УДК 519.6

В.И. ЗОРКАЛЬЦЕВ, С.М. ПЕРЖАБИНСКИЙ, П.И. СТЕЦЮК

ПОИСК НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СЛАУ ПРИ ДВУСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПЕРЕМЕННЫЕ МЕТОДОМ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК[1]

Аннотация. Рассмотрены варианты прямых алгоритмов внутренних точек для нахождения нормальных решений систем линейных уравнений при двусторонних ограничениях на переменные. Изучение данной проблемы и методов ее решения актуально для развития теории математического моделирования (в частности, для решения задач энергетики), создания эффективных вычислительных алгоритмов. Представлены результаты экспериментальных исследований алгоритмов на тестовых задачах. Определены способы ускорения вычислительного процесса.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, алгоритмы внутренних точек, нормальное решение, двусторонние ограничения на переменные.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть заданы: векторы $b \in R^n$, $\bar{x} \in R^n$, $\underline{x} \in R^n$, матрица A размера $m \times n$, диагональная матрица W размера n с положительными коэффициентами w_j, $j = 1, \ldots, n$, на диагонали. Переменные составляют вектор $x \in R^n$. Рассматривается задача

$$\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} W x \to \min \tag{1}$$

при ограничениях

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$\underline{x} \le x \le \bar{x}. \tag{3}$$

Здесь $\bar{x} > \underline{x}$, т.е. $\bar{x}_j > \underline{x}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Сформулированная задача (1)–(3) равносильна проблеме поиска нормальных, т.е. с наименьшей нормой, решений системы линейных уравнений и неравенств (2), (3). Нормой будем считать евклидову норму $||x||_W = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j (x_j)^2 \right)^{1/2}$ с весами w_j. Задачи поиска наименее удаленных от начала координат решений систем линейных неравенств (линейные уравнения — частный случай линейных неравенств) часто используются при математическом моделировании и являются составной частью многих вычислительных методов. Как обобщение данной задачи рассматривается проблема поиска решения системы линейных неравенств, наименее удаленного от заданного вектора $x^0 \in R^n$. В частности, в [1] исследуется задача поиска вектора $x \in R^n$ из условий

$$(x - x^0)^{\mathrm{T}} W (x - x^0) \to \min \tag{4}$$

при ограничениях (2), (3). Данная задача заменой переменных сводится к задаче вида (1)–(3). Целевая функция (4) в результате возрастающего преобразования сводится к евклидовому расстоянию между векторами $\rho(x, x_0) = ((x - x^0)^{\mathrm{T}} W (x - x^0))^{1/2}$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-07-07412а, и НАНУ, проект № 0114U001055.

Система линейных уравнений и неравенств вида (2), (3) имеет ряд эффективных в вычислительном отношении свойств [2–5]. Они обусловлены тем, что все переменные системы линейных уравнений (2) имеют двусторонние ограничения, что сформулировано в условии (3). Для дальнейшего целесообразно представить двусторонние ограничения (3) как ограничения-неравенства

$$-x \ge -\bar{x}, \tag{5}$$

$$x \ge \underline{x}. \tag{6}$$

В работах [2, 3, 6] рассматривалась проблема поиска решений системы линейных неравенств (2), (3) в виде задачи линейного программирования с фиктивной целевой функцией (тождественно равной нулю). Этой задаче соответствует интересная в вычислительном отношении двойственная задача линейного программирования с «реальной» (не равной тождественно константе) целевой функцией при удобных в вычислительном отношении однородных ограничениях-неравенствах.

В работах [2, 7] представлены сравнительные экспериментальные исследования «прямых» и «двойственных» алгоритмов внутренних точек для решения систем вида (2), (3) на тестовых примерах и задачах выбора допустимых режимов функционирования электроэнергетических систем. В прямых алгоритмах внутренних точек итеративно вырабатывается последовательность векторов x^k, удовлетворяющих неравенствам $\underline{x} < x^k < \bar{x}$. Здесь k — номер итерации, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При этом происходит монотонное сокращение невязок балансовых ограничений $r^k = b - Ax$ по правилу $r^{k+1} = (1-\lambda_k) r^k$, где λ_k — шаг корректировки решения на итерации k, $\lambda_k \in (0, 1]$. На каждой итерации вырабатываются также приближения к множителям Лагранжа ограничений (2), (3) фиктивной задачи линейного программирования. Как показали результаты экспериментальных исследований [2], эти множители эффективны для быстрой идентификации случаев несовместности (противоречивости) условий (2), (3).

Векторы неопределенных множителей Лагранжа ограничений (2), (5), (6) обозначим u, h, g, при этом $u \in R^m$, $h \in R^n$, $g \in R^n$. Далее в качестве расширенного решения задачи (1)–(3) рассмотрим наряду с оптимальным значением вектора x конкретные значения векторов множителей Лагранжа u, h, g и вектор $y = Wx$.

ДВОЙСТВЕННАЯ ЗАДАЧА

Обозначим V диагональную матрицу размера $n \times n$ с коэффициентами $v_j = \dfrac{1}{w_j}$, $j = 1, \ldots, n$, на диагонали, т.е. обратную к матрице весовых коэффициентов $V = W^{-1}$. Введем функцию от векторов $y \in R^n$, $u \in R^m$, $h \in R^n$, $g \in R^n$

$$\Phi(y, u, h, g) = \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}} V y - b^{\mathrm{T}} u + \bar{x}^{\mathrm{T}} h - \underline{x}^{\mathrm{T}} g. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу, в которой переменными являются компоненты векторов-аргументов введенной функции (7)

$$\Phi(y, u, h, g) \to \min \tag{8}$$

при ограничениях

$$y - A^{\mathrm{T}} u + h - g = 0, \tag{9}$$

$$h \ge 0, \quad g \ge 0. \tag{10}$$

Данную задачу назовем двойственной (к исходной задаче (1)–(3)). Отметим, что двойственной к этой задаче будет исходная задача (1)–(3), т.е. имеет место случай симметричной двойственности.

Расширенным решением двойственной задачи назовем набор из указанных векторов y, u, h, g с добавлением вектора $x \in R^n$, который рассматривается в качестве вектора множителей Лагранжа ограничений (9). По составу векторов расширенное решение исходной задачи (1)–(3) и двойственной задачи (8)–(10) совпадают. Справедлива следующая теорема [8].

Теорема 1. Набор векторов $x \in R^n$, $y \in R^n$, $u \in R^m$, $h \in R^n$, $g \in R^n$ является расширенным решением задачи (1)–(3) в том и только в том случае, если он является расширенным решением задачи (8)–(10).

Эта теорема позволяет использовать алгоритмы решения задачи (8)–(10) для поиска решения задачи (1)–(3). Двойственная задача имеет некоторые преимущества. В частности, для нее можно определить допустимые по всем ограничениям решения. При произвольных $y \in R^n$, $u \in R^m$ положим

$$h = (A^{\mathrm{T}} u - y)_+ , \ g = (y - A^{\mathrm{T}} u)_+ . \tag{11}$$

Полученная четверка векторов удовлетворяет условиям (9), (10). Здесь $()_+$ — операция неотрицательной срезки: $(\alpha)_+ = \max\{0, \alpha\}$ для любого вещественного α. В выражениях (11) подразумевается, что такая срезка осуществляется для каждой компоненты указанных векторов.

Двойственная задача также полезна для выявления в процессе счета возможной ситуации несовместности ограничений исходной задачи. В этом и только в этом случае двойственная задача не имеет решения из-за того, что ее целевая функция (8) не ограничена снизу на множестве допустимых по условиям (9), (10) решений. Это равносильно следующему утверждению, вытекающему из теорем об альтернативных системах линейных неравенств.

Теорема 2. Система линейных уравнений и неравенств (2), (3) несовместна в том и только в том случае, если существуют векторы $u \in R^m$, $h \in R^n$, $g \in R^n$ такие, что выполняются неравенства

$$h \ge 0, \ g \ge 0,$$

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} h - \underline{x}^{\mathrm{T}} g - b^{\mathrm{T}} u < 0, \tag{12}$$

$$A^{\mathrm{T}} u + h - g = 0. \tag{13}$$

САМОСОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА И КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ РЕШЕНИЯ

Введем функцию от векторов сумм целевых функций исходной и двойственной задач $F(x, y, u, h, g) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} W x + \Phi(y, u, h, g)$. Рассмотрим задачу минимизации введенной функции

$$F(x, y, u, h, g) \to \min \tag{14}$$

при ограничениях (2), (3), (9), (10). Хотя такая задача является простым соединением исходной и двойственной задач, она обладает новыми полезными свойствами. В частности, эта задача двойственна к самой себе. Поэтому задачу (14), (2), (3), (9), (10) назовем самосопряженной задачей. Справедлива следующая теорема [8].

Теорема 3. Если вектор x удовлетворяет условиям (2), (3), векторы y, u, h, g удовлетворяют условиям (9), (10), то функция F от этих векторов имеет неотрицательное значение. Данная функция имеет нулевое значение в том и только в том случае, если векторы x, y, u, h, g являются оптимальным расширенным решением исходной и двойственной задач.

Из теоремы 3 следует, что расширенное решение прямой и двойственной задач будет оптимальным решением этих задач в том и только в том случае, если для расширенного решения выполняются ограничения обеих задач и сумма значений их целевых функций равна нулю:

$$F(x, y, u, h, g) = 0.$$

Исходя из теоремы 3, предложим следующий критерий для прекращения расчетов при получении решений, близких к оптимальному. Пусть имеется (получен в результате какого-либо вычислительного процесса) набор векторов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{h}$, $\tilde{g}$, удовлетворяющих (9). Находим вектор невязок балансовых ограничений (2) $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$. Вычисляем значение суммы функций исходной и двойственной задач для векторов $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{h}$, $\tilde{g}$. Если выполняются неравенства

$$\|\tilde{r}\| \le \varepsilon_1, \tag{15}$$

$$|F(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{g})| \le \varepsilon_2, \tag{16}$$

то полагаем, что полученный набор составляет оптимальное решение с требуемой точностью. Здесь ε_1, ε_2 — заданные положительные малые величины, характеризующие необходимую точность выполнения балансовых ограничений (2) и равенства нулю суммы целевых функций исходной и двойственной задач.

Критерий останова вычислительного процесса можно построить на основе необходимых и достаточных условий оптимальности Куна–Таккера. В этом случае наряду с (15) необходима проверка для $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, $\tilde{h}$, $\tilde{g}$ выполнения следующих условий дополняющей нежесткости с заданной точностью $\varepsilon_2 > 0$:

$$|g_j(x_j - \underline{x}_j)| \le \varepsilon_2, \; j = 1, \ldots, n, \tag{17}$$

$$|h_j(\bar{x}_j - x_j)| \le \varepsilon_2, \; j = 1, \ldots, n. \tag{18}$$

ПРЯМЫЕ АЛГОРИТМЫ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

В алгоритмах на итерациях $k = 0, 1, 2, \ldots$ строится последовательность векторов x^k из R^n, для которых неравенства (3) выполняются в строгой форме

$$\underline{x} < x^k < \bar{x}, \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{19}$$

В качестве стартовой точки можно использовать, например, вектор $x^0 = \frac{1}{2}(\underline{x} + \bar{x})$. Каждая итерация алгоритма включает семь этапов вычислений.

1. Определение весовых коэффициентов. Сначала рассмотрим «классический» вариант алгоритма внутренних точек [4], в котором весовые коэффициенты определяются по правилу

$$d_j^k = \min\{(x_j^k - \underline{x}_j)^2, (\bar{x}_j - x_j^k)^2\}, \; j = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Обозначим d^k вектор из R^n, составленный из данных весовых коэффициентов. Пусть D_k — диагональная матрица размера n с введенными весовыми коэффициентами на диагонали $D_k = \mathrm{diag}\,(d^k)$.

2. Определение вектора невязок балансовых ограничений. Вычисляем вектор

$$\tilde{r}^k = b - Ax^k. \tag{21}$$

Если для него выполняется (15), т.е.

$$\|\tilde{r}^k\| \le \varepsilon_1, \tag{22}$$

то полагаем

$$r^k = 0, \tag{23}$$

где r^k — вектор из R^m. Будем считать, что при выполнении (23) осуществляется процесс оптимизации в области допустимых решений задачи (1)–(3).

Если для $\tilde{r}^k$ неравенство (22) не выполняется, то полагаем

$$r^k = \tilde{r}^k. \tag{24}$$

Если имеет место равенство (24), то осуществляется процесс ввода в область допустимых решений задачи (1)–(3).

3. Вспомогательная задача поиска направления решения. Обозначим Δx^k вектор из R^n, являющийся решением следующей вспомогательной задачи относительно вектора переменных Δx:

$$\frac{1}{2}(x^k + \Delta x)^{\mathrm{T}} W (x^k + \Delta x) + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}} D_k^{-1} \Delta x \to \min \tag{25}$$

при условии

$$A\Delta x = r^k. \tag{26}$$

Из условий оптимальности Лагранжа следует, что для оптимальности вектора Δx во вспомогательной задаче (25), (26) необходимо выполнение равенства

$$(W + D_k^{-1})\Delta x + Wx^k = A^{\mathrm{T}} u. \tag{27}$$

Здесь u — вектор из R^m, состоящий из множителей Лагранжа ограничения (26). Условие (27) становится достаточным, если Δx удовлетворяет и условию (26).

Выразим из (27) вектор Δx через u:

$$\Delta x = (W + D_k^{-1})^{-1}(A^{\mathrm{T}} u - Wx^k). \tag{28}$$

Подставив данное выражение в (26), получим систему линейных уравнений относительно вектора u

$$B_k u = r^k + c^k, \tag{29}$$

где $B_k = A(W + D_k^{-1})^{-1} A^{\mathrm{T}}$, $c^k = A(W + D_k^{-1})^{-1} Wx^k$. Матрица B_k симметрическая положительно-определенная. Для решения системы (29) может использоваться метод квадратного корня. Пусть u^k — решение системы (29). Подставив этот вектор вместо u в (28), получим значение Δx^k.

4. Проверка на совместность ограничений (2), (3). Согласно теореме 2 условия (2), (3) противоречивы и дальнейшие расчеты должны быть прекращены, если для векторов h^k, g^k, u^k выполняются условия (12), (13). Положим

$$h^k = (A^{\mathrm{T}} u^k)_+, \; g^k = (-A^{\mathrm{T}} u^k)_+ .$$

Если

$$\bar{x}^{\mathrm{T}} h^k - \underline{x}^{\mathrm{T}} g^k - b^{\mathrm{T}} u^k < 0,$$

то расчеты прекращаются.

5. Вычисление шага корректировки решения. При заданном параметре алгоритма $\gamma \in (0,1)$ вычисляем

$$\tilde{\lambda}_k = \gamma \max \{\lambda : \underline{x} \le x^k + \lambda \Delta x^k \le \bar{x}\}. \tag{30}$$

Можно использовать γ равным $2/3$. Исходя из (30), величину шага находим по формуле

$$\tilde{\lambda}_k = \gamma \min \left\{ \min_{j:\Delta x_j^k < 0} \frac{\underline{x}_j - x_j^k}{\Delta x_j^k}, \min_{j:\Delta x_j^k > 0} \frac{\bar{x}_j - x_j^k}{\Delta x_j^k} \right\}.$$

Если осуществляется процесс ввода в область допустимых решений, то полагаем

$$\lambda_k = \min \{\tilde{\lambda}_k, 1\}. \tag{31}$$

Если выполняется процесс оптимизации в области допустимых решений, то вычисляем

$$\hat{\lambda}_k = \arg \min_{\lambda \ge 0} \frac{1}{2} (x^k + \lambda \Delta x^k)^{\mathrm{T}} W (x^k + \lambda \Delta x^k). \tag{32}$$

Отсюда

$$\hat{\lambda}_k = -\frac{(x^k)^{\mathrm{T}} W \Delta x^k}{(\Delta x^k)^{\mathrm{T}} W \Delta x^k}.$$

Затем полагаем

$$\lambda_k = \min \{\tilde{\lambda}_k, \hat{\lambda}_k\}. \tag{33}$$

6. Итеративный переход. Такой переход осуществляется по формуле

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k \Delta x^k. \tag{34}$$

Правила вычисления шага (30)–(33) гарантируют, что из выполнения неравенств (19) для вектора x^k следует выполнение этих неравенств для вектора x^{k+1}.

Из (21) и условия (26) при выборе направления корректировки решения следует, что в процессе ввода в область допустимых решений должно выполняться неравенство $\tilde{r}^{k+1} = (1 - \lambda_k) \tilde{r}^k$. Этим объясняется использование правила (31).

Из (26) также вытекает, что при оптимизации в области допустимых решений после итерации перехода (34) выполняется равенство $\tilde{r}^{k+1} = \tilde{r}^k$. Оно означает, что вектор $\tilde{r}^{k+1}$ будет нулевым, т.е. и на следующей итерации осуществляется процесс оптимизации в области допустимых решений.

7. Проверка полученного решения на оптимальность (только для итерации $k \ge 1$). Если осуществляется процесс оптимизации в области допустимых решений, $r^k = 0$, то полагаем $\tilde{x} = x^k$, $\tilde{y} = Wx^k$, $\tilde{u} = u^{k-1}$. Здесь u^{k-1} — приближение к значению вектора множителей Лагранжа, вычисленное в результате решения системы (29) на предыдущей итерации (поэтому данный этап вычислений осуществляется только при $k \ge 1$).

По правилам (11) вычисляем, исходя из указанных значений $\tilde{y}$, $\tilde{u}$, векторы $\tilde{h}$, $\tilde{g}$. Если выполняется неравенство (16) или неравенства (17), (18), то расчеты прекращаются в связи с получением решения, близкого, с требуемой точностью, к оптимальному.

Другой вариант алгоритма состоит в том, что вместо (20) используется следующее правило задания весовых коэффициентов:

$$d_j^k = \min\left\{\frac{\bar{x}_j - x_j^k}{\max\{\beta, h_j^{k-1}\}}, \frac{x_j^k - \underline{x}_j}{\max\{\beta, g_j^{k-1}\}}\right\}, \ j = 1, \ldots, n,$$

где β — заданная малая положительная величина. При $k = 0$ считаем $h^0 = 0$, $g^0 = 0$.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальные исследования рассматриваемых вариантов алгоритмов внутренних точек проводились на задачах вида (1)–(3), отличающихся размерностью и границами варьирования переменных. Тестовые задачи решались двумя вариантами прямых алгоритмов внутренних точек. Алгоритмы условно обозначим Primal_1 и Primal_2. В Primal_1 весовые коэффициенты выбирались по правилу (20), в Primal_2 — альтернативным способом. В алгоритмах при нахождении шага корректировки (согласно правилу (30)) параметр γ равнялся 0,9, при вычислении весовых коэффициентов использовалось $\beta = 0{,}1$. Для проверки оптимальности построенных алгоритмом приближений применялись критерии (15), (16) и (15), (17), (18), в которых $\varepsilon_1 = 0{,}001$, $\varepsilon_2 = 0{,}01$.

Целевые функции тестовых задач формировались по правилу

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i x_i^2, \tag{35}$$

ограничения вида (2) — по формулам

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_j = \frac{n-m}{2}, \ i = 1, \ldots, m. \tag{36}$$

Границы изменения переменных задавались условиями

$$0 \le x_j \le \frac{n-m}{2}, \ j = 1, \ldots, n, \tag{37}$$

$$0{,}1 \le x_j \le 1, \ j = 1, \ldots, n. \tag{38}$$

Тестовые примеры разделим на две группы: поиск минимума функции (35) при ограничениях (36), (37) (минимум функции — внутри области допустимых решений); минимизация функции (35) при ограничениях (36), (38) (минимум функции — на границе области допустимых решений).

В табл. 1 представлены результаты решения задач вариантами прямого алгоритма внутренних точек (Primal_1, Primal_2) при использовании критерия останова (15), (16), в табл. 2 — критерия останова (15), (17), (18). В таблицах указано число итераций, за которое была решена тестовая задача. В скобках приведено количество итераций, потребовавшихся для ввода в область допустимых решений.

Т а б л и ц а 1

Размерность задачи	Количество итераций, необходимых для решения			
	задачи (35)–(37)		задачи (35), (36), (38)	
	Primal_1	Primal_2	Primal_1	Primal_2
$n = 125$, $m = 100$	6 (3)	7 (2)	119 (2)	5 (2)
$n = 150$, $m = 100$	182 (3)	9 (2)	394 (2)	5 (2)
$n = 300$, $m = 100$	21 (3)	13 (3)	3925 (2)	6 (2)
$n = 400$, $m = 100$	44 (4)	12 (4)	4462 (2)	9 (2)
$n = 225$, $m = 200$	5 (3)	5 (2)	75 (2)	6 (2)
$n = 250$, $m = 200$	85 (3)	9 (2)	211 (2)	6 (2)
$n = 400$, $m = 200$	377 (4)	12 (3)	3948 (2)	6 (2)
$n = 600$, $m = 200$	180 (4)	13 (4)	8110 (2)	7 (2)
$n = 800$, $m = 200$	72(4)	25(5)	8474(2)	10(2)

Т а б л и ц а 2

Размерность задачи	Количество итераций, необходимых для решения			
	задачи (35)–(37)		задачи (35), (36), (38)	
	Primal_1	Primal_2	Primal_1	Primal_2
$n = 125$, $m = 100$	5 (3)	5 (2)	31 (2)	4 (2)
$n = 150$, $m = 100$	16 (3)	8 (2)	186 (2)	4 (2)
$n = 300$, $m = 100$	17 (3)	10 (3)	669 (2)	4 (2)
$n = 400$, $m = 100$	28 (4)	11 (4)	114 (2)	5 (2)
$n = 225$, $m = 200$	5 (3)	5 (2)	5 (2)	4 (2)
$n = 250$, $m = 200$	5 (3)	7 (2)	1497 (2)	4 (2)
$n = 400$, $m = 200$	171 (4)	11 (3)	64 (2)	4 (2)
$n = 600$, $m = 200$	118 (4)	12 (4)	78 (2)	5 (2)
$n = 800$, $m = 200$	32 (4)	13 (5)	130 (2)	6 (2)

В табл. 3 и табл. 4 приведены результаты расчетов тестовых задач модифицированными вариантами алгоритмов Primal_1 и Primal_2 (MPrimal_1 и MPrimal_2), в которых шаг корректировки $\hat{\lambda}_k$, вычисляемый при оптимизации в области допустимых решений, находился по формуле

$$\hat{\lambda}_k = -0{,}99 \frac{(x^k)^{\mathrm{T}} W \Delta x^k}{(\Delta x^k)^{\mathrm{T}} W \Delta x^k}.$$

Из таблиц видно, что при использовании критерия останова (15), (16) (табл. 3) алгоритмам требуется значительно большее количество итераций для получения решения, близкого к оптимальному, чем в случае применения критерия (15), (17), (18) (табл. 4). Наилучшие результаты по числу итераций показал алгоритм Primal_2 и его модификация. Отметим, что этот алгоритм был введен в [6] для преодоления негативных эффектов влияния погрешностей вычислений исходного алгоритма внутренних точек (Primal_1) в конце вычислительного процесса. Модификация правила вычисления шага $\hat{\lambda}_k$ позволила в среднем сократить время вычислений, особенно в случае алгоритма Primal_1. Необходимо теоретическое исследование данного факта.

Сопоставив результаты решения двух типов задач, отметим, что задачи с более «жесткими» ограничениями-неравенствами на переменные (при условии (37)) решаются алгоритмами с квадратичными весами существенно быстрее, чем задачи с более «слабыми» ограничениями-неравенствами (при условии (38)). Алгоритмы с альтернативным способом задания весовых коэффициентов демонстрируют противоположные результаты. Это также требует теоретического обоснования.

Т а б л и ц а 3

Размерность задачи	Количество итераций, необходимых для решения			
	задачи (35)–(37)		задачи (35), (36), (38)	
	MPrimal_1	MPrimal_2	MPrimal_1	MPrimal_2
$n = 125,\ m = 100$	11 (3)	7 (2)	148 (2)	5 (2)
$n = 150,\ m = 100$	19 (3)	9 (2)	142 (2)	5 (2)
$n = 300,\ m = 100$	21 (3)	11 (3)	571 (2)	6 (2)
$n = 400,\ m = 100$	22 (4)	14 (4)	509 (2)	9 (2)
$n = 225,\ m = 200$	23 (3)	7 (2)	42 (2)	6 (2)
$n = 250,\ m = 200$	13 (3)	9 (2)	237 (2)	6 (2)
$n = 400,\ m = 200$	30 (4)	27 (3)	236 (2)	6 (2)
$n = 600,\ m = 200$	59 (4)	35 (4)	397 (2)	7 (2)
$n = 800,\ m = 200$	32 (4)	52 (5)	615 (2)	10 (2)

Т а б л и ц а 4

Размерность задачи	Количество итераций, необходимых для решения			
	задачи (35)–(37)		задачи (35), (36), (38)	
	MPrimal_1	MPrimal_2	MPrimal_1	MPrimal_2
$n = 125,\ m = 100$	7 (3)	5 (2)	15 (2)	4 (2)
$n = 150,\ m = 100$	11 (3)	8 (2)	48 (2)	4 (2)
$n = 300,\ m = 100$	15 (3)	10 (3)	91 (2)	4 (2)
$n = 400,\ m = 100$	18 (4)	11 (4)	40 (2)	5 (2)
$n = 225,\ m = 200$	11 (3)	7 (2)	15 (2)	4 (2)
$n = 250,\ m = 200$	7 (3)	7 (2)	7 (2)	4 (2)
$n = 400,\ m = 200$	22 (4)	11 (3)	26 (2)	4 (2)
$n = 600,\ m = 200$	26 (4)	12 (4)	30 (2)	5 (2)
$n = 800,\ m = 200$	18 (4)	13 (5)	42 (2)	6 (2)

В работе представлены варианты прямых алгоритмов внутренних точек для нахождения нормальных решений систем линейных уравнений при двусторонних ограничениях на переменные. Проведенные экспериментальные исследования алгоритмов на тестовых задачах выявили следующие их особенности:

- алгоритмы с квадратичными весовыми коэффициентами имеют плохую устойчивость (число итераций, необходимых для решения задач, сильно отличается и не зависит от размерности задачи);
- алгоритмы внутренних точек с альтернативным способом задания весовых коэффициентов показали наибольшую вычислительную эффективность (малое количество итераций, устойчивость вычислений);
- модификация правила нахождения шага корректировки повышает стабильность работы алгоритмов, в особенности с квадратичными весовыми коэффициентами;
- при использовании критерия останова (15), (16) алгоритмам требуется значительно большее количество итераций для получения решения, близкого к оптимальному, чем в случае применения критерия (15), (17), (18);
- задачи с более «жесткими» ограничениями-неравенствами на переменные решаются алгоритмами с квадратичными весами существенно быстрее, чем задачи с более «слабыми» ограничениями-неравенствами (для алгоритмов с альтер-

нативным способом вычисления весовых коэффициентов получены противоположные результаты).

Можно прогнозировать сокращение объема вычислений для решения указанной задачи от применения двойственных алгоритмов внутренних точек. При их использовании осуществляется монотонное улучшение по итерациям целевой функции двойственной задачи. На каждой итерации вырабатываются приближения к решению исходной системы (2), (3). Хотя эти приближения не обладают свойством монотонного улучшения решения исходной системы, они, как показывают многочисленные эксперименты и некоторые теоретические [7] результаты, намного быстрее приводят к решению системы (2), (3), чем «прямые» алгоритмы внутренних точек. Двойственные алгоритмы также значительно быстрее (с меньшим объемом вычислений) идентифицируют случаи несовместности систем (2), (3). В работе [8] представлены результаты сравнительных исследований, демонстрирующие эффективность двойственных алгоритмов внутренних точек для решения систем вида (2), (3) на тестовых примерах и задачах выбора допустимых режимов функционирования электроэнергетических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стецюк П.И., Нурминский Е.А., Соломон Д.И. Транспортная задача и ортогональное проектирование на линейные многообразия // Материалы V-й междунар. науч. конф. «Транспортные системы и логистика», Кишинэу, 11–13 декабря 2013 года. — Кишинэу: Эврика, 2013. — С. 251–263.

2. Филатов А.Ю. Развитие алгоритмов внутренних точек и их приложений к системам неравенств: Автореф. дис. ... канд. физ-мат. наук. — ИГУ: Иркутск, 2001. — 19 с.

3. Зоркальцев В.И. Решения систем линейных неравенств алгоритмами внутренних точек // Современные методы оптимизации и их приложения к моделям энергетики. — Новосибирск: Наука, 2003. — С. 110–141.

4. Дикин И.И., Зоркальцев В.И. Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек). — Новосибирск: Наука, 1980. — 144 с.

5. Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Системы линейных неравенств. — Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2007. — 127 с.

6. Zorkal'tsev V.I. Algorithms of projective optimization which use the multipliers of previous iterations // Comp. Math. Phys. — 1994. — **34**, N 7. — P. 943–950.

7. Войтов О.Н., Зоркальцев В.И., Филатов А.Ю. Определение допустимых режимов электроэнергетических систем алгоритмами внутренних точек // Сиб. журн. индустр. математики. — 2000. — **3**, № 1. — С. 57–65.

8. Зоркальцев В. И., Медвежонков Д.С. Численные эксперименты с вариантами алгоритмов внутренних точек на нелинейных задачах потокораспределения // Управление большими системами. — М.: ИПУ РАН, 2013. — № 46. — С. 68–87.

Поступила 27.02.2015