УДК 519.85

И.В. ГРЕБЕННИК, О.С. ЧЕРНАЯ

ВЛИЯНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРАНСПОЗИЦИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ ПЕРЕСТАНОВОК

Аннотация. Рассмотрены особенности влияния транспозиций специального вида на циклические перестановки. Доказаны утверждения о результате последовательного применения нескольких соответствующих транспозиций. Предложен алгоритм генерации циклических перестановок на основании доказанных утверждений. Проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: множество перестановок, перестановочный многогранник, критерий смежности, свойства перестановок, транспозиция, комбинаторика.

ВВЕДЕНИЕ

Множество перестановок и его свойства используются при математическом моделировании и решении многих научных и прикладных задач [1–7]. Важную роль при этом играет циклическая структура перестановок, в частности, когда перестановка содержит один цикл [5, 8]. Известны методы и алгоритмы, позволяющие проводить разложение перестановок в произведение циклов и генерировать перестановки с заданной циклической структурой [8–12].

Один из способов исследования комбинаторных множеств основан на их погружении в евклидово пространство [3, 6, 7]. Выпуклая оболочка множества перестановок, погруженного в евклидово пространство, представляет собой перестановочный многогранник [2]. Такое погружение позволяет использовать средства непрерывной математики, в том числе комбинаторные многогранники, при анализе комбинаторных задач [2, 13]. Одним из базовых свойств перестановочного многогранника есть критерий смежности его вершин.

Основой построения перестановок в комбинаторике являются транспозиции, которые выполняются на множестве порождающих элементов [5, 8]. В настоящей статье проанализированы свойства перестановок при выполнении в них различного количества транспозиций, исследована циклическая структура перестановок, полученных из циклической перестановки в результате применения к ней одних и тех же транспозиций во всех возможных последовательностях, а также рассмотрен специальный класс транспозиций, с помощью которых строятся смежные вершины в соответствии с критерием смежности вершин перестановочного многогранника [2].

Целью данной работы является исследование циклической структуры и свойств перестановок при выполнении в них транспозиций специального вида.

БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение 1 [8]. Линейное упорядочение элементов некоторого порождающего множества $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ называется перестановкой $\pi=\pi(a_1, a_2, \dots, a_n)=$ $=(\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n))=(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$ или *n*-перестановкой, если необходимо отметить, что она содержит n элементов.

Обозначим P_n множество перестановок, порожденное элементами $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Рассмотрим некоторую перестановку $\pi=(\pi(a_1), \pi(a_2), \dots, \pi(a_n)) \in P_n$, а также ее элемент $\pi(a_i)=a_j$ $\forall i, j \in J_n$, и запишем $\pi(a_j)=\pi(\pi(a_i))=\pi^2(a_i)$. Обобщенно эту формулу можно представить в виде

$$\pi^{k-1}(a_j)=\pi(\pi^{k-1}(a_i))=\pi^k(a_i) \;\; \forall i, j \in J_n, \;\; k \le n.$$

Таким образом [5], если для некоторого $l \ge 1$ имеем $\pi^l(a_i) = a_i$, $i \in J_n$, и все элементы $a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i)$ различны, то последовательность $(a_i, \pi(a_i), \pi^2(a_i), \dots, \pi^{l-1}(a_i))$ называется циклом длины l.

Определение 2 [5]. Циклической называется перестановка π из n элементов, содержащая единственный цикл длины n, т.е. $\pi^n(a_i) = a_i \ \ \forall i \in J_n$. Все такие перестановки будем обозначать π_C.

Обозначим P_n^C множество циклических перестановок без повторений из n действительных чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in P_n^C$, где $c_i \in R$, $i \in J_n = \{1, 2, \dots, n\}$ [5, 8].

Существует множество различных видов записи перестановок [5, 8]. Например, запись перестановки $\pi = (2)(4\,1)(6)(7\,5\,3)$, разложенной в произведение циклов, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \downarrow \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ \downarrow \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \updownarrow \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & & 1 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 1 & & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ \updownarrow \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & & 5 & & 3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 5 & & 3 & & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},$$

а запись циклической перестановки $\pi = (1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 5 & & 2 & & 4 & & 3 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 5 & & 2 & & 4 & & 3 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Далее будем использовать вид представления перестановки, при котором в верхней строке указаны порождающие элементы в порядке их появления в цикле, а в нижней строке — элементы $\pi(i)$, полученные в результате отображения.

ПОГРУЖЕНИЕ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

Осуществим отображение множеств перестановок P_n и циклических перестановок P_n^C в арифметическое евклидово пространство R^n. Согласно [3, 6] данное отображение (называемое погружением) зададим в виде

$$f : P \to R^n \ \ \forall p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in P,$$

$$x = f(p) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset R^n, \ x_i = p_i, \ i \in J_n, \ P \in \{P_n, P_n^C\}.$$

В результате погружения f каждому множеству P_n, P_n^C поставим во взаимно-однозначное соответствие множество $E \subset R^n$: $E_n = f(P_n)$, $E_n^C = f(P_n^C)$.

Рассмотрим перестановочный многогранник Π_n, порожденный множеством $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. При этом $\operatorname{vert} \Pi_n = E_n$ — множество его вершин. Так как любая циклическая перестановка принадлежит множеству перестановок P_n, $\pi_C = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots\ldots, \pi(a_n)) \in P_n$, следовательно, все циклические перестановки являются вершинами перестановочного многогранника Π_n.

Введем $\operatorname{vert} \Pi_n^C \subset \operatorname{vert} \Pi_n$ — подмножество вершин перестановочного многогранника, соответствующих всевозможным циклическим перестановкам с циклом из n элементов, порожденных множеством $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $\operatorname{vert} \Pi_n^C = E_n^C$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ТРАНСПОЗИЦИЙ

Критерий смежности вершин перестановочного многогранника оперирует элементами порождающего множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и их расположением в перестановке. Согласно критерию смежности вершиной, смежной с вершиной $v=(a_{v_1}, a_{v_2}, a_{v_3}, \ldots, a_{v_n})$, соответствующей перестановке $p \in P_n$, является всякая вершина, соответствующая перестановке p_k, полученной из p транспозицией элементов, равных k и $k+1$ $\forall k \in J_{n-1}$ [2].

Для любой вершины $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ транспозицию элементов, равных i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, принадлежащих одному циклу длины k соответствующей перестановки $p \in P_n$, будем называть транспозицией «разрыва». При применении данной транспозиции к $p \in P_n$ получится смежная с исходной вершина $v_i \in \operatorname{vert} \Pi_n$ такая, что соответствующая ей перестановка $p_i \in P_n$ содержит, по крайней мере, два цикла длины k_1 и k_2, $k_1 + k_2 = k$.

Для любой вершины $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ транспозицию элементов, равных i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, принадлежащих двум различным циклам длины k_1 и k_2 соответствующей перестановки $p \in P_n$, будем называть транспозицией «соединения». При применении данной транспозиции к $p \in P_n$ получится смежная с исходной вершина $v_i \in \operatorname{vert} \Pi_n$ такая, что соответствующая ей перестановка $p_i \in P_n$ содержит, по крайней мере, один цикл длины k, $k = k_1 + k_2$.

Следовательно, для вершин $v \in \operatorname{vert} \Pi_n$ одна транспозиция элементов, равных i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, может являться либо разрывом, либо соединением циклов, которым эти элементы принадлежат. В случае, если исходная перестановка принадлежит множеству циклических перестановок $p \in P_n^C$ и имеет единственный цикл длины n, любая транспозиция элементов i и $i+1$, $i \in J_{n-1}$, будет разрывом [13, 14].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть $p \in P_n$ — некоторая перестановка. Рассмотрим транспозиции вида

$$i_j \leftrightarrow i_j + 1, \tag{1}$$

где $i_j \in J_{n-1}$ — некоторый элемент перестановки $p \in P_n$, $j = 1, 2, \ldots$ — порядковый номер транспозиции при выполнении последовательности нескольких транспозиций.

Особенностью транспозиции (1) является то, что она соответствует критерию смежности вершин перестановочного многогранника. С учетом критерия смежности исследуем результат последовательного применения нескольких транспозиций (1) к некоторой циклической перестановке. Таким образом, получим некоторую последовательность попарно смежных вершин перестановочного многогранника.

Проанализируем полученную последовательность с точки зрения циклической структуры перестановок, соответствующих вершинам, которые будут получены в результате применения нескольких транспозиций (1) к некоторой циклической перестановке.

Далее используем следующее обозначение: в случае, если к некоторой исходной перестановке $p \in P_n$ последовательно применяется несколько транспозиций (1), результирующую перестановку $p_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in P_n$ запишем $p_{i_1 i_2 \ldots i_k} = p((i_1 \leftrightarrow i_1 + 1), (i_2 \leftrightarrow i_2 + 1), \ldots, (i_k \leftrightarrow i_k + 1))$, где $i_1 i_2 \ldots i_k$ — список первых элементов транспозиций в порядке их применения.

Например, исходная перестановка $p \in P_n^C$ имеет вид

$$p = \begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 & & 3 & & 7 \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ 4 & & 6 & & 2 & & 5 & & 8 & & 3 & & 7 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим к ней одну транспозицию (1) такую, что $i_1 = 3$. Следовательно, $i_1 + 1 = 4$. Тогда

$$p(i_1 \leftrightarrow i_1+1) = p(3 \leftrightarrow 4) = p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 & 8 \\ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow \\ 6 & 2 & 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Применим еще одну транспозицию (1) с условием $i_2 = 7,\ i_2+1 = 8$. Тогда

$$p((i_1 \leftrightarrow i_1+1), (i_2 \leftrightarrow i_2+1)) = p((3 \leftrightarrow 4), (7 \leftrightarrow 8)) = p_{37} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 \\ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow \\ 3 & 8 & 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВЛИЯНИЕ ДВУХ ТРАНСПОЗИЦИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПЕРЕСТАНОВКУ

В работе [15] рассмотрены вопросы о воздействии транспозиций (1) на циклические перестановки. В частности доказано, что если к некоторой перестановке $p \in P_n^C$ применить такие две транспозиции (1), что $i_1 \neq i_2,\ i_1 \neq i_2+1\ \forall i_1, i_2 \in J_{n-1}$, то результирующая перестановка $p_{i_1 i_2} = p_{i_2 i_1} \in P_n$ будет тогда циклической, когда в исходной перестановке $p \in P_n^C$ в цикле элементы $i_1,\ i_1+1,\ i_2,\ i_2+1 \in J_n$, расположены в порядке, соответствующем одному из типов:

— тип I

$$\begin{pmatrix} x & \pi^a(i_1) & \pi^b(i_2) & \pi^c(i_1+1) \\ \downarrow\nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \\ i_1 & i_2 & i_1+1 & i_2+1 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \{0, \ldots, n-2\};$$

— тип II

$$\begin{pmatrix} x & \pi^a(i_1) & \pi^b(i_2+1) & \pi^c(i_1+1) \\ \downarrow\nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \quad \nearrow & \downarrow \\ i_1 & i_2+1 & i_1+1 & i_2 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \{0, \ldots, n-2\}.$$

Рассмотрим влияние транспозиций $i_1 \leftrightarrow i_1+1$ и $i_1+1 \leftrightarrow i_1+2$ на произвольную циклическую перестановку $p \in P_n^C$.

Утверждение 1. Если в произвольной циклической перестановке $p \in P_n^C$ последовательно выполнить такие две транспозиции (1), что $i_1+1 = i_2\ \forall i_1 \in J_{n-2}$, во всех возможных последовательностях, то из полученных в результате двух различных перестановок $p_{i_1 i_2} \neq p_{i_2 i_1}$ только одна будет циклической.

Доказательство. При совершении двух таких транспозиций (1), что $i_1+1 = i_2\ \forall i_1, i_2 \in J_{n-1}$, происходит либо транспозиция элементов $i_1 \leftrightarrow i_1+1$, а затем транспозиция $i_1+1 \leftrightarrow i_1+2$, либо транспозиция $i_1+1 \leftrightarrow i_1+2$ и после нее транспозиция $i_1 \leftrightarrow i_1+1$.

Рассмотрим последовательности индексов, образованные элементами $i_1,\ i_1+1$, i_1+2 в любой перестановке $p \in P_n^C$. Необходимо найти последовательность индексов с минимальным числом элементов, соединяющую элемент i с одним из элементов $i_1+1,\ i_1+2$. Так как начальный элемент i_1 в данном случае единственный, обозначим его i, а $i' \in \{i_1+1, i_1+2\}$ — элемент, для которого выполняется

$$\pi^l(i) = i',\ \ l = \min\{k, m < n \mid \pi^k(i) = i_1+1, \pi^m(i) = i_1+2\},$$

а также $i'' \in \{i_1+1, i_1+2\},\ i'' \neq i'$, — элемент, для которого

$$\pi^s(i) = i'' \Leftrightarrow \pi^{s-l}(i') = i'',\ \ s = \max\{k, m < n \mid \pi^k(i) = i+1, \pi^m(i) = i+2\}.$$

Использовав введенные обозначения, представим связи между элементами $i_1,\ i_1+1,\ i_1+2$

$$p=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & & i' & & i'' \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассмотрим вариант, при котором совершается транспозиция $i_1+1 \leftrightarrow i_1+2$, а затем $i_1 \leftrightarrow i_1+1$. Так как неизвестно, какое из обозначений, i' или i'', соответствует i_1+1, будем учитывать обе возможности. Исходная перестановка имеет вид (2).

Проведем транспозицию элементов i' и i'':

$$p=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & & i' & & i'' \end{pmatrix} \underset{i_1\leftrightarrow i_2}{\Rightarrow} p(i_1 \leftrightarrow i_2)=p_{i_1}=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i & & i'' & i' \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $i'=i_1+1$, и проведем транспозицию элементов i и i':

$$p_{i_1}=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \downarrow \\ i & & i'' & i' \end{pmatrix} \underset{i\leftrightarrow i_1}{\Rightarrow} p_{i_1}(i \leftrightarrow i_1)=p_{i_1 i}=\begin{pmatrix} x & & \pi^{s-l}(i') & & \pi^l(i) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i' & & i & & i'' \end{pmatrix},$$

а также предположим, что $i''=i_1+1$, и тоже проведем транспозицию элементов i и i'':

$$p_{i_1}=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i & & i'' & i' \end{pmatrix} \underset{i\leftrightarrow i_2}{\Rightarrow} p_{i_1}(i \leftrightarrow i_1)=p_{i_1 i}=\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i'' & i & i' \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вариант, при котором совершается транспозиция $i_1 \leftrightarrow i_1+1$, а затем $i_1+1 \leftrightarrow i_1+2$. Так как неизвестно, i' или i'' равно i_1+1, будем учитывать обе возможности. Исходная перестановка имеет вид (2).

Исходя из предположения $i'=i_1+1$, проведем транспозицию элементов i и i':

$$p=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & & i' & & i'' \end{pmatrix} \underset{i\leftrightarrow i'}{\Rightarrow} p(i \leftrightarrow i')=p_i=\begin{pmatrix} x & & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i' & & i'' & i \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем транспозицию элементов $i'=i_1+1$ и $i''=i_1+2$:

$$p_i=\begin{pmatrix} x & & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \updownarrow \\ i' & & i'' & i \end{pmatrix} \underset{i'\leftrightarrow i''}{\Rightarrow} p_i(i' \leftrightarrow i'')=p_{ii'}=\begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ i'' & i' & i \end{pmatrix}.$$

Если $i''=i_1+1$, то проведем транспозицию элементов i и i'':

$$p=\begin{pmatrix} x & & \pi^l(i) & & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i & & i' & & i'' \end{pmatrix} \underset{i\leftrightarrow i''}{\Rightarrow} p(i \leftrightarrow i'')=p_i=\begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & & & \pi^{s-l}(i') \\ \downarrow & \downarrow & \nearrow & \nwarrow & \updownarrow \\ i'' & i' & & & i \end{pmatrix}.$$

Теперь проведем транспозицию элементов $i'' = i_1 + 1$ и $i' = i_1 + 2$:

$$p_i = \begin{pmatrix} x & \pi^l(i) & & \pi^{s-l}(i') \\ \updownarrow & \downarrow & \nearrow\nwarrow & \updownarrow \\ i'' & i' & & i \end{pmatrix} \underset{i' \leftrightarrow i''}{\Rightarrow} p(i' \leftrightarrow i'') = p_{ii'} = \begin{pmatrix} x & \pi^{s-l}(i') & \pi^l(i) & \\ \updownarrow\nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ i' & i & & i'' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, доказано, что в какой бы последовательности элементы $i_1, i_1 + 1, i_1 + 2$ ни встречались в перестановке $p \in P_n^C$, существует единственный способ выполнить две транспозиции так, чтобы результирующая перестановка была циклической.

ВЛИЯНИЕ ТРЕХ ТРАНСПОЗИЦИЙ НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПЕРЕСТАНОВКУ

Утверждение 2. Если в произвольной циклической перестановке $p \in P_n^C$ последовательно совершить три транспозиции (1) с использованием любых порождающих элементов, то все полученные в результате перестановки независимо от последовательности выполнения транспозиций не будут циклическими.

Доказательство. Охарактеризуем три транспозиции в терминах разрывов и соединений. Так как исходная перестановка имеет единственный цикл длины n, первая транспозиция может являться только разрывом № 1 [14, 15]. Представим следующие две транспозиции, рассматривая отдельно все случаи (в каждом из них после транспозиции разрыва № 1 имеем в качестве исходной перестановку с двумя циклами):

— разрыв № 2, разрыв № 3: разрыв № 2 разрывает один из циклов на два, в итоге имеем три цикла, разрыв № 3 разрывает один из циклов на два, в результате получается перестановка $p \in P_n \setminus P_n^C$, состоящая из четырех циклов;

— разрыв № 2, соединение № 1: разрыв № 2 разрывает один из циклов на два, получается три цикла, соединение № 1 объединяет два из трех имеющихся циклов, в результате имеем перестановку $p \in P_n \setminus P_n^C$, состоящую из двух циклов;

— соединение № 1, разрыв № 2: соединение № 1 объединяет два цикла, из которых состоит перестановка, образуя циклическую перестановку, после этого разрыв № 2 разрывает циклическую перестановку на два различных цикла, в итоге получается перестановка $p \in P_n \setminus P_n^C$, состоящая из двух циклов;

— соединение № 1, соединение № 2: соединение № 1 объединяет два цикла, из которых состоит перестановка, образуя циклическую перестановку, после этого третья транспозиция не может являться соединением № 2, так как известно [14, 15], что любая транспозиция в циклической перестановке есть транспозиция разрыва.

Итак, рассмотрены все варианты для трех последовательных транспозиций и во всех случаях конечная перестановка $p \in P_n \setminus P_n^C$, что и требовалось доказать.

ГЕНЕРАЦИЯ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВОК С ПОМОЩЬЮ ДВУХ ТРАНСПОЗИЦИЙ

Рассмотрим задачу: для некоторой исходной циклической перестановки $p \in P_n^C$ необходимо совершить генерацию различных циклических перестановок, последовательно применяя две транспозиции (1), с учетом всех возможных варианов распределения элементов в транспозициях.

Решить данную задачу можно на основании доказанных утверждений. Для этого рассмотрим все такие пары элементов i, j, что $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, i-2\}$. Это позволит исключить из рассмотрения случаи равенства элементов в транспозициях и избежать избыточности исследования перестановки, т.е. если известен тип перестановки для пары i, j, то пара j, i рассматриваться не будет.

После исследования всех наборов элементов $i, j, i \in \{3, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, i-2\}$, можно определить количество различных перестановок, равное числу пар элементов, для которыхтип перестановки I или II, плюс $n-2$ уникальных перестановок, полученных из исходной путем двух транспозиций в соответствии с утверждением 1.

Приведем алгоритм генераци.

Шаг 1. Выполняется внешний цикл со счетчиком $i = 3, \ldots, n-1$ и вложенный цикл со счетчиком $j = 1, \ldots, i-2$. При каждом повторении цикла анализируется соответствующая пара i, j для нахождения пар элементов в перестановках типа I и II. При обнаружении пары элементов соответствующего типа перестановки прзводится генерация перестановки с помощью двух транспозиций: $i \leftrightarrow i+1$и $j \leftrightarrow j+1$, и полученная перестановка записывается в массив результатов.

Шаг 2. Выполняется один цикл со счетчиком $i = 1, \ldots, n-1$, $j = i+1$. Для каждой пары i, j проводится генерация двух перестановок путем применения транспозиций $i \leftrightarrow i+1$ и $j \leftrightarrow j+1$ во всех возможных последовательностях. Полученные перестановки записываются во временный массив, из них определяется циклическая и записывается в массив результатов. Временный массив обнуляется.

ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА ГЕНЕРАЦИИ

Для оценки сложности алгоритма необходимо проанализировать все пары элементов $i, j, i \in \{3, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, i-2\}$, и найти те из них, расположение которых соответствует перестановкам типов I и II. Всего пар элементов $\sum_{i=3}^{n-1}(i-2)$.

Обозначим m, $m \le \sum_{i=3}^{n-1}(i-2)$, количество пар элементов перестановок типов I и II.

Тогда итоговое количество циклических перестановок, которые можно получить из исходной с помощью двух транспозиций равно: $(n-2)$ перестановок, полученных в результате двух транспозиций с использованием трех элементов, плюс m перестановок, полученных в результате двух транспозиций с использованием четырех различных элементов.

Для того чтобы сгенерировать одну перестановку, алгоритму необходимо совершить две транспозиции соседних по значению элементов, следовательно, количество действий алгоритма для генерации всех перестановок необходимо умножить на два.

Итак, количество элементарных операций алгоритма равно $2((n-2)+m)$, где n — размерность задачи, m — количество пар элементов, соответствующих типам I и II.

Сложности анализа, генерации и алгоритма равны соответственно $O\left(\sum_{i=3}^{n-1}(i-2)\right)$, $2((n-2)+m)$ и $O\left(\sum_{i=3}^{n-1}(i-2)\right)+2((n-2)+m)$.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве исходной выберем циклическую перестановку

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3 & \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \\ 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Проведем исследование данной перестановки для элементов i, j, $i \in \{3, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, \ldots, i-2\}$. Найдем все пары элементов i, j, для которых тип перестановок I или II: $i = 4$, $j = 1$ тип I; $i = 4$, $j = 2$ тип II; $i = 5$, $j = 1$ тип II; $i = 5$, $j = 2$ тип I.

Итак, четыре набора элементов соответствуют типам, сохраняющим цикличность, следовательно, в данном случае $m = 4$.

Тогда для исходной перестановки количество различных перестановок, полученных в результате двух транспозиций, будет $(n-2)+m=(n-2)+4=(6-2)+4=8$.

Рассмотрим получение циклических перестановок из исходной с помощью двух транспозиций элементов, соответствующих типам I и II. В качестве примера используем пару элементов: $i = 4$, $j = 1$. Для трех других пар транспозиции проводятся аналогично с помощью соответствующих элементов:

$$p=\begin{pmatrix}1 & & 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1\end{pmatrix}\underset{4\leftrightarrow 5}{\Rightarrow} p(4\leftrightarrow 5)=p_4=\begin{pmatrix}1 & & 4 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 4 & & 3 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & & 2 & & 6\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 2 & & 6 & & 5\end{pmatrix}\underset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow}$$

$$\underset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow} p(1\leftrightarrow 2)=p_{41}=\begin{pmatrix}1 & & 4 & & 3 & & 2 & & 6 & & 5\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 4 & & 3 & & 2 & & 6 & & 5 & & 1\end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим получение $(n-2)$ циклических перестановок в результате двух транспозиций с использованием трех элементов. Неизвестно, какой именно порядок применения транспозиций приводит к циклической перестановке, поэтому необходимо проверять попарно все наборы элементов. Сравним две последовательности транспозиций: $i=1$, $j=2$ и $i=2$, $j=1$ (другие пары сравниваются аналогично)

$$p=\begin{pmatrix}1 & & 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1\end{pmatrix}\underset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow} p(1\leftrightarrow 2)=p_1=\begin{pmatrix}1 & & 5\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & 6 & & 4 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 6 & & 4 & & 3 & & 2\end{pmatrix}\underset{2\leftrightarrow 3}{\Rightarrow}$$

$$\underset{2\leftrightarrow 3}{\Rightarrow} p(2\leftrightarrow 3)=p_{12}=\begin{pmatrix}1 & & 5\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & 6 & & 4\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 6 & & 4 & & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ \updownarrow\\ 3\end{pmatrix};$$

$$p=\begin{pmatrix}1 & & 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 2 & & 6 & & 4 & & 3 & & 1\end{pmatrix}\underset{2\leftrightarrow 3}{\Rightarrow} p(2\leftrightarrow 3)=p_2=\begin{pmatrix}1 & & 5 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 3 & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & & 6 & & 4\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 6 & & 4 & & 2\end{pmatrix}\underset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow}$$

$$\underset{1\leftrightarrow 2}{\Rightarrow} p(1\leftrightarrow 2)=p_{21}=\begin{pmatrix}1 & & 4 & & 2 & & 6 & & 5 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 4 & & 2 & & 6 & & 5 & & 3 & & 1\end{pmatrix}.$$

Кроме построенных двух циклических перестановок, из исходной циклической перестановки аналогично получаются еще шесть различных циклических перестановок:

$$p_{42}=\begin{pmatrix}1 & & 4 & & 2 & & 6 & & 5 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 4 & & 2 & & 6 & & 5 & & 3 & & 1\end{pmatrix},\quad p_{51}=\begin{pmatrix}1 & & 6 & & 4 & & 3 & & 2 & & 5\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 6 & & 4 & & 3 & & 2 & & 5 & & 1\end{pmatrix},$$

$$p_{52}=\begin{pmatrix}1 & & 6 & & 4 & & 2 & & 5 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 6 & & 4 & & 2 & & 5 & & 3 & & 1\end{pmatrix},\quad p_{23}=\begin{pmatrix}1 & & 5 & & 4 & & 2 & & 6 & & 3\\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow\\ 5 & & 4 & & 2 & & 6 & & 3 & & 1\end{pmatrix},$$

$$p_{34}=\begin{pmatrix}1&4&5&2&6&3\\ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\\ 4&5&2&6&3&1\end{pmatrix},\ p_{54}=\begin{pmatrix}1&6&5&2&4&3\\ \downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\nearrow\downarrow\\ 6&5&2&4&3&1\end{pmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследовано влияние транспозиций специального вида на циклические перестановки $p \in P_n^C$. Проанализировано влияние последовательного применения транспозиций на циклическую структуру перестановок. Доказаны утверждения о влиянии одной, двух и трех транспозиций вида (1) в различных последовательностях на циклические перестановки. Проведен анализ различных последовательностей применения транспозиций. Доказанные утверждения легли в основу предложенного алгоритма генерации циклических перестановок с помощью двух транспозиций из некоторой циклической перестановки $p \in P_n^C$. Оценена сложность полученного алгоритма, проведены вычислительные эксперименты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гребенник И.В., Юрченко Л.Ю. Упорядочение перестановок при решении задач комбинаторной оптимизации с линейной целевой функцией // Системи обробки інформації. — 2007. — Вип. 8 (66). — С. 139–142.
2. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 344 с.
3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — Киев: Наук. думка, 1986. — 268 с.
4. Гребенник И.В., Панкратов А.В., Чугай А.М., Баранов А.В. Упаковка n-мерных параллелепипедов с возможностью изменения их ортогональной ориентации в n-мерном параллелепипеде // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 5. — С. 122–131
5. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 440 с.
6. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації.. — К.: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
7. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 158–172.
8. Bona M. Combinatorics of permutations. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004. — 337 p.
9. Kreher D.L., Stinson D.R. Combinatorial algorithms: Generation enumeration and search. — Boca Raton: CRC Press, 1999. — 329 p.
10. Гребенник И.В., Литвиненко А.С. Генерация комбинаторных множеств с заданными свойствами // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 106–113.
11. Гребенник И.В. Описание и генерация перестановок, содержащих циклы // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 6. — С. 97–105.
12. Knuth D. The art of computer programming. Vol. 4: Fascicle 2: Generating all tuples and permutations. — Stanford: Addison-Wesley, 2005. — 144 p.
13. Исаченко Ю.А. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках // Современные компьютерные информационные технологии. — Гродно: ГрГУ, 2008. — Т. 2. — С. 203–206.
14. Гребенник И.В., Черная О.С. Циклические свойства смежных перестановок различных элементов // Бионика интеллекта. — 2014. — № 1 (82). — С. 7–11.
15. Гребенник И. В., Черная О.С. Транспозиции компонент и их влияние на циклическую структуру перестановок // ICAICTSEE-2014, UNWE, Sofia, Bulgaria, 2014.

Поступила 27.04.2015