УДК 519.6

П.И. СТЕЦЮК

ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ ДЛЯ КРАТЧАЙШЕГО *k*-ВЕРШИННОГО ПУТИ И КРАТЧАЙШЕГО *k*-ВЕРШИННОГО ЦИКЛА В ПОЛНОМ ГРАФЕ[1]

Аннотация. Сформулированы задачи смешанного булевого линейного программирования для нахождения кратчайшего пути и кратчайшего цикла, которые проходят через заданное количество вершин полного графа. В частном случае из них следуют формулировки задач для нахождения кратчайшего гамильтонового пути и кратчайшего гамильтонового цикла. Задачи содержат не более чем $2n^2$ переменных и не более чем $(n+1)^2$ ограничений, где n — количество вершин полного графа.

Ключевые слова: полный граф, кратчайший путь, задача линейного программирования, гамильтонов путь, гамильтонов цикл, задача коммивояжера.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D_{n,n}$ — полный граф, где n — количество вершин, $d_{ij} > 0$ — расстояние между вершинами i и j такими, что $i \neq j$. В графе зафиксируем две вершины: s (sender) и r (receiver). Назовем k-вершинным путем в графе $D_{n,n}$ путь от вершины s к вершине r, который проходит через k вершин графа, где $1 \leq k \leq n-2$ (вершины s и r не учитываются). Если $k = n-2$, то этот путь совпадает с гамильтоновым путем (проходит через все вершины графа). Если вершина s и вершина r совпадают, то k-вершинный путь переходит в k-вершинный цикл, где $1 \leq k \leq n-1$. Если $k = n-1$, то этот цикл совпадает с гамильтоновым циклом (проходит через все вершины графа).

В данной работе сформулированы оптимизационные задачи для нахождения кратчайшего k-вершинного пути и кратчайшего k-вершинного цикла. Показано, что их частный случай дает формулировки задач для кратчайшего гамильтонового пути и кратчайшего гамильтонового цикла. Поскольку нахождение кратчайшего гамильтонового цикла равносильно решению задачи коммивояжера [1], из предложенной формулировки вытекает одна из известных формулировок для задачи коммивояжера [2].

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ КРАТЧАЙШЕГО *k*-ВЕРШИННОГО ПУТИ

Пусть x_{ij} — булева переменная, равная единице, если в путь входит дуга, которая начинается в вершине i и заканчивается в вершине j, и равная нулю в противоположном случае. Количество таких переменных равно $(n-1)(n-2)$, учитывая, что для вершины s отсутствуют входные дуги, а для вершины r — выходные. Пусть y_i — булева переменная, равная единице, если путь проходит через вершину i, и равная нулю в противоположном случае. Количество таких переменных равно $(n-2)$, учитывая, что вершины s и r зафиксированы. Пусть неотрицательная переменная z_{ij} задает величину потока некоторого продукта от вершины i к вершине j. Этих переменных ровно столько, сколько и булевых переменных x_{ij}.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Украины (проекты № 0113U003146, № 0112U002251).

Нахождению кратчайшего k-вершинного пути в графе $D_{n,n}$ соответствует следующая задача: найти

$$d_k^* = \min_{x_{ij}} \left\{ \sum_{j=1, j\neq s}^{n} d_{sj} x_{sj} + \sum_{j=1, j\neq r}^{n} d_{jr} x_{jr} + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \sum_{j=1, j\neq r, i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} x_{sj} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq r}^{n} x_{jr} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = y_i, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq s, r, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1, i\neq s, r}^{n} y_i = k, \qquad (3)$$

$$z_{ij} - k x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j, i \neq r, j \neq s, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{sj} = k, \quad \sum_{j=1, j\neq r}^{n} z_{jr} = 0, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -y_i, \quad i = 1, \ldots, n, i \neq s, r, \qquad (5)$$

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, \ldots, n, i \neq r, s, \quad x_{ij} = 0 \vee 1, \; z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j, i \neq r, j \neq s. \qquad (6)$$

Задача (1)–(6) является задачей смешанного булевого линейного программирования. Она содержит $2n^2 - 5n + 2$ переменных, из которых $n^2 - 2n$ — булевы переменные, а $(n-1)(n-2)$ — неотрицательные линейные переменные, и $n^2 + n - 1$ ограничений, из которых $3n - 1$ — линейные равенства, а $n(n-2)$ — линейные неравенства.

Теорема 1. Ограничения (2)–(6) описывают все возможные пути из s в r, которые проходят через k вершин графа $D_{n,n}$.

Доказательство. Ограничение (3) задает ровно k вершин графа $D_{n,n}$, через которые должен проходить путь из вершины s в вершину r. Этим вершинам соответствуют $y_i = 1$. Для k вершин, для которых $y_i = 1$, ограничения (2) описывают однократный вход в вершину и однократный выход из нее. Они также описывают однократный выход из вершины s и однократный вход в вершину r.

Набор ограничений (4) и (5) обеспечивает связность k-вершинного пути. Ограничения (4) гарантируют перевозку продукта между вершинами i и j только тогда, когда $x_{ij} = 1$. Ограничения (5) означают, что из вершины s нужно развезти k единиц продукта, оставляя в каждой из тех вершин, через которые проходит k-вершинный путь, ровно единицу продукта. Доказательство завершено.

Минимизация целевой функции в (1) отвечает нахождению кратчайшего (минимального по расстоянию) пути из вершины s к вершине r, который проходит через k вершин графа $D_{n,n}$. При этом d_k^* соответствует длине кратчайшего пути. Но такой путь может быть неединственным. Если это так, то решение задачи (1)–(6) обеспечивает только один из возможных кратчайших k-вершинных путей.

Поскольку ограничения (2)–(6) описывают все множество допустимых k-вершинных путей, то, заменив в (1) целевую функцию другой линейной функцией, можно найти наилучший по выбранному критерию k-вершинный путь. Так, например, максимальному (по расстоянию) k-вершинному пути соответствует следующая задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$D_k^* = \max_{x_{ij}} \left\{ \sum_{j=1, j\neq s}^{n} d_{sj} x_{sj} + \sum_{j=1, j\neq r}^{n} d_{jr} x_{jr} + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \sum_{j=1, j\neq r, i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \qquad (7)$$

при ограничениях (2)–(6).

Свойства задачи (7) идентичны свойствам задачи (1)–(6).

Если $k = n-2$, то булевы переменные в ограничении (3) определяются однозначно и равны единице. Это означает, что $(n-2)$-вершинный путь проходит через все вершины графа и совпадает с гамильтоновым путем из s в r. Нахождению кратчайшего гамильтонового пути соответствует такая задача: найти

$$d_k^* = \min_{x_{ij}} \left\{ \sum_{j=1, j\neq s}^{n} d_{sj} x_{sj} + \sum_{j=1, j\neq r}^{n} d_{jr} x_{jr} + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \sum_{j=1, j\neq r, i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \qquad (8)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \ldots, n, \ i \neq r, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \ i = 1, \ldots, n, \ i \neq s, \qquad (9)$$

$$z_{ij} - (n-2) x_{ij} \leq 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \ i \neq r, \ j \neq s, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{sj} = n-2, \quad \sum_{j=1, j\neq r}^{n} z_{jr} = 0, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -1, \ i = 1, \ldots, n, \ i \neq s, r, \qquad (11)$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \ z_{ij} \geq 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \ i \neq r, \ j \neq s. \qquad (12)$$

Из теоремы 1 получаем следствие.

Следствие 1. Ограничения (9)–(12) описывают все возможные гамильтоновы пути из s в r в графе $D_{n,n}$.

Нахождению максимального гамильтонового пути соответствует задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$D_k^* = \max_{x_{ij}} \left\{ \sum_{j=1, j\neq s}^{n} d_{sj} x_{sj} + \sum_{j=1, j\neq r}^{n} d_{jr} x_{jr} + \sum_{i=1, i\neq s}^{n} \sum_{j=1, j\neq r, i}^{n} d_{ij} x_{ij} \right\} \qquad (13)$$

при ограничениях (9)–(12).

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ КРАТЧАЙШЕГО k-ВЕРШИННОГО ЦИКЛА

В этом случае переменные такие же, как и ранее, изменяется лишь их количество, поскольку используются все дуги графа $D_{n,n}$, а также все его вершины, за исключением той, в которой цикл начинается и завершается. Ввиду того, что вершины s и r совпадают, количество булевых переменных x_{ij} увеличится и будет равно $n(n-1)$. Таким же будет и количество неотрицательных линейных переменных z_{ij}. Поскольку k имеет верхнюю границу больше, т.е. $1 \leq k \leq n-1$, число булевых переменных y_i увеличится на единицу и будет равным $(n-1)$.

Нахождению кратчайшего k-вершинного цикла в графе $D_{n,n}$, где $1 \leq k \leq n-1$, соответствует следующая задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$d_k^* = \min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \qquad (14)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} x_{sj} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq s}^{n} x_{js} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = y_i, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = y_i, \ i = 1, \ldots, n, \ i \neq s, \qquad (15)$$

$$\sum_{i=1, i\neq s}^{n} y_i = k, \qquad (16)$$

$$z_{ij} - k x_{ij} \leq 0, \ i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{sj} = k, \quad \sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{js} = 0, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -y_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq s, \qquad (18)$$

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq s, \quad x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j. \qquad (19)$$

Задача (14)–(19) содержит $2n^2 - n - 1$ переменных, из которых $n^2 - 1$ — булевы переменные, а $n(n-1)$ — неотрицательные линейные переменные, и $n^2 + 2n + 1$ ограничений, из которых $3n + 1$ — линейные равенства, а $n(n-1)$ — линейные неравенства.

Теорема 2. Ограничения (15)–(19) описывают все возможные циклы из вершины s, которые проходят через k вершин графа $D_{n,n}$.

Доказательство. Ограничение (16) задает ровно k вершин графа $D_{n,n}$, через которые проходит цикл из вершины s. Этим вершинам соответствуют $y_i = 1$. Для k вершин, для которых $y_i = 1$, и для вершины s ограничения (15) описывают однократный вход в вершину и однократный выход из вершины.

Набор ограничений (17) и (18) гарантирует связность k-вершинного цикла. Ограничения (17) обеспечивают перевозку продукта между вершинами i и j только тогда, когда $x_{ij} = 1$. Ограничения (18) означают, что из вершины s нужно развезти k единиц продукта, оставляя в каждой вершине цикла ровно единицу продукта. Доказательство завершено.

Нахождению максимального по расстоянию k-вершинного цикла соответствует задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$D_k^* = \max_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij} \qquad (20)$$

при ограничениях (15)–(19).

Если $k = n - 1$, то получаем задачу для нахождения кратчайшего гамильтонового цикла, равносильную задаче коммивояжера. Нахождению минимального по расстоянию гамильтонового цикла соответствует задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$d^* = \max_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij}, \qquad (21)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ji} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (22)$$

$$z_{ij} - (n-1) x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j, \qquad (23)$$

$$\sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{sj} = n - 1, \quad \sum_{j=1, j\neq s}^{n} z_{js} = 0, \quad \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ij} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_{ji} = -1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq s, \qquad (24)$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \; z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j. \qquad (25)$$

Задача (21)–(25) совпадает с формулировкой задачи коммивояжера [2, с. 46], основанной на идее моделирования задачи о потоке во избежание подциклов в задаче коммивояжера. Из теоремы 2 получаем такое же следствие, как и в [2].

Следствие 2. Ограничения (22)–(25) описывают все возможные гамильтоновы циклы полного графа $D_{n,n}$.

Если в задаче (21)–(25) целевую функцию заменить другой линейной функцией, то можно найти наилучший по выбранному критерию гамильтонов цикл. Так, например, нахождению максимального гамильтонового пути соответствует задача смешанного булевого линейного программирования: найти

$$D^* = \max_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\, j \neq i}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях (22)–(25).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для нахождения кратчайшего k-вершинного пути и кратчайшего k-вершинного цикла в работе сформулированы задачи смешанного булевого линейного программирования. Их частные случаи дают формулировки задач для нахождения кратчайшего гамильтонового пути и кратчайшего гамильтонового цикла. Данные задачи содержат не более чем $2n^2$ переменных и не более чем $(n+1)^2$ ограничений, где n — количество вершин полного графа.

Задача нахождения кратчайшего k-вершинного пути (цикла) сложнее, чем задача нахождения кратчайшего гамильтонового пути (цикла), так как в ней требуется определить подмножества вершин, для которых будет находиться гамильтонов путь или гамильтонов цикл. Это подтверждают вычислительные эксперименты. Так, например, для графа kroA100.tsp со 100 вершинами задача (21)–(25) была решена за 100 с с помощью программы gurobi 5.5.0 [3], а задача (14)–(19) для нахождения кратчайшего 50-вершинного цикла в этом же графе — за 700 с. Расчеты проводились на NEOS-сервере (http://www.neos-server.org). При этом программа gurobi нашла другое решение задачи коммивояжера для графа kroA100.tsp, чем приведенное в библиотеке TSPLIB.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. — 432 с.
2. Алексеева Е.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: Учеб. пособие. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2012. — 131 с.
3. Gurobi Optimization, Inc., Gurobi Optimizer Reference Manual, 2014. — http://www.gurobi.com.

Поступила 13.08.2015