УДК 519.217:519.718:519.837

И.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСКИЙ

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

Аннотация. Исследована устойчивость самонастраивающихся стохастических систем автоматического регулирования с последействием. Проведен синтез контура самонастройки с помощью второго метода Ляпунова и доказана экспоненциальная *p*-устойчивость в целом стохастических дифференциальных уравнений с последействием.

Ключевые слова: стохастические самонастраивающиеся системы, автоматическое регулирование, последействие, устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Множество исследований в области технической кибернетики связано с проблемой построения систем автоматического регулирования (САР) для объектов с запаздыванием, которые разделяют на одноконтурные и двухконтурные. Динамика замкнутой САР для объектов с запаздыванием описывается как уравнениями запаздывающего, так и нейтрального типа. Зная передаточную функцию и используя обратное преобразование Лапласа, можно построить точные аналитические выражения для процессов в замкнутых САР. Вопросу устойчивости САР для объектов с запаздыванием посвящено много работ (например, [1] и ссылки к ней).

Изучение областей устойчивости САР позволяет решить проблему выбора типа регулятора, исходя из требований к замкнутой САР. Лучших результатов при построении САР можно добиться при использовании двухконтурных систем [2, 3].

Исследователи столкнулись с проблемой больших разбросов параметров объекта построения удовлетворительных САР. Оказывается, что при значительных колебаниях параметров объекта построение «хороших» САР возможно с использованием самонастраивающихся систем (СНС) [2, 4, 5]. Последняя для объектов с запаздыванием является нелинейной и нестационарной, поэтому ее анализ в рамках теории линейных стационарных систем качественно провести невозможно. В [1] СНС проанализированы с применением второго метода Ляпунова.

Развитие теории стохастических дифференциальных, дифференциально-разностных, функционально-дифференциальных уравнений [6–14] позволяет рассматривать стохастические СНС (ССНС), которые являются более точными математическими моделями известных детерминированных СНС.

В работе [15] исследована устойчивость самонастраивающихся стохастических САР с последействием для асимптотической устойчивости в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений.

В данной статье исследуется устойчивость самонастраивающихся стохастических динамических систем с конечным последействием.

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ И С ЭТАЛОННОЙ МОДЕЛЬЮ

На вероятностном базисе $(\Omega, F, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ определено сильное решение $x(t) \equiv$ $\equiv x(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ диффузионного стохастического дифференциально-разностного уравнения (СДРУ) *n*-го порядка

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}[a_{kj}+\Delta a_{kj}+\delta a_{kj}(t)]\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}=f(t,\omega) \tag{1}$$

с неслучайными начальными условиями

$$\left.\frac{d^j x(t)}{dt^j}\right|_{t\in[-\Delta,\,0]}=\varphi_0^{(j)}(t),\;\; j=\overline{0,n-1}. \tag{2}$$

Здесь

$$f(t,\omega)\equiv\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}b_{kjl}\,\frac{d^j x(t-\Delta_k)}{dt^j}\cdot\frac{dw_l(t)}{dt}, \tag{3}$$

$a_{kj}\in\mathbf{R}^1$, b_{kjl} — коэффициенты диффузии попарно независимых винеровских процессов $\{w_l(t)\}\subseteq\mathbf{R}^1$; $\Delta a_{kj}\in\mathbf{R}^1$ — постоянные, пока не определенные, действительные числа вариации $\{a_{kj}(t),\; k=\overline{0,N};\; j=\overline{0,n-1}\}\subseteq\mathbf{R}^1$ вырабатываются контуром самонастройки.

Эталонная модель описывается системами диффузионных СДРУ n-го порядка

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{n-1}a_{kj}\,\frac{d^j y(t-\Delta_k)}{dt^j}=f(t,\omega)\,. \tag{4}$$

Здесь $\{y(t)\equiv y(t,\omega)\}\subseteq R^1$ — модель, которую следует рассматривать как сильное решение линейной системы СДРУ (4) с начальными условиями

$$\frac{d^j y(t-\Delta)}{dt^j}\Big|_{t\in[-\Delta,0]}=y_0^{(j)}(t),\quad j=\overline{0,n-1}, \tag{5}$$

$f(t,\omega)\in\mathbf{R}^1$ — управляющее случайное воздействие (3), которое определяется входным случайным процессом.

Замечание 1. Используя результаты теоремы 1.3 работы [15], определяем коэффициенты $\{a_{kj}\}$, $\{b_{kj}\}$ для системы (4), (5), при которых решение ее эталонной системы для основной (1), (2) будет асимптотически устойчиво в l.i.m.

Алгоритм I состоит в следующем.

Шаг 1. Определяем методом D-разбиения [1] области экспоненциальной устойчивости в пространстве параметров $\{a_{kj}\}$, $k=\overline{0,N}$, $j=\overline{0,n-1}$, эталонной системы (4), т.е. находим такие $\{a_{kj}\}$, при которых решение $y(t)\in\mathbf{R}^1$ обыкновенного ДРУ имеет экспоненциальный рост с отрицательными показателями e^{-ct}, $c>0$.

Шаг 2. Находим $|V^{-1}(\lambda)|^2$, где $|\lambda|^2=x^2+y^2$; $\lambda=x+iy$, $x, y\in\mathbf{R}^1$.

Шаг 3. Находим $\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N-1}b_{kj}(is)e^{-\Delta_k s}\right|^2$ — квадрат модуля комплексного числа $(|\lambda|^2=x^2+y^2,\;\lambda=x+iy)$.

Шаг 4. Проверяем выполнение условия [15]

$$\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{L}\left[\int_0^\infty\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{N-1}b_{kjl}(is)e^{-\Delta_k s}\right|^2|V^{-1}(is)|^2\,ds\right]<1,$$

из которого находим такие $\{b_{kjl}\}$, при которых левая часть данного неравенства меньше 1.

Для упрощения расчетов принимается $\sigma_l=1$, $l=\overline{0,L}$, т.е. в эталонной системе линейных ДРУ используются винеровские процессы.

Замечание 2. Обычно шаги 1–4 упрощаются в реальных модельных задачах, поскольку в этом случае система (4) описывается с помощью первой и второй производной (скорость и ускорение) при нескольких запаздываниях

Самонастраивающиеся стохастические динамические системы с эталонной моделью (ССДСЭМ) предназначены для построения искомого контура самонастройки, т.е. определения такого алгоритма изменения $\{\delta_{a_{kj}}\}$, при котором $\lim\limits_{t\to+\infty} M\{x^2(t) - y^2(t)\} = 0.$

Для дальнейшего исследования запишем диффузионное линейное СДРУ (1), которое является математической моделью реального объекта, и эталонную систему СДРУ (4) в матричном виде

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{N} A_k \vec{x}(t-\Delta_k) + \left[\sum_{k=0}^{N} (\Delta A_k + \delta A_k(t, \vec{x}(t-\Delta_k), \vec{y}(t)))\right] \vec{x}(t-\Delta_k) +$$

$$+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} x^{\mathrm{T}}(t-\Delta_k) B_{kl} \frac{d\vec{w}_l(t)}{dt} \tag{6}$$

с начальными неслучайными условиями

$$\vec{x}(t_0, \omega) \equiv (\varphi_0^{(0)}, \varphi_0^{(1)}, \ldots, \varphi_0^{(n-1)})^{\mathrm{T}}; \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{N} A_k \vec{y}(t-\Delta_k) + \sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} y^{\mathrm{T}}(t-\Delta_k) B_{kl} \frac{d\vec{w}_l(t)}{dt} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$\vec{y}(t_0, \omega) = (y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0})^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

Здесь $\vec{x}(t) \equiv \vec{x}(t, \omega) \in R^n$, $\vec{y}(t) \equiv \vec{y}(t, \omega) \in R^n$ — векторы фазовых координат системы (6) и эталонной модели (8); $A_k = \{a_{ij}^{(k)}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, — вещественные гурвицевы постоянные матрицы; $B_{kl} \equiv \{b_{ij}^{(kl)}\}$ — вещественные матрицы с коэффициентами диффузии независимых винеровских процессов;

$$A_k \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -a_{k1} & -a_{k2} & -a_{k3} & \cdots & -a_{k,n-1} & -a_{k,n} \end{bmatrix}; \tag{10}$$

$$B_{kl} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{kl1} & b_{kl2} & b_{kl3} & \cdots & b_{kl,n-1} & b_{kl,n} \end{bmatrix}; \tag{11}$$

$$\frac{d\vec{w}_l(t)}{dt} \equiv \frac{d\vec{w}_l(t,\omega)}{dt} = \left(\frac{d\vec{w}_{l,1}(t,\omega)}{dt}, \frac{d\vec{w}_{l,2}(t,\omega)}{dt}, \ldots, \frac{d\vec{w}_{l,n-1}(t,\omega)}{dt}, \frac{d\vec{w}_{l,n}(t,\omega)}{dt}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Случайный вектор управляющих воздействий имеет вид

$$\vec{f}(t,\omega) \equiv \sum_{l=0}^{L} \sum_{k=0}^{N} B_{kl} \frac{d\vec{w}_l(t)}{dt};$$

$$\vec{x}(t) \equiv \left(x(t), x_1(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, x_{n-1}(t) \equiv \frac{d^{(n-1)}x(t)}{dt^{n-1}} \right)^{\mathrm{T}}.$$

Обозначим ΔA_k вещественные постоянные матрицы с пока не известными коэффициентами, зависящими от объекта управления; $\delta A_k(t, \vec{x}, \vec{y})$ — матрицы параметров, которые изменяют контуры самонастройки [1]:

$$\Delta A_k \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\Delta a_{k1} & \cdots & -\Delta a_{kn} \end{bmatrix};$$

$$\delta A_k(t, \vec{x}, \vec{y}) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ -\delta a_{k1}(t, \vec{x}, \vec{y}) & \cdots & -\delta a_{kn}(t, \vec{x}, \vec{y}) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Вычитая из СДРУ (6), (7) стохастическое эталонное дифференциальное уравнение (8), (9), для вектора покоординатного рассогласования $\vec{\varepsilon}(t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{y}(t)$ получаем СДРУ

$$\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{N} A_k \vec{\varepsilon}(t) + \sum_{k=0}^{N} [\Delta A_k + \delta A_k(t, \vec{x}, \vec{y})] \vec{x}(t - \Delta_k) \tag{13}$$

с начальным условием $\vec{\varepsilon}(t_0) = \vec{\varepsilon}_0$.

Далее запишем СДРУ (13) в удобной стандартной форме

$$\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \sum_{k=0}^{N} A_k \vec{\varepsilon}(t) + \sum_{k=0}^{N} D(t) \vec{\alpha}_k(t, \vec{x}, \vec{y}) \tag{14}$$

с начальным условием $\vec{\varepsilon}(t_0) = \vec{\varepsilon}_0$. В (14) матрица $D(t)$ имеет вид (см. (12))

$$D(t) \equiv \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ x_1 - y_1 & \cdots & x_n - y_n \end{bmatrix},$$

$$\vec{\alpha}_k(t, \vec{x}, \vec{y}) \equiv (\Delta_{k1} + \delta a_{k1}(t, \vec{x}, \vec{y}), \ldots, \Delta_{n1} + \delta a_{n1}(t, \vec{x}, \vec{y}))^{\mathrm{T}}.$$

Замечание 3. Согласно замечанию 1 линейная система СДРУ (8) как эталонная модель должна быть экспоненциально устойчивой в l.i.m.

Можно получить достаточные условия экспоненциальной устойчивости в l.i.m. эталонной модели (8) с помощью функционалов Ляпунова–Красовского [6–11, 15].

Определение 1. Тривиальное решение $\vec{y}(t) \equiv \vec{0}$ задачи (8), (9) назовем асимптотически устойчивым в l.i.m., если $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $|\vec{y}_0| < \delta$ следует $|\vec{y}| < \varepsilon$ и $\lim_{t\to\infty} E\{|\vec{y}(t)|^2\} = 0$.

Теорема 1. Решение $\vec{y}(t, t_0, \vec{y}_0) \equiv 0$ задачи (8), (9) асимптотически устойчиво в l.i.m. при любых постоянных запаздываниях $0 < \Delta_1 < \ldots < \Delta_N$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

— матрица A_0 экспоненциально устойчива с каким-либо показателем экспоненты $\beta > 0$;

— матрица $\sum_{k=0}^{N} A_k$ является гурвицевой;

— существует положительно определенное решение H матричного уравнения Сильвестра

$$A_0^{\mathrm{T}} H + HA_0 + \sum_{k=0}^{N} \gamma_0 H = -I, \tag{15}$$

где I — единичная матрица, $\gamma_k > 0$, $k = \overline{1, N}$, — положительные числа такие, что

$$0 < \sum_{k=1}^{N} \gamma_k < 2\beta \tag{16}$$

(причем $\sum_{k=1}^{N} \gamma_k = 2\beta$);

— имеет место матричное неравенство (см. (10), (11))

$$\begin{bmatrix} -I & HA_0 & \cdots & HA_N \\ A_1^{\mathrm{T}} H & -\gamma_0 H + \sum_{l=0}^{L} B_{0l}^{\mathrm{T}} HB_{0l} & \cdots & \sum_{l=0}^{L} B_{0l}^{\mathrm{T}} HB_{0l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_N^{\mathrm{T}} H & \sum_{l=0}^{L} B_{Nl}^{\mathrm{T}} HB_{0l} & \cdots & -\gamma_N H + \sum_{l=0}^{L} B_{Nl}^{\mathrm{T}} HB_{Nl} \end{bmatrix} \le 0_{(N+1)(L+1)}. \tag{17}$$

Доказательство следует провести по схеме доказательства теоремы 4.17 из [5].

Определяем стохастический функционал Ляпунова–Красовского в виде

$$v(y(t+\theta)) = (y(t))^{\mathrm{T}} Hy(t) + \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \int_{t-\Delta_k}^{t} (y(\theta))^{\mathrm{T}} Hy(\theta) d\theta, \tag{18}$$

где неизвестную матрицу $H \ge 0_{n \times n}$ и коэффициенты γ_k, $i = \overline{0, N}$, из (15)–(17) определим далее.

Используя формулу Ито [6], вычисляем стохастический дифференциал dv функционала (18):

$$dv(y(t+\theta)) = d(y(t))^{\mathrm{T}} Hy(t) + (y(t))^{\mathrm{T}} Hdy(t) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{L} [B_{kl} y(t-\Delta_k)]^{\mathrm{T}} H \left[\sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{L} B_{kl} y(t-\Delta_k) \right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{k=0}^{N} \gamma_k (y(t))^{\mathrm{T}} Hx(t) - \sum_{k=0}^{m} \gamma_k (y(t-\Delta_k))^{\mathrm{T}} Hy(t-\Delta_k) \right] dt =$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{N} (A_k y(t-\Delta_k))^{\mathrm{T}} dt + \left[\sum_{l=0}^{L} \sum_{k=0}^{N} B_{kl} y(t-\Delta_k) \right]^{\mathrm{T}} dw_l(t) \right\} Hy(t) +$$

$$+(y(t))^{\mathrm{T}} H\left\{\left[\sum_{k=0}^{N} A_k y(t-\Delta_k)dt+\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} B_{kl} y(t-\Delta_k)\right]dw_l\right\}+$$

$$+\left[\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} B_{kl} y^{\mathrm{T}}(t-\Delta_k)\right]^{\mathrm{T}} H\left[\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} B_{kl} y^{\mathrm{T}}(t-\Delta_k)\right]dt+$$

$$+\left[\sum_{k=0}^{N}\gamma_k (y(t))^{\mathrm{T}} Hy(t)-\sum_{k=0}^{N}\gamma_k (y(t-\Delta_k))^{\mathrm{T}} Hy(t-\Delta_k)\right]dt. \qquad (19)$$

Используя полученное выражение для стохастического дифференциала dv (19), вычисляем математическое ожидание от полной производной:

$$E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(8)}\right\}=\left[\sum_{k=0}^{N} A_k y(t-\Delta_k)\right]^{\mathrm{T}} Hy(t)+Hy(t)+(y(t))^{\mathrm{T}} H\sum_{k=0}^{N} A_k y(t-\Delta_k)+$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\gamma_k (y(t))^{\mathrm{T}} Hy(t)-\sum_{k=0}^{N}\gamma_k (y(t-\Delta_k))^{\mathrm{T}} Hy(t-\Delta_k)+$$

$$+\left[\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} B_{kl} y(t-\Delta_k)\right]^{\mathrm{T}} H\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N} B_{kl} y(t-\Delta_k). \qquad (20)$$

Правую часть соотношения (20) рассматриваем как некоторую квадратичную форму от $y(t)$ и $y(t-\Delta_k)$, $k=\overline{0,N}$. Тогда (20) перепишется в следующей матричной форме:

$$E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(8)}\right\}=\begin{bmatrix} y(t)\\ y(t-\Delta_0)\\ y(t-\Delta_1)\\ \cdots\\ y(t-\Delta_N)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} A_0^{\mathrm{T}}H+HA_0+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k H & HA_1 & \cdots & HA_N\\ A_0^{\mathrm{T}}H & -\gamma_0 H\sum_{j=0}^{L} B_{1j}^{\mathrm{T}} HB_{0j} & \cdots & \sum_{j=0}^{L} B_{0j}^{\mathrm{T}} HB_{Nj}\\ A_1^{\mathrm{T}}H & -\sum_{j=0}^{L} B_{1j}^{\mathrm{T}} HB_{0j} & \cdots & \sum_{j=0}^{L} B_{1j}^{\mathrm{T}} HB_{Nj}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_N^{\mathrm{T}}H & -\sum_{j=0}^{L} B_{Nj}^{\mathrm{T}} HB_{0j} & \cdots & -\gamma_N H\sum_{j=0}^{L} B_{Nj}^{\mathrm{T}} HB_{Nj}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} y(t)\\ y(t-\Delta_0)\\ y(t-\Delta_1)\\ \cdots\\ y(t-\Delta_N)\end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Математическое ожидание $E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(8)}\right\}<0$ лишь в том случае, когда квадратичная форма, стоящая справа в (21), на решениях $y(t)$ отрицательно определенная, а по совокупности $y(t)$ и $y(t-\Delta_l)$ остается неположительно определенной.

Теорема доказана. ■

СИНТЕЗ КОНТУРА САМОНАСТРОЙКИ ВТОРЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

В синтезе контура самонастройки особое значение имеет второй метод Ляпунова для детерминированного случая [1–4].

Изложим суть синтеза ССНС с эталонной моделью (ССНСЭМ) с использованием стохастических функционалов Ляпунова–Красовского [5–15].

Вначале выберем некоторый квадратичный функционал

$$v(t,\vec{\varepsilon},\vec{\alpha})=\vec{\varepsilon}^{\,\mathrm{T}}H\vec{\varepsilon}+\vec{\alpha}^{\,\mathrm{T}}\vec{\alpha}+\sum_{k=0}^{N}\gamma_k\int_{-\Delta_k}^{0}\varepsilon^{\mathrm{T}}(t+\theta)H\varepsilon(t+\theta)d\theta \tag{22}$$

для линейной ССНСЭМ (1) и эталонной модели (4), а также H — как решение матричного уравнения (15). (Согласно [16] такое H всегда можно найти.) Затем уравнение контура самонастройки [1]

$$\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt}=\overline{\theta}(t,\vec{\alpha}(t),\vec{x},\vec{y}), \tag{23}$$

где

$$\overline{\theta}(t,\vec{\alpha},\vec{x},\vec{y})\equiv A\vec{\varepsilon}(t)+[\Delta A+\delta A(t,\vec{x},\vec{y})]\vec{x}(t), \tag{24}$$

$$\vec{\varepsilon}(t_0)=\varepsilon_0, \tag{25}$$

выбираем таким, чтобы математическое ожидание от полной производной в силу системы (23) становилось отрицательно определенным согласно теореме 1, т.е.

$$E\left\{\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(23)}\right\}<0.$$

Этого можно достичь при выполнении условия (17) теоремы 1.

Как правило, при реализации синтеза контура самонастройки вместо уравнения (23) используют для контура адаптации [1] уравнение

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt}=-D^{\mathrm{T}}(t)H\vec{\varepsilon}(t) \tag{26}$$

или более общий алгоритм адаптации

$$\frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}=-D^{\mathrm{T}}(t)H(t,\vec{x},\vec{y})\vec{\varepsilon}(t) \tag{27}$$

при начальных условиях

$$\vec{\alpha}^{\,\mathrm{T}}(t_0)=\vec{\alpha}_0^{\,\mathrm{T}}\equiv(\Delta a_1,\ldots,\Delta a_n)^{\mathrm{T}}. \tag{28}$$

При этом метод синтеза контура самонастройки имеет преимущество в автоматическом обеспечении устойчивости синтезированной ССНСЭМ.

Заметим, что алгоритм (27), (28) включает большинство известных алгоритмов адаптации [1]. Более того, этот алгоритм работает и для случая стохастической (случайной) правой части (22), (23)–(25). Если методами статистического моделирования можно «измерить» векторы $\vec{x}(t)$, $\vec{y}(t)$ и $\vec{\varepsilon}(t)$ [11], то в принципе алгоритм (26)–(28) можно реализовать. При этом из методики синтеза следует, что ССДСЭМ (14), (27) будет асимптотически устойчива в l.i.m. по $\vec{\varepsilon}(t)$ и $\vec{\alpha}(t)$.

Далее приведен, что при некоторых ограничениях на матрицу H имеет место также асимптотическая устойчивость в l.i.m. в целом по фазовой ошибке $\vec{\varepsilon}(t)$. Этого не следует из метода синтеза и должно быть установлено отдельно.

Замечание 4. Отметим, что структура контура зависит от вида выбранного стохастического функционала Ляпунова–Красовского. При неудачном выборе функционала v полученный контур имеет свойство устойчивости по параметрической и фазовой ошибкам $\vec{\alpha}$ и $\vec{\varepsilon}$, но не имеет других важных свойств [1].

Изложим алгоритм синтеза контура самонастройки системы (1) и эталонной модели (4) (или эквивалентной модели в матричной форме (8)).

Алгоритм II

Шаг 1. С помощью алгоритма I находим необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов (4), т.е. $\{a_{kj}\}$ и $\{b_{kjl}\}$, при которых решение СДРУ (4) экспоненциально устойчиво в l.i.m. При этом следует осуществить шаги 1–4 алгоритма I. Заметим, что время вычисления несобственного интеграла шага 4 зависит от конструкции исходного уравнения (1) и от скорости сходимости этого интеграла.

Шаг 2. Находим положительно определенную матрицу $H > 0_{n\times n}$ как решение матричного уравнения Сильвестра $A_0^{\mathrm{T}} H + HA_0 + \sum_{k=0}^{N} \gamma_k H = -I$. (Известно [16], что такая матрица $H > 0_{n\times n}$ существует.)

Шаг 3. Выполняем матричное неравенство (17) для системы (23), если оно не выполнено, то необходимо перейти к шагу 1, минуя шаг 2, и выполнить шаг 3 данного алгоритма.

Заметим, что шаг 3 согласно теореме 1 следует из того, что $E\left\{\frac{dv}{dt}|_{(14)}\right\} < 0.$ В теореме 1 использован функционал вида (18).

Замечание 4. Если методами статистического моделирования удастся измерить векторы $\vec{x}(t), \vec{y}(t), \vec{\varepsilon}(t)$, то алгоритм II можно реализовать на компьютере. При этом из способа синтеза следует согласно теореме 1, что ССНСЭМ будет устойчива в l.i.m. по $\vec{\varepsilon}(t)$ и $\vec{\alpha}(t)$, но не асимптотически устойчива в l.i.m. в целом по фазовой ошибке $\vec{\varepsilon}(t)$. Этого не следует из метода синтеза и доказано в следующем разделе.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ *p*-УСТОЙЧИВОСТЬ В ЦЕЛОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ (С УЧЕТОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ЗАПАЗДЫВАНИЙ)

Пусть на вероятностном базисе $(\Omega, F, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ $F \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ задано сильное решение $y(t) \equiv y(t,\omega) : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^m$ стохастических дифференциальных уравнений с последействием (СДУсП)

$$dy(t) = A(t, y_t)dt + B(t, y_t)dw(t) \tag{29}$$

с начальными условиями

$$y(t) = \varphi(t),\ \ t \in [-\tau, 0],\ \ \tau > 0, \tag{30}$$

где $y_t \equiv \{y(t+\theta), -\tau \leq \theta \leq 0\} : C([-\tau,0]) \to \mathbf{R}^m$; $A : [0,\infty)\times C([-\tau,0), \mathbf{R}^m) \to \mathbf{R}^m$; $B : [0,\infty)\times C([-\tau,0], \mathbf{R}^m) \to M_m(\mathbf{R}^m)$ — квадратная матрица размера $m\times m$;

$w(t) \equiv (w_1(t,\omega), \dots, w_m(t,\omega))^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец нормальных процессов броуновского движения. Здесь A, B — непрерывные поэлементно матрицы и для них выполнены глобальные условия Липшица.

Пусть выполняются условия

$$A(t,0) \equiv 0, \;\; B(t,0) \equiv 0, \tag{31}$$

т.е. существует тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ задачи (29), (30).

Определение 2. Решение $y(t) \equiv 0$ назовем экспоненциально p-устойчивым ($p > 0$), если существуют такие константы $B_p > 0$ и $\lambda_p > 0$, что $\forall t \ge s \ge 0$, $\varphi \in S_{\delta_p}$ и некоторого $\delta_p > 0$ выполняется неравенство $E\{| y(t,s,\varphi)|^p\} \le B_p e^{-\lambda_p (t-s)} ||\varphi||^p$, где $S_{\delta_p} \equiv \{\varphi \in C([-\tau,0]) \,|\, ||\varphi|| < \delta_p\}$, $||\varphi|| \equiv \sup\limits_{-\tau \le t \le 0} |\varphi(t)|$.

Лемма 1. Пусть A, B непрерывны по совокупности аргументов, выполнены (31) и условия Липшица

$$| A(t,\varphi) - a(t,\psi)|^2 + || B(t,\varphi) - B(t,\psi)|| \le$$

$$\le L \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 \, d\theta \;\; \forall \varphi, \psi \in C([-\tau, 0]). \tag{32}$$

Тогда $\forall p > 0$ и $T > 0$ существует константа $M(L, T, p) > 0$ такая, что $\forall s \in \mathbf{R}_+$, $\forall t \in [0, T]$ и $\varphi \in C([-\tau, 0])$ выполняется неравенство

$$E\{|| x_{s+t}(s,\varphi)||^p\} \le M(L, T, p) ||\varphi||^p, \tag{33}$$

где $x(t, s, \varphi)$ — решение задачи (29), (30) с начальными условиями $x(s, s, \varphi) = \varphi$.

Доказательство. Достаточно получить (32) $\forall p = 8m$, $m \in N$, поскольку при $m \in (0, 8m]$ по неравенству Гельдера выполняется неравенство $E\{|| x_{s+t}(s,\varphi)||^p\} \le$ $\le (E\{|| x_{s+t}(s,\varphi)||^{8m}\})^{p/8m}$.

Сделаем замену Ито в СДУсП $z(t) = | y(t)|^{4m}$, $m \in \mathbf{N}$.

Поскольку $\nabla z = 4m | y|^{4m-4}$; $\nabla^2 z = 16m(m-1) | y|^{4m-k} (y \times y) + 4m | y|^{4m-4} I$, где I — единичная матрица, а $y \times y$ — матрица с элементами $y_{jk} = y_j y_k$, имеем

$$| y(t)|^{4m} = |\varphi|^{4m} + \int_0^t [4m | y(\tau)| 4m - 4(y(\tau), A(\tau, y_\tau)) +$$

$$+ 8(m-1)m | y(\tau)|^{4m-8} || B^{\mathrm{T}}(\tau, y_\tau) y(\tau)||^2 +$$

$$+ m | y(\tau)|^{4m-4} 8 p(b(\tau, y_\tau) b^{\mathrm{T}}(\tau, y_\tau))] d\tau +$$

$$+ \int_0^t 4m | y(\tau)|^{4m-4} (b(\tau, y_\tau) y(\tau), dw(\tau)).$$

С учетом данного равенства, свойств стохастического интеграла Ито [6] и (32) получим $\forall t \in [0, T]$, $\forall m \in N$ неравенство

$$E\left\{ \sup_{s-\tau \le \theta \le t+s} | y(\theta)|^{8m} \right\} \le L_1 ||\varphi||^{8m} + L_2 \int_0^t E\left\{ \sup_{s-\tau \le \theta \le \theta_1 + s} | x(\theta_1)|^{8m} \right\} d\theta_1.$$

Для завершения доказательства леммы 1 достаточно применить неравенство Гронуолла и получить неравенство (33). ■

Теорема 2. Если выполняются условия леммы 1, то $\forall p>0$ тривиальное решение СДУсП (29), (30) экспоненциально p-устойчиво в целом тогда и только тогда, когда существует функционал Ляпунова–Красовского $v \in D(L^+)$ такой, что для $k_1>0, k_2>0$ и $k_3>0$ $\forall s \in R_+$ и $\forall \varphi \in C([-\tau,0])$ выполняются неравенства

$$k_1 ||\varphi||^p \le v(s,\varphi) \le k_2 ||\varphi||^p, \tag{34}$$

$$(L^+ v)(s,\varphi) \le -k_3 ||\varphi||^p, \tag{35}$$

где L^+ — слабый инфинитезимальный оператор (аналог производной для обыкновенного дифференциального уравнения).

Доказательство. Достаточность. В условиях теоремы 2 СДУсП регулярное, поэтому $P\{\omega\colon \lim\limits_{r\to\infty} \tau_r(t)=t\}=1$ $\forall t \in \mathbf{R}_+$ и $r>0$, где τ_r — первый момент выхода решения $y(t,s,\varphi)$ из S_r.

С учетом изложенного ранее и (35) неравенство Дынкина для каждого $t \ge s$ примет вид

$$E\{v(t, y_t(s,\varphi))\} \le v(s,\varphi) - k_3 \int_s^t E\{|| y_\theta(s,\varphi)||^p\} d\theta \quad \forall s \in R_+, \ \forall \varphi \in C([-\tau,0]). \tag{36}$$

Формула (36) имеет смысл вследствие существования p-моментов по лемме 1. Поэтому на основании (36) для $t \ge t_1 \ge s \ge 0$ получим неравенство

$$E\{v(t, y_t(s,\varphi))\} \le E\{E\{v(t, y_t(s,\varphi)) | F_{t_1}\}\} \le$$

$$\le E\{v(t_1, y_{t_1}(s,\varphi))\} - k_3 \int_{t_1}^t E\{|| y_\theta(s,\varphi)||^p\} d\theta.$$

Тогда $\forall t \ge s \ge 0$ и $\varphi \in C([-\tau,0])$ полную производную оценим следующим образом:

$$\frac{d}{dt} E\{v(t, y_t(s,\varphi))\} \le -k_3 E\{|| y_t(s,\varphi)||^p\} \le -\frac{k_3}{k_2} E\{v(t, y_t(s,\varphi))\}.$$

Из последнего неравенства можно получить оценку

$$E\{|| y_t(s,\varphi)||^p\} \le \frac{1}{k_1} E\{v(t, y_t(s,\varphi))\} \le \frac{1}{k_1} v(s,\varphi) e^{\frac{k_3}{k_2}(t-s)} \le$$

$$\le \frac{k_2}{k_1} ||\varphi||^p \, e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-s)} \le B_p e^{-\lambda_p (t-s)} ||\varphi||^p,$$

где $B_p \equiv \dfrac{k_2}{k_1}$; $\lambda_p \equiv -\dfrac{k_3}{k_2}$.

Достаточность теоремы 2 доказана. ■

Необходимость. Пусть $y(t,s,\varphi) \equiv 0$ СДУсП экспоненциально p-устойчиво. Тогда докажем существование

$$v_1(s,\varphi) \equiv E\{\sup_{t \ge 0} || y_{t+s}(s,\varphi)||^p\}, \tag{37}$$

если $\forall p>0$, $\forall\varphi\in C([-\tau,0])$ и при некотором $k>0$ выполняется неравенство

$$0\le v_1(s,\varphi)\le k\|\varphi\|^p. \tag{38}$$

Согласно определению 2 экспоненциальной *p*-устойчивости в целом существуют такие положительные константы $M_p>0$ и $\gamma_p>0$, что $\forall t\ge s\ge 0$ и $\varphi\in C([-\tau,0])$ выполняется неравенство $E\{\|y_{t+s}(s,\varphi)\|^p\}\le M_p e^{-\gamma_p t}\|\varphi\|$.

Обозначим

$$v_1^{(m)}(s,\varphi)\equiv E\{\sup_{0\le k\le m}\|y_{k\tau+s}(s,\varphi)\|^p\} \tag{39}$$

для $m\in N$.

Очевидно, что согласно теореме о монотонной сходимости получим для (37)–(39) $v_1(s,\varphi)=\lim\limits_{m\to\infty}v_1^{(m)}(s,\varphi)$, если этот предел конечен. Вследствие монотонности последовательности $\{v_1^{(m)}(\varphi),\ m\in\mathbf{N}\}$ достаточно показать ее равномерную по m ограниченность. Для этого введем $\Delta_k\equiv[((k-1)\tau,k\tau),\ k\in\mathbf{N}\vee\{0\},\tau>0]$.

Определим ω-множество Ω_{km} с помощью соотношений

$$\Omega_{mm}\equiv\{\omega\in\Omega:\max_{-\tau\le t\le m\tau}|y(t+s,s,\varphi)|^p=\|y_{m\tau+1}(s,\varphi)\|^p\};$$

$$\Omega_{km}\equiv\{\omega\in\Omega:\max_{-\tau\le t\le m\tau}|x(t+s,\varphi,\varphi)|^p=\max_{t\in\Delta_k}|y(t+s,s,\varphi)|^p\}\cap\sum_{j=k+1}^{m}\overline{\Omega}_{jm},$$

если $k=\overline{0,m}$, $m\in\mathbf{N}$. Понятно, что $\forall m\in N$, $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{m}\Omega_{km}$ и $\Omega_{km}\cap\Omega_{jm}=\varnothing$ для $k\ne j$.

Из равенства $\max\limits_{t\in\Delta_k}|\chi(t+s,s,\varphi)|^p=\|\chi_{k\tau+s}(s,\varphi)\|^p$ следует

$$v_1^{(m)}(s,\varphi)=\sum_{k=0}^{m}\int_{\Omega_{km}}\max_{-\tau\le t\le m\tau}|y(t+s,s,\varphi)|^p\,dP=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\int_{\Omega_{km}}\|y_{k\tau+s}\|^p\,dP\le M_p\|\varphi\|^p\sum_{k=0}^{m}e^{-\gamma_p k\tau}\le k_p\|\varphi\|^p\quad\forall m\in N,\ \forall\varphi\in C([-\tau,0]),$$

где $k_p\equiv\dfrac{M_p}{1-e^{\gamma_p\tau}}$. Отсюда следует (34).

Далее докажем, что $v_1\in D(L^+)$. Вследствие единственности решения задачи (29), (30) с точностью до стохастической эквивалентности $\forall\theta\ge0$ можно записать $v_1(s,\varphi)=E\{\sup\limits_{t\ge0}\|X_s^{t+s}\varphi\|^p\}\ge E\{\sup\limits_{t\ge\theta}\|X_s^{t+s}\|^p\}=E\{\sup\limits_{t\ge0}\|X_{\theta+s}^{\theta+t+s}X_s^{\theta+s}\varphi\|^p\}$, где $X_s^t\equiv x(t,s,\varphi)$.

Легко видеть, что

$$E\{\sup_{t\ge0}\|X_{\theta+s}^{\theta+t+s}\varphi\|^p\}=E\{E\{\sup_{t\ge0}\|X_{\theta+s}^{\theta+t+s}X_s^{\theta+s}\varphi\|^p\,|\,F_{\theta+s}\}\}=$$

$$=E\{E\{\sup_{t\ge0}\|X_{\theta+s}^{\theta+t+s}z\|^p\,|\,z=X_s^{\theta+s}\varphi\}\}=E\{v_1(\theta+s,\,y_{\theta+s}(s,\varphi))\}.$$

Поскольку $\sup_{t \geq 0} || X_{\theta+s}^{\theta+t+s} \varphi ||^p$ является $F_{\theta+s}^{\infty}(dw)$-измеримой случайной величиной и для $\varphi \in C([-\tau, 0])$ не зависит от $F_{\theta+s}$, то $\forall \theta > 0$, $s \in R_+$, $\forall \varphi \in C([-\tau, 0])$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\theta} [E\{v_1(\theta+s, y_{\theta+s}(s,\varphi))\} - v_1(s,\varphi)] \leq 0,$$

т.е. $v_1 \in D(L^+)$, при этом $(L^+ v)(s,\varphi) \leq 0$. По определению $v_1(s,\varphi) \geq$ $\geq v_1^{(0)}(s,\varphi) = ||\varphi||^p$.

Далее, из экспоненциальной p-устойчивости в целом следует неравенство

$$0 \leq v_2(s,\varphi) \equiv \int_0^{\infty} E\{|| y_{t+s}(s,\varphi)||^p\} dt \leq \frac{M_p}{\gamma_p} ||\varphi||^p.$$

Тогда $\forall \theta \geq 0$ можно записать

$$E\{v_2(\theta+s, y_{\theta+s}(s,\varphi))\} = \int_0^{\infty} E\{|| x_{t+\theta+s}(\theta+s, y_{\theta+s}(s,\varphi))||^p\} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} E\{|| y_{t+s}(s,\varphi)||^p\} dt \leq v_2(s,\varphi).$$

Поэтому $v_2 \in D(L) \subseteq D(L^+)$, при этом $(L^+ v_2)(s,\varphi) = (Lv_2)(s,\varphi) = -||\varphi||^2$. Отметим, что функционал $v = v_1 + v_2$ находится в области определения $D(L^+)$ и $\forall s \in R_+$ выполняются неравенства

$$||\varphi||^p \leq v(s,\varphi) \leq (k_p + \frac{M_p}{\gamma_p}) ||\varphi||^p;$$

$$(L^+ v)(s,\varphi) \geq -||\varphi||^p.$$

Теорема 2 доказана. ■

СЛУЧАЙ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНТУРА АДАПТАЦИИ, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРОВ

На практике имеются объекты, в которых матрицы коэффициентов $\{A_k,\ k = \overline{1, N}\}$ в СДУ для вектора координатного рассогласования (14) зависят от конечного числа параметров. Для таких объектов с учетом случайных возмущений контур самонастройки можно существенно упростить по сравнению с контуром, описанным СДУ (27), (28).

Изложим суть этого упрощения.

Пусть объект описывается СДРУ

$$d\vec{x}(t) = [A_0(q)\vec{x}(t) + A_1(q)\vec{x}(t-\Delta)]dt + \delta\vec{z}(t) + \vec{f}(t,\omega),\ \ x \in R^n, \tag{40}$$

где $\vec{f}(t,\omega)$ определяется диффузионными случайными возмущениями (3).

Эталонная модель описывается СДРУ

$$d\vec{y}(t) = [A_0(q^0)\vec{y}(t) + A_1(q^0)\vec{y}(t-\Delta)]dt + \vec{f}(t,\omega), \tag{41}$$

где $\vec{f}(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^n$; $y(t)\equiv y(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^n$. Здесь $\vec{q}\equiv(q_1, q_2, \ldots$ $\ldots, q_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ — вектор параметров, от которых зависит матрица исследуемого объекта; A_0, A_1 — гурвицевы матрицы; $\delta\vec{z}(t)$ — вектор контура самонастройки.

Задача состоит в определении структуры и алгоритма изменения вектора $\delta\vec{z}(t)$ с учетом (40), (41), при котором $\vec{\varepsilon}(t)\equiv\vec{\varepsilon}(t,\omega)\equiv\vec{x}(t)-\vec{y}(t)$ стремится к нулю в среднем квадратичном.

Вектор фазовой ошибки $\vec{\varepsilon}(t)$ удовлетворяет СДУ

$$\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt}=[A_0(q^0)+A_1(q^0)]\vec{\varepsilon}(t)+[A_0(q)-A_0(q^0)+$$

$$+A_1(q)-A_1(q^0)]\vec{x}(t)+\delta\vec{z}(t). \qquad (42)$$

Разложим $A_0(\vec{q})$, $A_1(\vec{q})$ в ряд в окрестности $\vec{q}^{\,0}$:

$$A_j(\vec{q})-A_j(\vec{q}^{\,0})=\sum_{i=1}^{m}\Delta\vec{q}_i\left.\frac{\partial A_j(\vec{q})}{\partial q_i}\right|_{\vec{q}=\vec{q}^{\,0}}+o(|\Delta\vec{q}|), \qquad (43)$$

где $\vec{q}-\vec{q}^{\,0}\equiv\Delta\vec{q}$; $\Delta\vec{q}\in R^m$; $j=0,1$.

Руководствуясь изложенными ранее правилами, вводим в рассмотрение вектор $\delta\vec{z}(t)$:

$$\delta\vec{z}(t)=\sum_{i=1}^{m}\delta q_i(t)B_i(t);\ B_i(t)\equiv\left.\frac{\partial A_j(\vec{q})}{\partial q_i}\right|_{\vec{q}=\vec{q}^{\,0}}\vec{x}(t). \qquad (44)$$

Здесь $\delta q_i(t)$ — скалярные функции, алгоритмы их изменения определим далее.

Если учесть (43), (44) для СДУ (42), то его можно записать в виде

$$\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt}=A_0(\vec{q}^{\,0})\vec{\varepsilon}(t)+A_1(\vec{q}^{\,0})\vec{\varepsilon}(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}(\Delta q_i+\delta q_i)\left[\frac{\partial A_0}{\partial q_i}\vec{x}(t)+\frac{\partial A_1}{\partial q_i}\vec{x}(t-\Delta)\right]+o(|\Delta\vec{q}|)[\vec{x}(t)+\vec{x}(t-\Delta)]. \qquad (45)$$

Предположим, что матрицы $A_j(\vec{q})$ линейно зависят от $\vec{q}$. Тогда последних членов в (45), очевидно, не будет и (45) примет вид

$$\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt}=[A_0(\vec{q}^{\,0})+A_1(\vec{q}^{\,0})]\vec{\varepsilon}(t)+\sum_{i=1}^{m}\beta_i(t)\left[\frac{\partial A_0(\vec{q})}{\partial q_i}\vec{x}(t)+\frac{\partial A_1(\vec{q})}{\partial q_i}\vec{x}(t-\Delta)\right], \qquad (46)$$

где $\beta_i(t)\equiv\Delta q_i+\delta q_i(t)$.

Дальнейший синтез контура самонастройки можно провести методом функционалов Ляпунова–Красовского [1, 6–15]. Для этого следует выбрать стохастический функционал вида

$$v(\varepsilon,\beta,t)=\varepsilon^{\mathrm{T}}H(t,\vec{x},\vec{y})\vec{\varepsilon}+\sum_{i=1}^{m}\beta_i(t)+\int_{-\Delta}^{0}\gamma\vec{\varepsilon}^{\,\mathrm{T}}(t+\theta)H\vec{\varepsilon}(t+\theta)d\theta, \qquad (47)$$

где $H>0_{n\times n}$, $H^{\mathrm{T}}=H$.

Найдем слабый инфинитезимальный оператор (математическое ожидание от полной производной) в силу (46)

$$Lv(\varepsilon\beta,t)=\varepsilon^{\mathrm{T}}\left[(A_0^{\mathrm{T}}(\vec{q}^{\,0})+A_1^{\mathrm{T}}(\vec{q}^{\,0}))H+H(A_0(\vec{q}^{\,0})+A_1(\vec{q}^{\,0}))+\frac{dH}{dt}\right]\vec{\varepsilon}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\beta_i(t)\left[B_i^{\mathrm{T}}H\varepsilon+\varepsilon^{\mathrm{T}}HB_i+2\frac{d\beta_i(t)}{dt}\right]+\gamma[\vec{\varepsilon}^{\,\mathrm{T}}(t)H\vec{\varepsilon}(t)+\vec{\varepsilon}(t-\Delta)H\vec{\varepsilon}(t-\Delta)]. \qquad (48)$$

В силу симметричности матрицы H имеет место равенство $B_i^{\mathrm{T}} H\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{T}} HB_i$. Тогда в качестве алгоритма настройки параметров $\delta q_i(t)$ следует, например, выбрать систему СДУ

$$\frac{d}{dt}\delta q_i(t) = \frac{d\beta_i(t)}{dt} = -B_i^{\mathrm{T}} H\varepsilon = -\vec{x}^{\mathrm{T}}(t)\left[\left(\frac{\partial A_0}{\partial q_i}\right)^{\mathrm{T}} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial q_i}\right)^{\mathrm{T}}\right] H\vec{\varepsilon};$$

$$\beta_i(0) = \Delta q_i; \; \delta q_i(0) = 0. \tag{49}$$

Пусть матрица $H(t, \vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяет условиям (34), (35) теоремы 2 (или условиям теоремы 1), в которых $A \equiv A_0(\vec{q}^{\,0}) + A_1(\vec{q}^{\,0})$ линейно зависит от параметров и является гурвицевой.

Тогда аналогично теореме 2 можно доказать, что СНС (46), (49) с учетом (47), (48) устойчива в l.i.m. по $\vec{\varepsilon}(t)$ и $\beta_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, а также экспоненциально устойчива по фазовой ошибке $\vec{\varepsilon}(t)$.

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим объект, который описывается СДРУ с диффузионными возмущениями

$$dx(t) = -(a + \Delta a + \delta a(t))x(t) +$$

$$+(b + \Delta b + \delta b(t))x(t - h + \Delta h + \delta h(t)) + f(t, \omega), \; t > t_0, \tag{50}$$

где

$$f(t, \omega) = b_1 x(t) dw_1(t, \omega) + b_2 x(t - h) dw_2(t, \omega),$$

$w_1(t, \omega)$ и $w_2(t, \omega)$ — независимые винеровские процессы; Δa, Δb, Δh — постоянные, априори неизвестные числа из области $|\Delta a| \le A_0$; $|\Delta b| \le B_0$; $|\Delta h| \le H_0 < h$; $\delta a(t)$, $\delta b(t)$, $\delta h(t)$ — неслучайные параметры, которые изменяются контуром самонастройки; $f(t)$ — управляющее воздействие; $|f(t)| \le F_0$.

Наряду с системой (50) рассмотрим эталонную модель как СДРУ

$$dy(t) = -ay(t) + by(t - h) + f(t), \; t > t_0. \tag{51}$$

Начальные условия для простоты можно считать нулевыми $x(t) = y(t) = \varepsilon(t) = 0$, $t_0 - h \le t \le t_0$.

Пусть $a > |b| - \dfrac{b_1^2}{2} - \dfrac{b_2^2}{2}$, тогда тривиальное решение (51) асимптотически устойчиво в l.i.m. равномерно по начальным условиям (теорема 1).

Обозначим $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ фазовое рассогласование СДРУ (50), (51).

Предположим для простоты, что запаздывания в объекте и эталонной модели равны, т.е. $\Delta h + \delta h(t) \equiv \theta$. Тогда уравнение для $\varepsilon(t)$ примет вид

$$d\varepsilon(t) = -a\varepsilon(t) + b\varepsilon(t - h) + \alpha(t)x(t) + \beta(t)x(t - h) \;\; \forall\, t > t_0, \tag{52}$$

где $\alpha(t) \equiv \Delta a + \delta a(t)$; $\beta(t) = \Delta b + \delta b(t)$.

Синтез контуров настройки параметров $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ следует осуществлять с помощью второго метода Ляпунова, выбрав в качестве функционала Ляпунова–Красовского следующее выражение:

$$v(\varepsilon, \alpha, \beta, t) \equiv \gamma(t)\varepsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \left(a\gamma(t) - \frac{1}{2}\frac{d\gamma(t)}{dt}\right)\int\limits_{t-h}^{t} \varepsilon^2(s) ds. \tag{53}$$

Если алгоритм настройки параметров α и β выбрать в виде [1]

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta a(t)) = -\gamma(t)\, x(t)\, \varepsilon(t); \; \alpha(t_0) = \Delta a, \tag{54}$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\delta b(t)) = -\gamma(t)x(t-h)\varepsilon(t);\ \ \beta(t_0) = \Delta b, \tag{55}$$

то инфинитезимальный оператор в силу (52)–(55) будет равен

$$Lv = (\dot{\gamma} - 2a\gamma)\varepsilon^2(t) + 2\gamma b\varepsilon(t)\varepsilon(t-h) +$$

$$+\left(a\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}\right)\varepsilon^2(t) - \left(a\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}\right)\varepsilon^2(t-h) + \left(a\dot{\gamma} - \frac{1}{2}\ddot{\gamma}\right)\int_{t-h}^{t}\varepsilon^2(s)ds\ .$$

При некотором выборе функции $\gamma(t)$, а следовательно, первой $\dot{\gamma}(t)$ и второй $\ddot{\gamma}(t)$ производной, $Lv \leq 0$. Тогда тривиальное решение системы (52)–(55) экспоненциально устойчиво в целом в силу теоремы 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована устойчивость самонастраивающихся стохастических систем автоматического регулирования с последействием. Проведен синтез контура самонастройки с помощью второго метода Ляпунова и доказана экспоненциальная *p*-устойчивость в целом стохастических дифференциальных уравнений с последействием.

Полученные результаты можно использовать при построении систем автоматического регулирования для объектов с последействием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981. — 448 с.
2. Луцкив Н.М. Системы с компенсацией влияния запаздывания и разделительным устройством // Изв. вузов. Электромеханика. — 1976. — № 9.— С. 1003–1007.
3. Смит Дж.М. Автоматическое регулирование.— М.: Физматгиз, 1962. — 847 с.
4. А.с. 634235 СССР. Самонастраивающаяся система для регулирования объектов с запаздыванием // К.А. Пупков, В.Р. Носов, В.Б. Колмановский. — Опубл. 23.06.1977.
5. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. — К.: Наук. думка, 1989. — 208 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. — К.: Наук. думка, 1980. — 612 с.
7. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. — М.: Наука, 1992. — 336 с.
8. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. — Рига: Ориентир, 1990. — 312 с.
9. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. — Снятин: Над Прутом, 1996. — 448 с.
10. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. — К.: ТВіМС, 2005. — 580 с.
11. Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Методи стохастичного моделювання систем.— Чернівці: Вид-во: Прут, 2002. — 416 с.
12. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика і випадкові процеси. В 3-х томах.— Т. 3. Випадкові процеси. Теорія і статистичне комп'ютерне моделювання. — Чернівці: Золоті литаври, 2009. — 782 с.
13. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Асимптотика розв'язків у випадкових системах з необмеженою післядією. — Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2014. — 266 с.
14. Ясинський В.К. Сучасна теорія випадкових процесів. — Чернівці: Видавничий дім «Родовід», 2014. — 292 с.
15. Никитин А.В., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Устойчивость самонастраивающихся стохастических систем автоматического регулирования с последействием. Часть 1. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — № 1. — С. 90–104.
16. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. — М.: Наука, 1984. — 192 с.

Поступила 22.12.2014