, не вносящему никаких искусственных ограничений на поведение игроков.

Заметим, что определение 1 (как и последующие) можно переформулировать на случай пары коалиций P_k и P_{N-k}, состоящих соответственно из k и $N-k$ участников.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее совместная стратегия q^{i*} $N-1$ игрока (исключая i-го) удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A_i(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q_i^*, q^{i*}) = J^i(q^*). \tag{2}$$

Назовем B-равновесием ситуацию $q^* \in G$, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i \stackrel{\Delta}{=} B$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Смысл равенства (2) состоит в том, что i-й участник в ситуации q^*, которую не в состоянии улучшить для себя (так как она принадлежит множеству A_i), предлагает остальным участникам сделать наиболее выгодный для них выбор на множестве ситуаций $A_i(q_i^*)$, доступных им из этой ситуации.

Множество B-равновесий в отличие от множества A-равновесий может оказаться пустым. Естественное усиление B-равновесия дано в следующем определении.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*) \tag{3}$$

или (что то же самое, но только в развернутом виде) условию

$$\max_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} A_i} J_i(\mathrm{Arg} \max_{q^i \in A_i(q_i)} J^i(q_i, q^i)) = J_i(q^*), \tag{3a}$$

и назовем ее $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} \overline{D}_i \stackrel{\Delta}{=} \overline{D}$.

Поясним смысл этого определения. В определении 3 i-й игрок при любом выборе своей стратегии q_i из множества $\mathrm{Pr}_{Q_i} A_i$ предлагает остальным выбрать наиболее выгодную для них ситуацию в сечении $A_i(q_i)$. И только после сделанного остальными участниками выбора (определяющего множество B_i наиболее выгодных для них ситуаций) i-й игрок делает наилучший для себя выбор (3) на множестве уже предварительно отобранных и наиболее выгодных для остальных ситуаций.

Заметим, что $\overline{D}$-равновесие в любых конфликтных задачах является наиболее сильным равновесием, наиболее предпочтительным и наивыгоднейшим для всех участников. Однако существуют задачи, в которых даже B-равновесие оказывается пустым, что автоматически создает пустоту и $\overline{D}$-равновесия. Более того, пустыми могут оказываться и следующие равновесия (более слабые, чем B- и $\overline{D}$-равновесия), задаваемые двумя приведенными ниже определениями [11–16].

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A$ назовем B_i' -экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q^i \in A(q_i^*)} J^i(q_i^*, q^i) = J^i(q^*). \tag{4}$$

Назовем B'-равновесием ситуацию $q^* \in G$, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} B_i' \stackrel{\Delta}{=} B'$, где B_i' — множество всех B_i'-экстремальных ситуаций.

Смысл B'-равновесия аналогичен смыслу B-равновесия. Различие в их поиске только в том, что любые из B_i'-экстремальных ситуаций в отличие от B_i-экстремальных ситуаций ищутся на одном и том же множестве A при всех i.

Естественное усиление B'-экстремальных ситуаций дается следующим определением.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in A$ назовем D_i'-экстремальной, если она удовлетворяет условию

$$\max_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} A} J_i(\mathrm{Arg} \max_{q^i \in A(q_i)} J^i(q)) = J_i(q^*), \tag{5}$$

и назовем ее D'-равновесием, если $q^* \in \bigcap_{i=1}^{N} D_i' \stackrel{\Delta}{=} D'$.

Предлагаемые ниже новые весьма сложные $\overline{D}'^{P}$- и D^{AP}-равновесия в случае пустоты равновесий из определений 2–5 способны заменить последние. Эти равновесия, полезные для поиска наисильнейшего равновесия (и решения) в любых конфликтных задачах, особенно в тех, в которых B- и B'-равновесия оказываются пустыми, опираются на понятие оптимальности по Парето [17]: ситуацию q^* называют оптимальной по Парето, если несовместны неравенства $J_i(q) \geq J_i(q^*)$, $q \in G$, $q \neq q^*$, $i = 1, \ldots, N$, среди которых хотя бы одно строгое.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем $\overline{D}_i'^{P}$-экстремальной, если она удовлетворяет включению

$$q^* \in \operatorname{ArgPar}_{q_i \in A_i(q^{i*})} J(\operatorname{ArgPar}_{q^i \in A_i(q_i)} J(q)) \overset{\Delta}{=} \overline{D}_i'^{P}(q^*), \ i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (6)$$

где $\operatorname{Par}_{q^i \in A_i(q_i)} J(q)$ означает множество Парето, разыскиваемое на множестве $A_i(q_i)$, а $\operatorname{Par}_{q_i \in A_i(q^{i*})} J(q)$ — множество Парето, разыскиваемое на множестве $A_i(q^{i*})$. Назовем ситуацию q^* $\overline{D}'^{P}$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1'^{P}(q^*) \cap \ldots$ $\ldots \cap \overline{D}_N'^{P}(q^*) \overset{\Delta}{=} \overline{D}'^{P}(q^*)$.

По существу, это определение является некоторым обобщением (расширением) $\overline{D}$-равновесия из определения 3, представленного равенством (3а). Согласно определению 6 понятие $\max J_i$ в (3а) заменено на понятие паретовских множеств $\operatorname{Par} J$ в доступных игрокам сечениях $A_i(q_i)$. Иначе говоря, в (6) предлагается некоторое понятие слабой игровой устойчивости, весьма полезное в тех случаях, когда равновесия (3) или других равновесий не существует. В (6) i-й участник предлагает остальным участникам операцию, которая устраивала бы всех: на множестве $A_i(q_i)$ выбрать совместно если и не наилучшие в смысле максимума, как в (3а), то по крайней мере индивидуально-паретовские [12, с. 145] ситуации в доступных им совместно сечениях $A_i(q_i)$ (где $q_i \in A_i(q^{i*})$). Только после сделанного ими выбора i-й участник осуществляет окончательный аналогичный выбор множества индивидуально-паретовских ситуаций в сечении $A_i(q^{i*})$ на совокупности индивидуально-паретовских множеств, предварительно отобранных совместно остальными участниками.

Следующее понятие равновесия является некоторым ослаблением предыдущего.

Определение 7. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем D_i^{AP}-экстремальной, если она удовлетворяет включению

$$q^* \in \operatorname{ArgPar}_{q_i \in A(q^{i*})} J(\operatorname{ArgPar}_{q^i \in A(q_i)} J(q)) \overset{\Delta}{=} D_i^{AP}(q^*), \ i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (7)$$

где $\operatorname{Par}_{q^i \in A(q_i)} J(q)$ означает множество Парето, разыскиваемое на множестве $A(q_i)$, а $\operatorname{Par}_{q_i \in A(q^{i*})} J(q)$ — множество Парето на множестве $A(q^{i*})$. Назовем ситуацию q^* D^{AP}-равновесием, если $q^* \in D_1^{AP}(q^*) \cap \ldots \cap D_N^{AP}(q^*) \overset{\Delta}{=}$ $\overset{\Delta}{=} D^{AP}(q^*)$.

Теорема 1. Множество D^{AP}-равновесий содержит в себе множество $\overline{D}'^{P}$-равновесий.

Доказательство этой теоремы по существу повторяет доказательство теоремы 1.7 из работы [13, с. 25] относительно включения $D' \supset \overline{D}$, поэтому здесь не приводится.

Ниже в примерах подробно рассматриваются способы нахождения равновесия.

Пример 1. Пусть определена статическая игра, в которой каждый игрок максимизирует свою (матричную) платежную функцию:

$$J_1(u_1, u_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 9 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & \cdot & 6 \\ 10 & 7 & 11 & 12 \\ 1 & \cdot & 5 & \cdot \end{bmatrix}, \quad J_2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \cdot & 6 & 11 & 7 \\ 12 & 4 & \cdot & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 3 \\ 2 & \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что равновесия по Нэшу в этой задаче не существует. Первый игрок имеет возможность выбирать одну из четырех строк-стратегий u_1, а второй игрок может выбирать один из четырех столбцов-стратегий u_2. Игровое множество G участников конфликта задается только теми элементами матриц J_1 и J_2, в которые вписаны возможные выигрыши участников.

Множество наиболее слабых равновесий в этой конфликтной задаче задается элементами матрицы $A = A_1 \bigcap A_2$, помеченными знаком $+$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & + \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & + \\ + & + & \cdot & + \\ + & + & + & \cdot \\ + & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

B- и B'-равновесия в этой задаче оказываются пустыми:

$$B_1 = (a_{13}, a_{32}), \; B_2 = (a_{12}, a_{24}, a_{31}, a_{33}), \; B = B_1 \cap B_2 = \varnothing,$$

$$B_1' = (a_{13}, a_{32}), \; B_2' = (a_{12}, a_{31}, a_{33}), \; B' = \varnothing.$$

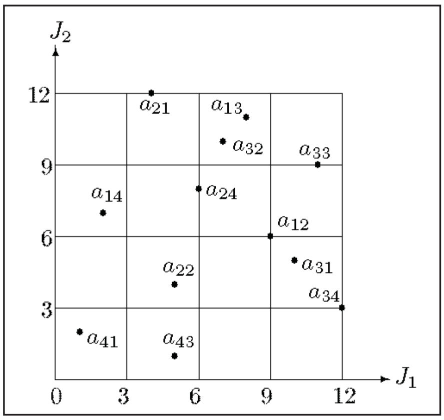

Рис. 1

Для поиска $\overline{D}'^P$-равновесий следует прибегнуть к рис. 1, где координаты (J_1, J_2) соответствуют отображениям $J(a_{ij})$ аргументов a_{ij} платежных матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2). Без помощи этого рисунка искать предлагаемое новое равновесие крайне затруднительно.

$\overline{D}'^P$-равновесные ситуации ищутся на множестве A-равновесных ситуаций следующим образом. Например, ситуация a_{32} не содержится во множестве $\overline{D}'^P$, поскольку она не содержится во множестве

$$\overline{D}_1'^P(a_{32}) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{ArgPar}_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(\mathrm{ArgPar}_{q_2 \in A_1(q_1)} J(q)) =$$

$$\mathrm{ArgPar}_{q_1 \in A_1(q_2^*)} J(a_{12}, a_{13}; a_{32}, a_{33}, a_{34}) = (a_{13}, a_{33}, a_{34}).$$

Заметим, что в этом случае нет необходимости вычислять множество $\overline{D}_2'^P(a_{32})$. В подобных расчетах остальных четырех ситуаций a_{ij} из множества A только две ситуации, a_{13} и a_{33}, оказываются $\overline{D}'^P$-равновесными. Выполним расчеты только для этих двух ситуаций:

$$\overline{D}_1'^{P}(a_{13}) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{ArgPar}_{q_1\in A_1(q_2^*)} J(\mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_1(q_1)} J(q)) =$$

$$\mathrm{ArgPar}_{q_1\in A_1(q_2^*)} J(a_{12}, q_{13}; a_{32}, a_{33}, a_{34}) = (a_{13}, a_{33}, a_{34}),$$

$$\overline{D}_2'^{P}(a_{13}) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_2(q_1^*)} J(\mathrm{ArgPar}_{q_1\in A_2(q_2)} J(q)) =$$

$$\mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_2(q_1^*)} J(a_{12}, a_{32}; a_{13}, a_{33}; a_{24}) = (a_{13}, a_{33}),$$

$$\overline{D}_1'^{P}(a_{33}) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{ArgPar}_{q_1\in A_1(q_2^*)} J(\mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_1(q_1)} J(q)) =$$

$$\mathrm{ArgPar}_{q_1\in A_1(q_2^*)} J(a_{12}, a_{13}; a_{32}, a_{33}, q_{34}) = (a_{13}, a_{33}, a_{34}),$$

$$\overline{D}_2'^{P}(a_{33}) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_2(q_1^*)} J(\mathrm{ArgPar}_{q_{1\in A_2(q_2)}} J(q)) =$$

$$\mathrm{ArgPar}_{q_2\in A_2(q_1^*)} J(a_{21}, a_{31}; a_{12}, a_{32}; a_{13}, a_{33}) = (a_{21}, a_{13}, a_{33}).$$

Как видим, ситуация a_{13} содержится одновременно во множестве $\overline{D}_1'^{P}(a_{13})$ и во множестве $\overline{D}_2'^{P}(a_{13})$, а ситуация a_{33} содержится одновременно во множестве $\overline{D}_1'^{P}(a_{33})$ и во множестве $\overline{D}_2'^{P}(a_{33})$. Следовательно, согласно определению 6 эти ситуации являются $\overline{D}'^{P}$-равновесиями.

Поскольку нас интересует единственное наиболее сильное равновесие, а понятие $\overline{D}'^{P}$-равновесия выделило не одну, а две эквивалентных $\overline{D}'^{P}$-равновесных ситуаций, то искать в этой задаче еще и более широкое, и более слабое $\overline{D}^{AP}$-равновесие, уже не имеет смысла. Очевидно, что поиск этого последнего оказался бы более простым, так как матрица A более легкая для расчетов, чем матрицы A_1 и A_2.

Однако из найденных двух наисильнейших равноценных ситуаций желательно выделить наиболее сильное равновесие. Попытаемся сделать это, прибегнув к поиску наисильнейших равновесий в редуцированной вспомогательной игре, получаемой в результате исключения из исходной игры всех тех ситуаций, которые не вошли во множество A [11–16]. Согласно определению множества A с каждой такой исключаемой ситуацией по крайней мере один из игроков никогда бы не согласился, поскольку способен самостоятельно улучшить ее, перейдя в более выгодную для него ситуацию, и при этом другой участник не имел бы никакой возможности противостоять ему. Таким образом, все не вошедшие во множество A ситуации по существу оказываются «неигровыми» для участников, и ими вполне можно пренебречь и перейти к дальнейшему изучению игры уже на множестве A. В результате получаем некоторую вспомогательную редуцированную игру (первая итерация) со следующими платежными функциями:

$$J_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 9 & 8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 10 & 7 & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad J_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & 6 & 11 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 10 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

где ищем равновесия по изложенной выше методике [11–16]:

$$A_1^1 = \begin{bmatrix} \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},\ A_2^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},\ A^1 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$B_1^1 = (a_{13}, a_{33}),\ B_2^1 = (a_{32}, a_{33}),\ B^1 = a_{33},$$

$$\overline{D}_1^1 = a_{33},\ \overline{D}_2^1 = a_{32},\ \overline{D}^1 = \varnothing,$$

$$D_1^{'1} = a_{33},\ D_2^{'1} = a_{33},\ D^{'1} = a_{33}.$$

На второй итерации приходим к вспомогательной игре с платежными функциями, содержащими всего по два аргумента (a_{13}, a_{33}). Для этой простой вспомогательной игры находим $A_1^2 = a_{33},\ A_2^2 = (a_{13}, a_{33}),\ A^2 = a_{33}$.

Таким образом, на первой и второй итерациях ярко выделилась единственная наисильнейшая равновесная ситуация a_{33}, гораздо более слабой является ситуация a_{13} и существенно более слабыми являются все остальные ситуации из множества A. Отметим, что именно $\overline{D}^{'P}$-равновесие позволило установить эту строгую иерархию в игре.

Справедливый дележ кооперативного дохода, равного 20, случайно оказавшийся именно в наисильнейшей равновесной ситуации a_{33}, определяет теорема 4.1 из [14, с. 174] и соответствует следующим значениям:

$$x_1 = 20 \cdot \frac{11}{(11+9)} = 11,\ x_2 = 20 \cdot \frac{9}{(11+9)} = 9.$$

Иными словами, доля x_1 первого игрока задается произведением кооперативного дохода, равного 20, и дроби, числитель которой равен выигрышу первого игрока в наисильнейшей равновесной ситуации (т.е. в a_{33}), а знаменатель равен сумме выигрышей обоих игроков в этой ситуации. Аналогично определяется справедливая доля x_2 второго игрока.

Предложенные новые конфликтные равновесия также успешно можно применять для поиска решений игр, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Рассмотрим конфликтующие динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник $(i = 1, \ldots, N)$, используя чистые $u_i(t)$ или смешанные $q_i(u_i, t)$ стратегии, стремится обеспечить максимум своего функционала

$$J_i(q) = \int_T dt \int_{W(t)} f_0^i(u, x, t) dq,\ i = \overline{1, N}, \tag{8}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \int_{W(t)} f(u, x.t) dq,\ t \in T = [t_0, t_1] \subseteq E^1, \tag{9}$$

$$(u, t) \in W \subseteq E \times T, \tag{10}$$

$$\dot{x}_j(t_0) = x_j^0,\ j = 1, \ldots, n,\ x_k(t_1) = x_k^1,\ k \in K \subseteq \{1, \ldots, n\}, \tag{11}$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)\in E^n$; $u=(u_1,\dots,u_N)$, $u_i\in U_i\subset E_i$, E_i — конечномерные пространства, $E=E_1\times\dots E_N$, $q=q(u,t)=q_1(u_1,t)\dots q_N(u_N,t)$; W — компактное множество в $E\times T$, $W(t)$ — сечение множества W в момент $t\in T=[t_0,t_1]$, $U_i\overset{\Delta}{=}\mathrm{Pr}_{E_i}W$ — проекция множества W на E_i; q_i — множество смешанных стратегий $q_i(u_i,t)$ *i*-го участника в задаче (8)–(11) с начальным условием $x(t_0)=x^0$ и с заменой множества W на некоторое компактное множество $U=U_1\times\dots\times U_N$ (множество q_i согласно теоремам 4.2.1 и 4.2.6 из [19] представляет выпуклый компакт в *-слабой топологии пространства $L_1^*(T,C(U_i))$). Пусть также G — подмножество компактного множества $Q=Q_1\times\dots\times Q_N$, образованное только такими стратегиями q_i, которые позволяют обеспечить удовлетворение всех ограничений задачи.

Понятие *A*-равновесия в дифференциальных играх целесообразно заменить несколько более сильным понятием A^c-равновесия [13, с. 202].

Определение 8. Ситуацию $q^*\in G$ назовем согласованной A_i^c-экстремальной, если любой стратегии $q_i\in G(q^{i*})\setminus q_i^*$ *i*-го игрока можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\bar{q}^i\in G(q_i)$ остальных игроков так, чтобы имело место отношение

$$J_i(\bar{q}^i,q_i)\le J_i(q^*)\tag{12}$$

при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t)=q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, где $q_i(t)\ne q_i^*(t)$, $i=1,\dots,N$. Ситуацию q^* назовем ситуацией согласованного A^c-равновесия, если неравенства (12) удовлетворяются для всех игроков, т.е. $q^*\in A_1^c\cap\dots\cap A_N^c=A^c$..

Для поиска A^c-равновесия и различных его усилений (в частности, представленных определениями 1–7) в дифференциальных играх весьма эффективна следующая теорема, в которой предполагается $A^c=A$ [15, с. 189–190].

Теорема 2. Пусть q^* – A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t)=$ $=(p_0^i,p_1^i(t),\dots,p_n^i(t))$, $p_0^i=\mathrm{const}\ge 0$, $i=1,\dots,N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$\dot{p}_k^i=-\int\limits_{W(t)}p^i\frac{\partial f^i}{\partial x_k}dq^*;\ k=1,\dots,n,\ i=1,\dots,N,\tag{13}$$

(где $f^i=(f_0^i,f_1,\dots,f_n)$) и краевым условиям

$$p_k^i(t_1)=0,\ k\notin K;\tag{14}$$

гамильтонианы $H^i=\int\limits_{W(t)}p^if^idq^*$ непрерывны в T; $A=A^c$-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$H^i(\bar{q}^i,q_i)\le H^i(q^*),\ q_i\in G(q^{i*}),\ \bar{q}^i\in G(q_i),\ i=1,\dots,N.\tag{15}$$

В отношении всех других базовых равновесий, более сильных, чем A^c-равновесие, справедливы некоторые естественные аналоги уравнений (13)–(15) [11–16], причем все статические понятия равновесий переносятся на динамические задачи без каких-либо дополнительных осложнений.

Если рассматривать гамильтонианы в этих необходимых условиях в качестве платежных функций $H_i(u)$ в «локальной» статической игре, определенной в момент t, то можно в каждый момент t решить эту локальную статическую конфликтную задачу, определив в ней наисильнейшие равновесия. Отметим, что число подлежащих решению таких локальных задач оказывается не только не бесконечным (хотя время t и принимает бесконечное множество значений), но, как правило, сводится всего к одной или нескольким локальным задачам. Затем на основе их решений легко находится решение исходной дифференциальной игры, как это демонстрируется, например, в [11–16, 18].

Пример 2. Рассмотрим конфликтную задачу с двумя участниками в классе чистых стратегий. Игроки выбором своих стратегий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ стремятся обеспечить максимумы своих платежных функционалов

$$J_1 = \int_0^1 x_1 dt, \;\; J_2 = \int_0^1 x_2 dt \tag{16}$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1, u_2) = (u_1 - u_2)^2, \tag{17}$$

$$\dot{x}_2 = f_2(u_1, u_2) = (u_1 + u_2)^2, \tag{18}$$

$$x_1(0) = 0,\; x_2(0) = 0,\; u_1 \in [0,1],\; u_2 \in [0,1], \tag{19}$$

где общее игровое множество W представляет квадрат $OEFH$ на рис. 2, включая его границу. Здесь приведены также некоторые характерные уровни функций $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$.

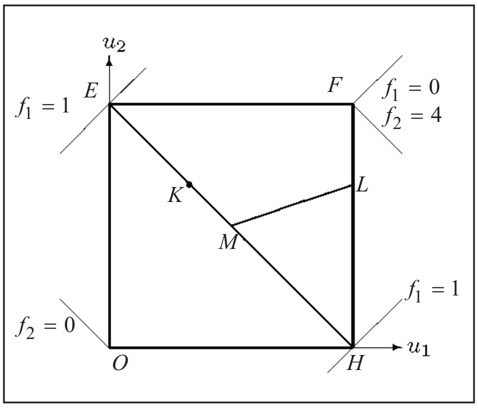

Рис. 2

Поскольку в формулировку задачи не входят произведения фазовых координат и управлений и задача линейна по фазовым координатам, то можно принять $A^c = A$ и с помощью необходимых условий оптимальности (равновесности) (13)–(15) свести решение рассматриваемой дифференциальной игры (16)–(19) к решению всего одной вспомогательной («локальной») статической игры, в которой платежными функциями оказываются гамильтонианы игроков.

Найдем сначала решение уравнений (13) и приведем на его основе гамильтонианы игры к виду, удобному для формулировки локальной игры. Поскольку гамильтонианы имеют вид

$$H^1 = p_0^1 x_1 + p_1^1 (u_1 - u_2)^2 + p_2^1 (u_1 + u_2)^2,$$

$$H^2 = p_0^2 x_2 + p_1^2 (u_1 - u_2)^2 + p_2^2 (u_1 + u_2)^2,$$

уравнения (13) с учетом краевых условий (14) приводим к виду

$$\dot{p}_1^1 = -p_0^1,\ \ p_1^1(1) = 0,\ \ \dot{p}_2^1 = 0,\ \ p_2^1(1) = 0,$$

$$\dot{p}_2^2 = -p_0^2,\ \ p_2^2(1) = 0,\ \ \dot{p}_1^2 = 0,\ \ p_1^2(0) = 0.$$

Эти уравнения имеют следующие очевидные решения:

$$p_1^1 = p_0^1(1-t) = (1-t),\ \ p_2^1 = 0,$$

$$p_2^2 = p_0^2(1-t) = (1-t),\ \ p_1^2 = 0,$$

подстановка которых в гамильтонианы приводит последние к виду

$$H^1 = x_1 + (1-t)(u_1 - u_2)^2,\ \ H^2 = x_2 + (1-t)(u_1 + u_2)^2.$$

Поскольку $(1-t) \geq 0$ на всей траектории, то исходная дифференциальная игра по существу сводится всего к единственной статической локальной игре в классе стратегий u_1 и u_2, решение которой не зависит от параметра t, со следующими платежными функциями (параметры в которой (x_1, x_2, t) не влияют на ее решение):

$$f_1 = (u_1 - u_2)^2,\ \ f_2 = (u_1 + u_2)^2. \tag{20}$$

Для этой вспомогательной (локальной) игры находим (см. рис. 2)

$$A_1 = W,\ \ A_2 = EFH,\ \ A = A_2;$$

$$B_1 = [EF],\ B_2 = [EK] \bigcup [LH],$$

$$B = E;\ B^P = E;\ \overline{D}_1 = E,\ \overline{D}_2 = L,\ \overline{D} = \varnothing.$$

Таким образом, во вспомогательной локальной игре (20) множество A_1 совпадает с исходным игровым множеством W, множество A_2 — замкнутый треугольник $EFHE$, $A = A_2$, множество B_1 — это отрезок $[EF]$, множество B_2 состоит из пары замкнутых отрезков: $[EK]$ и $[LH]$, а множество B сводится к одной точке E. Однако B-равновесие довольно слабое, а существенно более сильное $\overline{D}$-равновесие в этой задаче оказалось пустым. Попытаемся найти предлагаемое в этой работе $\overline{D}'^P$-равновесие, которое является более слабым, чем $\overline{D}$-равновесие, но более сильным, чем B-равновесие. Для его поиска необходимо предварительно построить отображение множеств W, A_1, A_2 и A на плоскость (f_1, f_2), что и выполнено на рис. 3. Здесь отрезок SQ представляет собой отображение отрезка EH из рис. 2 на плоскость (f_1, f_2), а отрезки OH и OE отображаются в один

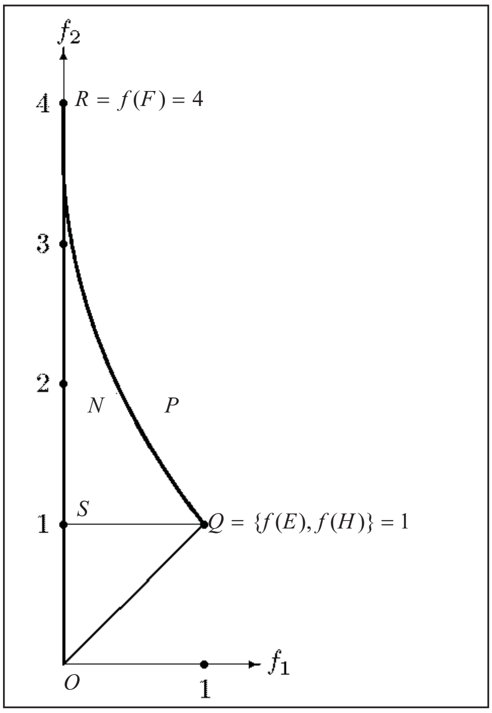

Рис. 3

отрезок OQ. Множество A_2 отображается в область $SQNRS$ на рис. 3, а множество $\overline{D}'^P$ сводится к точке E.

Поскольку множество $\overline{D}$, усиливающее множество B, оказалось пустым, то для поиска некоторого усиления понятия B-равновесия целесообразно исследовать также и первую итерацию исходной игры, т.е. $W^1 = EFHE$.

Для этой вспомогательной игры (первая итерация) находим

$$A_1^1 = [EM] \bigcup MLHM, \ A_2^1 = EFHE, \ A^1 = A_1^1;$$

$$B_1^1 = [EM] \bigcup [ML], \ B_2^1 = [EK] \bigcup [LH], \ B^1 = [EK] \bigcup [LN]; \ \overline{D}^1 = D'^1 = \varnothing.$$

Как и следовато ожидать (в соответствии с теорией (11)–(16)), множество B^1-равновесий, являющееся ослаблением B-равновесия, расширилось до более широкого множества $B^1 = [EK] \bigcup L \supseteq B$. Однако его усиление $\overline{D}^1$-равновесие и даже ослабление последнего, т.е. D'^1-равновесие все же остались пустыми. Поэтому предлагаемое в настоящей статье новое понятие $\overline{D}'^P$-равновесия в рассматриваемой дифференциальной игре оказывается особенно существенным.

Таким образом, наисильнейшим (из существующих) равновесием в этой игре оказалась $\overline{D}'^P$-равновесная ситуация E на рис. 2. Как видно из этого рисунка, ситуация E наисильнейшего равновесия в локальной игре (и ее изображение Q на рис. 3) определяет пару постоянных равновесных стратегий участников $(u_1^*, u_2^*) = (0,1)$. Подставляя эту пару в исходную дифференциальную игру, получаем

$$\dot{x}_1 = (u_1^* - u_2^*)^2 = 1,$$

$$\dot{x}_2 = (u_1^* + u_2^*)^2 = 1$$

Интегрируя эти уравнения, находим $x_1 = t$, $x_2 = t$, а подставляя эти решения в платежные функционалы, определяем следующие выигрыши участников в равновесной ситуации:

$$J_1 = \int_0^1 x_1 dt = 1/2, \ J_2 = \int_0^1 x_2 dt = 1/2.$$

Если игроки кооперируются, то имеют возможность выиграть значительно больше, чем в равновесной ситуации. Действительно, кооперативное решение достигается в точке F (на рис. 2), в которой их стратегии равны: $u_1 = u_2 = 1$. Уравнения движения в случае кооперативного решения приводятся к виду $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 4$, а их решения — к виду $x_1 = 0$, $x_2 = 4t$. Подсчитывая совместный выигрыш участников, получаем $J_1 + J_2 = J_2 = \int_0^1 4t dt = 2$, что вдвое больше, чем сумма их выигрышей в наисильнейшей равновесной ситуации (u_1^*, u_2^*). Справедливый дележ кооперативного дохода согласно теории [11–16] должен определяться в зависимости от наисильнейших равновесий в игре. В данном случае вследствие единственной наисильнейшей равновесной ситуации E он определяется теоремой 4.1 из [14, с. 174], согласно которой ввиду равенства доходов участников в равновесной ситуации E участники должны получить по одинаковой доле от кооперативного дохода, равного двум, что существенно больше для каждого из них, чем их выигрыши в ситуации равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены новые понятия равновесий, позволяющие, во-первых, расширить возможности нахождения наисильнейшего равновесия и решения в любых конфликтных задачах; во-вторых, находить наисильнейшее равновесие в сложных случаях, когда иерархическая цепь из последовательно усиливающихся известных равновесий прерывается вследствие пустоты всех известных более сильных равновесий; в-третьих, формировать более полную и строгую иерархию между всеми равновесиями, что существенно упрощает нахождение решения в таких конфликтных задачах кооперативных, некооперативных, бескоалиционных, коалиционных, антагонистических и других, рассматриваемых как в статической, так и динамической постановке, в частности, описываемых дифференциальными уравнениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 472 с.
2. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. — М.: Физматлит, 1960. — 420 с.
3. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 412 с.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 350 с.
6. Петров Н.Н. Теория игр. — Ижевск: Удмуртский университет, 1977. — 160 с.
7. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Сов. радио, 1980. — 304 с.
8. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 495 с.
9. Петросян Л.А., Кузьмина Т.И. Бескоалиционные дифференциальные игры. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1989. — 202 с.
10. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 302 с.
11. Смольяков Э.Р. Управление конфликтами с побочными интересами участников. — Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. — 154 с.
12. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. — М.: Едиториал УРСС, 2000. — 160 с.
13. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 304 с.
14. Смольяков Э.Р. Методы решения конфликтных задач. — М.: МГУ, 2010. — 242 с.
15. Смольяков Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. — М.: МГУ, 2010. — 232 с.
16. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения мгогокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.
18. Смольяков Э.Р. Ослабленные понятия равновесия и оптимальности в конфликтных задачах // Дифференциальные уравнения. — 2013. — **49**, № 3. — С. 373–379.
19. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

Поступила 01.12.2014