УДК 519.217

О.А. ЯРОВА, Я.И. ЕЛЕЙКО

О ПОВЕДЕНИИ НОРМИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ГЕНЕРАТОРА В АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. Исследуются марковские случайные эволюции и их аппроксимации. Основным объектом исследования являются генераторы случайных процессов с независимыми приращениями. Данные процессы рассматриваются в схемах пуассоновской аппроксимации и аппроксимации Леви. Генераторы случайных процессов нормируются параметрами, которые являются нелинейными функциями. Показан явный вид таких параметров нормирования. Дано асимптотическое представление генераторов в схемах обеих аппроксимаций. Представлены нормирующие множители случайных эволюций.

Ключевые слова: генератор, аппроксимация, марковский процесс, независимые приращения, ядро интенсивности, случайное блуждание.

Исследованиям марковских случайных эволюций и их аппроксимациям посвящено большое количество научных публикаций, среди которых можно выделить работы [1–5]. В частности, в [5] исследуются процессы с независимыми приращениями в схемах пуассоновской аппроксимации и аппроксимации Леви. В таких процессах отсутствует диффузная составляющая, а между скачками наблюдается марковский процесс. В аппроксимации Пуассона и Леви генератор процесса нормируется линейным множителем [1, 2]. Однако в некоторых случаях такое нормирование не является целесообразным. Поэтому возникает необходимость рассматривать нормирующий множитель как нелинейную функцию. Основная цель работы заключается именно в нахождении таких параметров в изображении генератора случайного процесса с независимыми приращениями.

Рассмотрим семью марковских процессов с независимыми приращениями и траекториями в области определения $D_R[0;\infty)$, которые нормируются множителем $g_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\eta_1^{\varepsilon}(t) = \eta\left(\frac{t}{g_1(\varepsilon)}\right),\ t \ge 0,$$

где $\eta(t)$ — процесс с независимыми приращениями, определяемыми генератором

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv).$$

Функция $\varphi(u)$ является действительнозначной, дважды дифференцированной в R^d, равной нулю на бесконечности и sup-нормой

$$\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|;$$

$\varphi(u)$ принадлежит классу дважды непрерывно дифференцируемых функций в евклидовом пространстве $C_0^2(R^d)$, $u \in R^d$. Ядро интенсивности $\Gamma^{\varepsilon}(dv)$ принадлежит классу $C_0^3(R)$ и удовлетворяет условию $\Gamma^{\varepsilon}(\{0\}) = 0$.

Пусть выполняются условия пуассоновской аппроксимации.

P1. Аппроксимация средних имеет вид

$$b_\varepsilon = \int_R v \Gamma^\varepsilon (dv) = g_1(\varepsilon)(b + \Theta_b^\varepsilon),$$

$$c_\varepsilon = \int_R v^2 \Gamma^\varepsilon (dv) = g_1(\varepsilon)(c + \Theta_c^\varepsilon),$$

где $b < \infty$, $c < \infty$, $|\Theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\Theta_c^\varepsilon| \to 0$, $g_1(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

P2. Ядро интенсивностей имеет асимптотическое представление

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int_R g(v) \Gamma^\varepsilon (dv) = g_1(\varepsilon)(\Gamma_g + \Theta_g^\varepsilon)$$

для всех $g \in C^3(R)$.

Ядро $\Gamma^{(0)}(dv)$ задано на классе функций и определяет меру $C^3(R)$ соотношением

$$\Gamma_g = \int_R g(v) \Gamma^{(0)}(dv)$$

для всех $g \in C^3(R)$.

Слагаемые Θ_b^ε, Θ_c^ε, Θ_g^ε удовлетворяют условию $|\Theta^\varepsilon| \to 0$, $g_1(\varepsilon) \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

P3. В предельном генераторе отсутствует диффузная составляющая, т.е. выполняется условие

$$c = \int_R v^2 \Gamma^{(0)}(dv) = 0.$$

Лемма 1. Генератор процесса с независимыми приращениями

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon (dv)$$

в схеме пуассоновской аппроксимации имеет следующее асимптотическое представление:

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = b\varphi'(u) + \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u)] \Gamma^{(0)}(dv) + \Theta^\varepsilon \varphi,$$

$$|\Theta^\varepsilon| \to 0, \; g_1(\varepsilon) \to 0, \text{ если } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим генератор процесса

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon (dv) =$$

$$= (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u) - v\varphi'(u) - \frac{v^2}{2} \varphi''(u)] \Gamma^\varepsilon (dv) +$$

$$+ (g_1(\varepsilon))^{-1} \int_R v\varphi'(u) \Gamma^\varepsilon (dv) + \frac{(g_1(\varepsilon))^{-1}}{2} \int_R v^2 \varphi'(u) \Gamma^\varepsilon (dv).$$

Функция $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ принадлежит классу $C^3(R)$. Кроме того, она непрерывна и ограничена для $\varphi(u)\in C_0^2(R)$ при условии P1.

Из условий P1 и P2 имеем

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=\int_R[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\Gamma^{(0)}(dv)+$$

$$+b\varphi'(u)+\frac{c}{2}\varphi''(u)+\Theta_b^\varepsilon+\Theta_c^\varepsilon+\Theta_\psi^\varepsilon.$$

Применяя условие P3, получаем следующее асимптотическое представление:

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=b\varphi'(u)+\int_R[\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\Gamma^{(0)}(dv)+\Theta^\varepsilon\varphi.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим пример семейства случайных величин $\alpha,^\varepsilon$ которое удовлетворяет условию пуассоновской аппроксимации:

$$P\{\alpha^\varepsilon=b\}=g_2(\varepsilon)p,\qquad P\{\alpha^\varepsilon=g_1(\varepsilon)\alpha_1+g_2(\varepsilon)b_1\}=1-g_2(\varepsilon)p.$$

Найдем первый и второй моменты случайной величины:

$$E\alpha^\varepsilon=g_2(\varepsilon)pb+g_1(\varepsilon)\alpha_1+g_2(\varepsilon)b_1-g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)p\alpha_1-g_2^2(\varepsilon)b_1p,$$

$$E(\alpha^\varepsilon)^2=g_2(\varepsilon)pb^2+g_1^2(\varepsilon)\alpha_1^2+2g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)\alpha_1b_1+g_2^2(\varepsilon)b_1^2-g_1^2(\varepsilon)\alpha_1^2g_2(\varepsilon)p-$$
$$-2g_1(\varepsilon)g_2^2(\varepsilon)pb_1-g_2^3(\varepsilon)pb_1.$$

Определим $g_1(\varepsilon)$ из данных соотношений

$$g_2(\varepsilon)pb^2+g_1^2(\varepsilon)\alpha_1^2+2g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)\alpha_1b_1+g_2^2(\varepsilon)b_1^2-g_1^2(\varepsilon)\alpha_1^2g_2(\varepsilon)p-$$
$$-2g_1(\varepsilon)g_2^2(\varepsilon)pb_1-g_2^3(\varepsilon)pb_1=$$
$$=(g_2(\varepsilon)pb+g_1(\varepsilon)\alpha_1+g_2(\varepsilon)b_1-g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)p\alpha_1-g_2^2(\varepsilon)b_1p)\times$$
$$\times(g_2(\varepsilon)pb+g_1(\varepsilon)\alpha_1+g_2(\varepsilon)b_1-g_1(\varepsilon)g_2(\varepsilon)p\alpha_1-g_2^2(\varepsilon)b_1p+1).$$

Таким образом,

$$g_1(\varepsilon)=\frac{g_2^2(\varepsilon)(pb+b_1-b_1p-b_1^2-p\alpha_1^2)+g_2(\varepsilon)(pb+b_1-pb^2)}{g_2^2(\varepsilon)(2b_1\alpha_1+\alpha_1p-2\alpha_1pb)+g_2(\varepsilon)(2b_1\alpha_1-2b_1\alpha_1p-2\alpha_1p)-\alpha_1}+o(\varepsilon).$$

Соответственно имеем $g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon))$.

Тогда генератор этого случайного процесса будет иметь вид

$$\Gamma^\varepsilon\varphi(u)=\frac{g_2^2(\varepsilon)(2b_1\alpha_1+\alpha_1p-2\alpha_1pb)+g_2(\varepsilon)(2b_1\alpha_1-2b_1\alpha_1p-2p\alpha_1)-\alpha_1}{g_2^2(\varepsilon)(pb+b_1-b_1p-b_1^2-p\alpha_1^2)+g_2(\varepsilon)(pb+b_1-pb^2)}\times$$

$$\times\int_R[\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^\varepsilon(dv).$$

Перейдем к аппроксимации Леви.

Рассмотрим семью марковских процессов с независимыми приращениями, которые нормируются множителем $g_2(\varepsilon) = o(g_1(\varepsilon))$:

$$\eta_2^\varepsilon(t) = \eta\left(\frac{t}{g_2(\varepsilon)}\right), \ t \ge 0,$$

определяемым генератором

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv), \ g_2(\varepsilon) \to 0 \ \text{при} \ g_2(\varepsilon) \to 0,$$

где $\varphi(u)$ является действительнозначной, дважды дифференцируемой функцией в R^d, равной нулю на бесконечности и sup-нормой

$$\|\varphi\| = \sup|\varphi(u)|;$$

$\varphi(u)$ принадлежит классу дважды непрерывно дифференцируемых функций в евклидовом пространстве $C_0^2(R^d)$, $u \in R^d$. Ядро интенсивности $\Gamma^\varepsilon(dv)$ принадлежит классу $C^3(R)$ и удовлетворяет условию $\Gamma^\varepsilon(\{0\}) = 0$.

Пусть выполняются условия аппроксимации Леви.

L1. Аппроксимация средних имеет вид

$$b_\varepsilon = \int_R v \Gamma^\varepsilon(dv) = b_1 g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon)(b + \Theta_b^\varepsilon),$$

$$c_\varepsilon = \int_R v^2 \Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(c + \Theta_c^\varepsilon),$$

где $b < +\infty$, $c < +\infty$, $|\Theta_b^\varepsilon| \to 0$, $|\Theta_c^\varepsilon| \to 0$.

L2. Ядро интенсивностей имеет асимптотическое представление

$$\Gamma_g^\varepsilon = \int_R g(v) \Gamma^\varepsilon(dv) = g_2(\varepsilon)(\Gamma_g + \Theta_g^\varepsilon)$$

для всех $g \in C^3(R)$.

Ядро $\Gamma^{(0)}(dv)$ задано на классе функций и определяет меру $C^3(R)$ соотношением

$$\Gamma_g = \int_R g(v) \Gamma^{(0)}(dv)$$

для всех $g \in C^3(R)$.

Слагаемые $\Theta_b^\varepsilon, \Theta_c^\varepsilon, \Theta_g^\varepsilon$ удовлетворяют условию $|\Theta^\varepsilon| \to 0$, $g_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

L3. Имеет место соотношение

$$\lim_{c \to \infty} \int_{|v|>c} v^2 \Gamma^{(0)}(dv) = 0,$$

что определяет равномерную квадратичную интегрированность.

Лемма 2. Генератор процесса с независимыми приращениями

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_2(\varepsilon))^{-1} \int_R [\varphi(u+v) - \varphi(u)] \Gamma^\varepsilon(dv)$$

в схеме аппроксимации Леви имеет следующее асимптотическое представление:

$$\Gamma^\varepsilon \varphi(u) = (g_1(\varepsilon))^{-1} b_1 \varphi'(u) + (b - b_0)\varphi'(u) + \frac{c - c_0}{2} \varphi''(u) +$$

$$+\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\Gamma^{(0)}(dv)+\Theta^{\varepsilon}\varphi ,$$

где

$$b_0=\int_R v\Gamma^{(0)}(dv),\ c_0=\int_R v^2\Gamma^{(0)}(dv),\ |\Theta^{\varepsilon}\varphi|\to 0,\ g_2(\varepsilon)\to 0,\ g_1(\varepsilon)\to 0,\ \varepsilon\to 0 .$$

Доказательство. Рассмотрим генератор процесса

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)=$$

$$=(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\Gamma^{\varepsilon}(dv)+$$

$$+(g_2(\varepsilon))^{-1}\int_R v\varphi'(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv)+\frac{(g_2(\varepsilon))^{-1}}{2}\int_R v^2\varphi'(u)\Gamma^{\varepsilon}(dv) .$$

Функция $\psi_u(v)=\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)$ принадлежит классу $C^3(R)$. Кроме того, она непрерывна и ограничена для $\varphi(u)\in C_0^2(R)$ при условии L1.

Из условий L1 и L2 имеем

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)-\frac{v^2}{2}\varphi''(u)]\Gamma^{(0)}(dv)+$$

$$+b_1(g_1(\varepsilon))^{-1}\varphi'(u)+b\varphi'(u)+\frac{c}{2}\varphi''(u)+\Theta_b^{\varepsilon}+\Theta_c^{\varepsilon}+\Theta_{\psi}^{\varepsilon} .$$

Применяя условие L3 и сведя соответствующие слагаемые, получаем асимптотическое представление

$$\Gamma^{\varepsilon}\varphi(u)=(g_1(\varepsilon))^{-1}b_1\varphi'(u)+(b-b_0)\varphi'(u)+$$

$$+\frac{c-c_0}{2}\varphi''(u)+\int_R [\varphi(u+v)-\varphi(u)-v\varphi'(u)]\Gamma^{(0)}(dv)+\Theta^{\varepsilon}\varphi .$$

Лемма доказана.

Используя данные аппроксимации, можно нормировать параметрами $g_1(\varepsilon)$ и $g_2(\varepsilon)$ случайные эволюции $\xi(t)$. Рассмотрим евклидово пространство R^d $(d\geq 1)$ с нормой $|\cdot|$ и стандартное фазовое пространство (E,ε). Для произвольного вектора $v\in R^d$ и матрицы $c\in R^{d\times d}$ соответствующими будут транспонированный вектор v^* и матрица c^*.

В схеме пуассоновской аппроксимации случайная эволюция имеет следующее нормирование:

$$\xi^{\varepsilon}(t)=\xi_0^{\varepsilon}(t)+\int_0^t \eta_{\varepsilon}\left[ds; x\left(\frac{s}{g_1(\varepsilon)}\right)\right],$$

где непрерывный справа марковский процесс $\eta(t,x)$, $t\geq 0$, $x\in E$, имеющий предел слева, является процессом с локально-независимыми приращениями. Данная случайная эволюция удовлетворяет следующим условиям.

PA1. Имеем аппроксимацию средних

$$b_{\varepsilon}(u;x)=\int_R v\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_1(\varepsilon)(b(u;x)+\Theta_b^{\varepsilon}(u;x)) ,$$

$$c_{\varepsilon}(u;x)=\int_R vv^*\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_1(\varepsilon)(c(u;x)+\Theta_c^{\varepsilon}(u;x)) .$$

РА2. Ядро интенсивностей имеет асимптотическое представление

$$\Gamma_g^{\varepsilon}(u;x)=\int_R g(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_1(\varepsilon)(\Gamma_g(u;x)+\Theta_g^{\varepsilon}(u;x))$$

для всех $g\in C^3(R^d)$ и ядро $\Gamma_g(u;x)$ ограничено для всех $g\in C_3(R^d)$ таких, что $|\Gamma_g(u,dv;x)|\le\Gamma_g$, где Γ_g — ядро, определенное соотношением

$$\Gamma_g=\int_R g(v)\,\Gamma(u,dv;x)$$

для всех $g\in C_3(R)$.

Слагаемые Θ_b^{ε}, Θ_c^{ε}, Θ_g^{ε} удовлетворяют условию $\sup|\Theta^{\varepsilon}(u;x)|\to 0$, $x\in X$, $g_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

РА3. В предельном генераторе отсутствует диффузная составляющая, т.е. выполняется условие

$$c(u;x)=\int_{R^d} vv^*\Gamma(u,dv;x).$$

РА4. Условие для начальных значений имеем вид

$$\sup E|\xi_0^{\varepsilon}|\le C<\infty.$$

Далее рассмотрим случайную эволюцию в аппроксимации Леви, которая имеет следующее нормирование:

$$\xi^{\varepsilon}(t)=\xi_0^{\varepsilon}(t)+\int_0^t\eta_{\varepsilon}\left[ds;x\left(\frac{s}{g_2(\varepsilon)}\right)\right],\ \text{где}\ g_2(\varepsilon)=o(g_1(\varepsilon)),$$

где непрерывный справа марковский процесс $\eta(t,x)$, $t\ge 0$, $x\in E$, имеющий предел слева, является процессом с локально-независимыми приращениями. Данная случайная эволюция удовлетворяет следующим условиям.

LA1. Аппроксимация средних имеет вид

$$b_{\varepsilon}(u;x)=\int_R v\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=b_1(u;x)g_1(\varepsilon)+g_2(\varepsilon)(b(u;x)+\Theta_b^{\varepsilon}(u;x)),$$

$$c_{\varepsilon}(u;x)=\int_R vv^*\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_2(\varepsilon)(c(u;x)+\Theta_c^{\varepsilon}(u;x)).$$

LA2. Ядро интенсивностей имеет асимптотическое представление

$$\Gamma_g^{\varepsilon}(u;x)=\int_R g(v)\Gamma^{\varepsilon}(u,dv;x)=g_2(\varepsilon)(\Gamma_g(u;x)+\Theta_g^{\varepsilon}(u;x))$$

для всех $g\in C^3(R^d)$ и ядро $\Gamma_g(u;x)$ ограничено для всех $g\in C^3(R^d)$ таких, что $|\Gamma_g(u,dv;x)|\le\Gamma_g$, где Γ_g — ядро, определяемое соотношением

$$\Gamma_g=\int_R g(v)\Gamma^{(0)}(u,dv;x)$$

для всех $g\in C^3(R)$.

Слагаемые Θ_b^{ε}, Θ_c^{ε}, Θ_g^{ε} удовлетворяют условию $\sup|\Theta^{\varepsilon}(u;x)|\to 0$, $x\in E$, $g_2(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

LA3. Условие баланса имеет вид $\int_E\pi(dx)b_1(u;x)=0$.

LA4. Условие для начальных значений имеет вид

$$\sup E|\xi_0^\varepsilon| \le C < \infty .$$

И в схеме пуассоновской аппроксимации, и в схеме аппроксимации Леви будут выполняться следующие условия.

PL1. Равномерная квадратичная интегрируемость имеет вид

$$\lim_{c\to\infty} \sup \int_{|v|>c} vv^* \Gamma^{(0)}(u, dv; x) = 0 .$$

PL2. При условии роста существует положительная константа L такая, что

$$|b(u; x)| \le L(1+|u|) \text{ и } |c(u; x)| \le L(1+|u|^2)$$

для всех действительнозначных неотрицательных функций $f(v)$, $v \in R^d$, таких, что

$$\int_{R^d/\{0\}} (1+f(v))|v|^2\, dv < \infty.$$

Имеем

$$|\Lambda(u, dv; x)| \le Lf(v)(1+|u|),$$

где $\Lambda(u, dv; x)$ — производная Радона-Никодима ядра $\Gamma(u, B; x)$ по отношению к мере Лебега dv в R^d, т.е.

$$\Gamma(u, dv; x) = \Lambda(u, v; x)dv.$$

Данное нормирование позволяет оценить прыжки в аппроксимации процессов с независимыми приращениями и найти их асимптотическое представление.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королюк В.С. Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Доповіді НАН України. — 2010. — № 6. — С. 22–26.
2. Самойленко І.В. Великі відхилення для імпульсних процесів в схемі пуассонової апроксимації // Український математичний журнал. — 2012. — **64**, № 11. — С. 1526–1535.
3. Koroliuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. Poisson approximation of process with locally independent increments and semi-Markov switching — Toward application in reliability // Advances on Degradation Models with Application to Reliability. Survival Analysis and Finance. — Birkhauser, 2010. — P. 105–116.
4. Chernoff H. Measure of asymptotical efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations // Annals of Mathematical Statistics. — 1952. — **23**, N 4. — P. 493–655.
5. Feng J., Kurtz T.G. Large deviation for stochastic processes // Mathematical Surveys and Monographs, 131. Providence (RI): American Mathematical Society, 2006. — 410 p.

Поступила 15.06.2015