УДК 517:977

И.С. РАППОПОРТ

О СТРОБОСКОПИЧЕСКОЙ СТРАТЕГИИ В МЕТОДЕ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ С ТЕРМИНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПЛАТЫ

Аннотация. Исследован метод разрешающих функций относительно теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. Предложена схема метода, обеспечивающая.окончание игры за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий при минимальных дополнительных условиях. Приведены результаты сравнения гарантированных времен этой схемы метода разрешающих функций с первым прямым методом Понтрягина.

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию подхода к решению игровых задач управления динамическими процессами с терминальной функцией платы, который предполагает систематическое использование идей двойственности Фенхеля–Моро [1] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [2, 3]. Разрешающую функцию удается выразить через сопряженную к функции платы и, используя инвалютивность оператора сопряжения для выпуклой замкнутой функции, получить гарантированную оценку терминального значения функции платы, которая представляется через значение платы в начальный момент и интеграл от разрешающей функции.

Важной особенностью общей схемы метода разрешающих функций является использование при построении управляющего воздействия информации о поведении противника в прошлом. Отметим, что она необходима только для определения некоторого момента переключения, который разделяет активный и пассивный интервалы развития игры. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, определяемое стробоскопической стратегией Хайека [4]. В работе [2] найдены условия, при которых информация о предыстории противника не играет роли. Основным результатом настоящей статьи является то, что для реализации гарантированного времени окончания игры можно ограничиться лишь контруправлением при минимальных дополнительных условиях.

Данная работа развивает идеи [2–10], примыкает к исследованиям [11–21] и указывает новые возможности приложения выпуклого анализа к теории конфликтно-управляемых процессов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс [13], эволюция которого описывается равенством

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau))\, d\tau,\ \ t \ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $z(t) \in R^n$, функция $g(t)$, $g: R_+ \to R^n$, измерима по Лебегу и ограничена при $t > 0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t \in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u, v)$,

$\varphi: U \times V \to R^n$, которая считается непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V, т.е. $U \in K(R^m)$, $V \in K(R^l)$, m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u: R_+ \to U$, и $v(\tau)$, $v: R_+ \to V$, являются измеримыми функциями времени. Кроме процесса (1) задана собственная выпуклая замкнутая ограниченная снизу по z функция $\sigma(z)$, $\sigma: R^n \to R^1$, значения которой на траекториях процесса (1) определяют момент окончания игры. Если $z(t)$, $t \ge 0$, — траектория системы (1), то игру будем считать законченной в момент $t_1 > 0$ при

$$\sigma(z(t_1)) \le 0. \tag{2}$$

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый пытается добиться выполнения неравенства (2) на соответствующей траектории процесса (1) за кратчайшее время, а другой — максимально оттянуть момент выполнения этого неравенства или вообще избежать его выполнения.

Примем сторону первого игрока и будем ориентироваться на выбор противником в качестве управления произвольной измеримой функции, которая принимает значения из V. В свою очередь, считаем, что если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t выберем на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то полагают, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [19], а контруправление [20] $u(t) = u(z_0, v(t))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [4].

Согласно определению сопряженной функции и с учетом теоремы Фенхеля–Моро [1] имеем

$$\sigma(z) = \sup_{p \in R^n} [(p, z) - \sigma^*(p)],$$

где

$$\sigma^*(p) = \sup_{z \in R^n} [(p, z) - \sigma(z)]. \tag{5}$$

Функция $\sigma^*(p)$ собственная замкнутая и выпуклая [1]. Эффективное множество функции $\sigma^*(p)$ имеет вид $\operatorname{dom} \sigma^* = \{p \in R^n : \sigma^*(t, p) < +\infty\}$. В силу ограниченности снизу собственной функции $\sigma(z)$ и соотношения (5) получим $\sigma^*(0) = -\inf_{z \in R^n} \sigma(z)$, а значит, $0 \in \operatorname{dom} \sigma^*$.

Полагаем, что L — линейная оболочка множества $\operatorname{dom} \sigma^*$ (пересечение всех линейных подпространств, содержащих множество $\operatorname{dom} \sigma^*$). Тогда она является линейным подпространством. Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n на L. Справедливо соотношение

$$\sigma(z) = \sigma(\pi z), \; z \in R^n.$$

Положив $\varphi(U,v)=\{\varphi(u,v):u\in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W(t,\tau,v)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,v),\ W(t,\tau)=\bigcap_{v\in V}W(t,\tau,v),\ t\ge\tau\ge 0,\ v\in V,$$

на множествах $\Delta\times V$ и Δ соответственно, где конус $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$. Будем предполагать, что многозначное отображение $W(t,\tau,v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta\times V$.

Условие 1 (Л.С. Понтрягин)**.** Многозначное отображение $W(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

В измеримом замкнутозначном отображении $W(t,\tau)$ согласно теореме измеримого выбора [18] зафиксируем некоторый измеримый селектор $\gamma(t,\tau)$ и положим

$$\xi(t,g(t)\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t\gamma(t,\tau)d\tau.$$

Введем в рассмотрение многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v)=\left\{\alpha\ge 0:\inf_{u\in U}\sup_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}[(p,\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(t,\tau))+\right.$$

$$\left.+\alpha[(p,\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)))-\sigma^*(p)]]\le 0\right\} \tag{6}$$

и его опорную функцию [1] в направлении +1

$$\alpha(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\ \alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,v)\},\ t\ge\tau\ge 0,\ v\in V,$$

которая в данном случае выполняет роль разрешающей функции. Из условия Понтрягина и включения $\gamma(t,\tau)\in W(t,\tau)$ непосредственно вытекает

$$\min_{u\in U}\max_{p\in\operatorname{dom}\sigma^*}(p,\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(t,\tau))\le 0\ \ \forall t\ge\tau\ge 0,\ v\in V.$$

Следовательно, если выполнено условие Понтрягина, то неравенство в соотношении (6) выполняется по крайней мере при нулевом значении α.

Заметим также, что при $\sigma(\xi(t,g(t)\gamma(t,\cdot)))\le 0$ в силу неравенства Фенхеля [18] $\mathfrak{A}(t,\tau,v)=[0,+\infty)$, $t\ge\tau\ge 0$, $v\in V$, и функция $\alpha(t,\tau,v)=+\infty$ для $v\in V$, $t\ge\tau\ge 0$. Если $\sigma(\xi(t,g(t)\gamma(t,\cdot)))>0$, то нетрудно проверить, что $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ является компактнозначным отображением, которое полунепрерывно сверху зависит от своих аргументов. Поэтому функция $\alpha(t,\tau,v)$ полунепрерывна сверху по $v\in R^n$ при любом $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим множество

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\int_0^t\inf_{v\in V}\alpha(t,\tau,v)d\tau\ge 1\right\}. \tag{7}$$

Из выражения (6) следует, что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ,v), $v\in V$, $\tau\in[0,t]$, для любого t [2]. Поэтому из теоремы об опорной функции [1] получим, что функция $\alpha(t,\tau,v)$ также $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измерима по совокупности (τ,v).

Лемма 1. Функция $\alpha(t,\tau)=\inf_{v\in V}\alpha(t,\tau,v)$ является измеримой по τ функцией.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\tau \in [0, t]$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\tau) = \{v \in R^n : \alpha(t, \tau, v) < \varepsilon\}$, имеющее открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $v \in R^n$ функции $\alpha(t, \tau, v)$ при любом $\tau \in [0, t]$.

Нетрудно показать, что при всех $\varepsilon \in R^1$ $\alpha(t, \tau) < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $G_\varepsilon(\tau) \bigcap V \neq \varnothing$, $\tau \in [0, t]$. Действительно, пусть $\alpha(t, \tau) < \varepsilon$ и $\delta > 0$ выбрано так, что $\alpha(t, \tau) + \delta < \varepsilon$. Тогда по свойству инфимума существует такое $v_\delta \in V$, что $\alpha(t, \tau, v_\delta) \le \alpha(t, \tau) + \delta < \varepsilon$, поэтому $G_\varepsilon(\tau) \cap V \neq \varnothing$, $\tau \in [0, t]$. Обратно, если $v_0 \in V$ и $\alpha(t, \tau, v_0) < \varepsilon$, $\tau \in [0, t]$, то имеем $\alpha(t, \tau) = \inf\limits_{v \in V} \alpha(t, \tau, v) \le \alpha(t, \tau, v_0) < \varepsilon$.

Поскольку компакт V является измеримым многозначным отображением, по теореме о характеризации [18] существует счетное семейство измеримых селекторов компакта V (обозначим его $\{v_i(\cdot)\}_{i \ge 1}$) такое, что $V = \overline{\bigcup_{i>1} v_i(\tau)}$ для каждого $\tau \in [0, t]$. Здесь черта над выражением означает замыкание [18]. Тогда для любого $\varepsilon \in R^1$ имеем

$$\{\tau \in [0, t] : \alpha(t, \tau) < \varepsilon\} = \{\tau \in [0, t] : G_\varepsilon(\tau) \bigcap V \neq \varnothing\} =$$

$$= \{\tau \in [0, T_s] : G_\varepsilon(\tau) \bigcap [\overline{\bigcup_{i>1} v_i(\tau)}] \neq \varnothing\} =$$

$$= \{\tau \in [0, t] : \alpha(t, \tau, v_0) < \varepsilon \text{ для некоторого } v_0 \in \overline{\bigcup_{i>1} v_i(\tau)}\} =$$

$$= \{\tau \in [0, t] : \alpha(t, \tau, v_0(\tau)) < \varepsilon \text{ для некоторого } v_0(\cdot) \in \{v_i(\cdot)\}_{i \ge 1}\} =$$

$$= \bigcup_{v(\cdot) \in \{v_i(\cdot)\}_{i \ge 1}} \{\tau \in [0, t] : \alpha(t, \tau, v(\tau)) < \varepsilon\}.$$

Но множество $\{\tau \in [0, t] : \alpha(t, \tau, v(\tau)) < \varepsilon\}$ измеримо, поскольку, как отмечалось ранее, функция $\alpha(t, \tau, v)$ является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по совокупности $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и, следовательно, суперпозиционно измерима. Поэтому функция $\alpha(t, \tau) = \inf\limits_{v \in V} \alpha(t, \tau, v)$ является измеримой по τ функцией.

Если при некотором $t > 0$ $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) \le 0$, то $\alpha(t, \tau, v) \equiv +\infty$ для $0 \le \tau \le t$, $v \in V$, и в этом случае естественно положить значение интеграла в (7) равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. Если неравенство в фигурных скобках (7) не выполняется для всех $t > 0$, то положим $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 1. Тогда, если существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(\cdot, \cdot)$, $0 \le \tau \le t < +\infty$, многозначного отображения $W(t, \tau)$, что $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$ и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Укажем способ выбора управления преследователем.

Для этого рассмотрим сначала случай $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha(T, \tau, v(\tau)) d\tau.$$

Она непрерывна, и согласно выражению (7) существует такой момент t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$.

Интервалы времени $[0, t_*)$ и $[t_*, T]$ в дальнейшем будем называть активным и пассивным соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \{u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau)) +$$
$$+ \alpha(T, \tau, v)[(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0\}, \ \tau \in [0, t_*), \ v \in V. \qquad (8)$$

В силу свойств параметров процесса (1), функции $\sigma(z)$ и разрешающей функции отображение $U(\tau, v)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [2] при $v \in V$, $\tau \in [0, t_*)$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [18] многозначное отображение $U(\tau, v)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $u(\tau, v)$, который является суперпозиционной измеримой функцией [2]. Положим управление первого игрока на активном интервале равным

$$u(\tau) = u(\tau, v(\tau)), \ \tau \in [0, t_*).$$

Рассмотрим пассивный интервал $[t_*, T]$. Пусть в выражении (8) при $\tau \in [t_*, T)$, $v \in V$, разрешающая функция $\alpha(T, \tau, v) \equiv 0$. Получим многозначное отображение

$$U_0(\tau, v) = \left\{ u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, v) - \gamma(T, \tau))] \le 0 \right\}. \qquad (9)$$

Как и в предыдущем случае, в $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримом замкнутозначном отображении $U_0(\tau, v)$ существует $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор. Обозначим его $u_0(\tau, v)$ и управление первого игрока на пассивном интервале выберем равным $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$.

Для случая $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$ управление первого игрока на всем промежутке $[0, T]$ выберем в виде измеримой функции $u_0(\tau) = u_0(\tau, v(\tau))$, где $u_0(\tau, v)$ — $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор отображения $U_0(\tau, v)$.

Покажем, что указанный закон выбора управления преследователем обеспечивает при любых управлениях убегающего выполнение неравенства (2) на траекториях системы (1) в момент T.

Учитывая равенство $\sigma(z(T)) = \sigma(\pi z(T))$, формулу (1) и определение сопряженной функции, получаем

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) +$$
$$+ \int_0^T (p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau - \sigma^*(p)]. \qquad (10)$$

Если $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$, то с учетом закона выбора управления первым игроком соотношение (10) определяет

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0,$$

откуда следует неравенство (2) в момент T.

Пусть $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$. Прибавим и вычтем в квадратных скобках выражения (10) величину

$$[(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)] \int_0^{t_*} \alpha(T, \tau, v(\tau)) d\tau.$$

Тогда получим

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \{[(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)] h(t_*) +$$

$$+ \int_0^{t_*} [(p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) + \alpha(T, \tau, v(\tau)) \times$$

$$\times [(p, \xi(T, g(T)\gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)]] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{T} (p, \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau\}.$$

Отсюда следует, что преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \leq \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) h(t_*) = 0,$$

что завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим в этой же схеме другую задачу: какое минимальное значение функционала $\sigma(z)$ может себе гарантировать первый игрок на траекториях системы (1) в заданный момент T, $T > 0$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть параметры процесса (1) удовлетворяют условию 1, а терминальный функционал $\sigma(z)$ — условиям теоремы 1.

Тогда для $T > 0$ справедлива оценка

$$\sup_{v(\cdot)} \sigma(z(T)) \leq \begin{cases} \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))), \text{ если } \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \leq 0, \\ \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \times \left[1 - \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha(T, \tau, v) d\tau\right], \\ \text{если } \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0. \end{cases}$$

Здесь супремум берется по всем измеримым селекторам компакта V.

СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ КЛАССА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $v_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, разделяющего активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. Следующая теорема показывает, что для реализации гарантированного времени теоремы 1 можно ограничиться контруправлением, если дополнительно выполнено следующее условие.

Условие 2. При $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$, $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, выпуклозначно, т.е. $\mathfrak{A}(t, \tau, v) = [0, \alpha(T, \tau, v)]$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 1. Тогда, если существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(\cdot, \cdot)$, $0 \leq \tau \leq t < +\infty$, многозначного отображения $W(t, \tau)$, что $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \neq \varnothing$ и для некоторого $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ выполнено условие 2, то игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Положим $\alpha(T,\tau) = \inf\limits_{v \in V} \alpha(T,\tau,v)$ и укажем способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим сначала случай $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ и введем контрольную функцию $h(t) = 1 - \int\limits_0^t \alpha(T,\tau) d\tau$, $t \in [0, T]$. Она абсолютно непрерывна на $[0, T]$ и не возрастает, причем $h(0) = 1$, а $h(T) \le 0$. Поэтому существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Опишем способ управления преследователем на интервале $[0, t_*)$. Для этого рассмотрим многозначное отображение

$$\hat{U}(\tau, v) = \Bigg\{ u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v) - \gamma(T,\tau)) +$$

$$+ \alpha(T,\tau)[(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)]] \le 0 \Bigg\}, \ v \in V. \tag{11}$$

Многозначное отображение $\widehat{U}(\tau, v)$ компактнозначно и $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [2]. Поэтому согласно теореме об измеримом селекторе [18] в нем существует $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $\widehat{u}(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией. Положим $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(\tau, v(\tau))$ и выберем его в качестве управления преследователя на интервале $[0, t_*)$.

Положив в соотношении (11) $\alpha(T,\tau) = 0$, выберем управление преследователя на интервале $[t_*, T]$ в виде измеримого селектора $\widehat{u}_0(\tau)$ компактнозначного измеримого многозначного отображения

$$\widehat{U}_0(\tau) = \Bigg\{ u \in U : \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u, v(\tau)) - \gamma(T,\tau))] \le 0 \Bigg\}, \ \tau \in [t_*, T]. \tag{12}$$

В случае $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$ в качестве управления преследователя $\widehat{u}_0(\tau)$ на всем интервале $[0, T]$ выберем произвольный измеримый селектор отображения $\widehat{U}_0(\tau)$.

Проследим за соответствующей траекторией $z(t)$, $t \in [0, T]$, процесса (1) с учетом закона выбора управления преследователем.

При условии $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) > 0$ из формулы (10) имеем

$$\sigma(z(T)) = \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \Bigg\{ [(p, \xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)] h(t_*) +$$

$$+ \int\limits_0^{t_*} [(p, \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau)) + \alpha(T,\tau) \times$$

$$\times [(p, \xi(T, g(T)\gamma(T, \cdot))) - \sigma^*(p)]] d\tau + \int\limits_{t_*}^{T} (p, \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u(\tau), v(\tau)) - \gamma(T,\tau)) d\tau \Bigg\}.$$

Тогда из соотношений (11), (12) следует, что преследователь может гарантировать в момент T выполнение неравенства

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \left(1 - \int\limits_0^{t_*} \alpha(T,\tau) d\tau \right) = 0.$$

Если $\sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0$, то с учетом закона выбора управления преследователем соотношение (10) дает

$$\sigma(z(T)) \le \sigma(\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot))) \le 0,$$

что завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} \mathfrak{A}(t, \tau, v), \quad t \ge \tau \ge 0,$$

которое имеет непустой образ, поскольку по крайней мере $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ для $0 \le \tau \le t$, $v \in V$, и его опорную функцию в направлении $+1$

$$\alpha_{\cap}(t, \tau) = \sup\{\alpha \ge 0 \ : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}.$$

Если при некотором $t > 0$ $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) > 0$, то отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ замкнутозначно и поэтому измеримо по τ [2], $0 \le \tau \le t$, а значит, согласно теореме об опорной функции [18] измеримой по τ является и функция $\alpha_{\cap}(t, \tau)$.

Введем множество

$$\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \alpha_{\cap}(t, \tau)\, d\tau \ge 1 \right\}. \tag{13}$$

Если при некотором $t > 0$ $\sigma(\xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot))) \le 0$, то, очевидно, $\mathfrak{A}(t, \tau) = [0, +\infty)$, а $\alpha_{\cap}(t, \tau) \equiv +\infty$ для $0 \le \tau \le t$, и в этом случае естественно положить значение интеграла в (13) равным $+\infty$, а соответствующее неравенство будет выполнено автоматически. Если неравенство в (13) не выполняется для всех $t > 0$, то положим $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие 1. Тогда, если существует такой измеримый по τ селектор $\gamma(\cdot, \cdot)$, $0 \le \tau \le t < +\infty$, многозначного отображения $W(t, \tau)$, что $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot) \ne \varnothing$ и $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4).

Доказательство этой теоремы приведено в [10].

Заметим, что если при некотором $T > 0$ выполнено условие 2, то легко показать, что $\alpha(t, \tau) = \alpha_{\cap}(t, \tau)$, поэтому множества $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ и $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$, если они не пусты, совпадают.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим $\operatorname{epi} \alpha(t, \tau, v) = \{(\tau, \mu) \in [0, t] \times R^1 : \alpha(t, \tau, v) \le \mu\}$ надграфик функции $\alpha(t, \tau, v)$ [21]. Функция $\overline{\operatorname{co}}\, \alpha(t, \tau, v)$ называется замыканием овыпукления функции $\alpha(t, \tau, v)$, если $\operatorname{epi} \overline{\operatorname{co}}\, \alpha(t, \tau, v) = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{epi} \alpha(t, \tau, v)$ [1, 18, 21]. При этом справедливо неравенство $\alpha(t, \tau, v) \ge \overline{\operatorname{co}}\, \alpha(t, \tau, v)$ при всех $t \ge \tau \ge 0$, $v \in V$. Заметим, что поскольку функция $\alpha(t, \tau, v)$ является при каждом $\tau \in [0, t]$ по $v \in V$ полунепрерывной сверху [3], то такой же будет и функция $\overline{\operatorname{co}}\, \alpha(t, \tau, v)$. По определению функция $\overline{\operatorname{co}}\, \alpha(t, \tau, v)$ при каждом $\tau \in [0, t]$ по $v \in V$ полунепрерывна снизу [21], поэтому функция $\overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)$ по $v \in V$ будет непрерывной. Такие функции называют функциями Каратеодори [18], и они обладают рядом полезных свойств. Таким образом, с каждой разрешающей функцией можно связать некоторую функцию Каратеодори и провести с ней соответствующие выкладки метода разрешающих функций. При этом, как показывает следующая лемма, гарантированное время окончания игры не изменится.

Положим $\delta = \inf\limits_{v(\cdot) \in V[0,t]} \int\limits_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau$, где $V[0,t]$ — множество селекторов компакта V на промежутке $[0,t]$.

Лемма 2. Справедливо равенство

$$\delta = \inf_{v(\cdot) \in V[0,t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau. \tag{14}$$

Доказательство. Очевидно, что имеет место неравенство

$$\delta \geq \inf_{v(\cdot) \in V[0,t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v(\tau))\,d\tau. \tag{15}$$

Пусть в соотношении (15) существует строгое неравенство. Тогда существует суммируемая функция $\delta_0(\tau)$ такая, что

$$\delta > \int_0^t \delta_0(\tau)d\tau \tag{16}$$

и для некоторого измеримого селектора компакта V, $v_0(\cdot) \in V[0,t]$, при почти всех $\tau \in [0,t]$ получаем

$$\delta_0(\tau) > \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v_0(\tau)). \tag{17}$$

Заметим, что

$$\overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v_0(\tau)) \geq \inf_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v) = \inf_{v\in V} \alpha(t,\tau,v)\,. \tag{18}$$

Поэтому соотношения (17), (18) при почти всех $\tau \in [0,t]$ дают следующее неравенство:

$$\delta_0(\tau) > \inf_{v\in V} \alpha(t,\tau,v)\,. \tag{19}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\Psi(t,\tau) = \{v \in V : \alpha(t,\tau,v) < \delta_0(\tau)\} = V \cap G_{\delta_0(\tau)}(t,\tau)\},$$

где $G_\varepsilon(t,\tau) = \{v \in R^n : \alpha(t,\tau,v) < \varepsilon\}$, $\tau \in [0,t]$, $\varepsilon \in R^1$. Соотношение (19) гарантирует, что $\Psi(t,\tau) \neq \varnothing$. Для каждого $\varepsilon \in R^1$ и $\tau \in [0,t]$ многозначное отображение $G_\varepsilon(\tau) = \{v \in R^n : \alpha(t,\tau,v) < \varepsilon\}$ имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $v \in R^n$ функции $\alpha(t,\tau,v)$ при любом $\tau \in [0,t]$. График этого отображения будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измерим по совокупности (τ, v), $v \in V$, $\tau \in [0,t]$, для любого t, поскольку функция $\alpha(t,\tau,v)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измерима по совокупности (τ, v) [2]. В силу предложения 5 [21, с. 340] с учетом леммы 1 [2] многозначное отображение $\Psi(t,\tau)$ измеримо и пусть $\psi_0(t,\tau)$ — произвольный измеримый селектор этого отображения. Тогда получим

$$\alpha(t,\tau,\psi_0(t,\tau)) < \delta_0(\tau),\ \psi_0(t,\tau) \in V,\ \tau \in [0,t]\,. \tag{20}$$

Из неравенств (16) и (20) следует

$$\delta > \int_0^t \delta_0(\tau)d\tau > \int_0^t \alpha(t,\tau,\psi_0(t,\tau))d\tau \ge \delta.$$

Полученное противоречие показывает, что в соотношении (15) имеет место равенство.

Следствие 2. Справедливо равенство

$$\delta = \int_0^t \inf_{v\in V} \alpha(t,\tau,v)d\tau.$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)$ является функцией Каратеодори, то для нее справедливо равенство

$$\int_0^t \inf_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)\,d\tau = \inf_{v(\cdot)\in V[0,t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau. \tag{21}$$

Действительно, по теореме о маргинальном отображении [18] маргинальная функция $\inf\limits_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)$ измерима и соответствующее маргинальное многозначное отображение

$$V_0(t,\tau) = \{v_0 \in V : \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v_0) = \inf_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)\}$$

непусто, компактнозначно и измеримо. Пусть $v_0(\cdot)$ — измеримый селектор этого многозначного отображения. Тогда имеем

$$\int_0^t \inf_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v)d\tau = \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v_0(\tau))d\tau \ge \inf_{v(\cdot)\in V[0,t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau.$$

В обратную сторону неравенство очевидно, т.е. соотношение (21) справедливо.

Теперь с учетом соотношения $\inf\limits_{v\in V} \overline{\text{co}}\,\alpha(t,\tau,v) = \inf\limits_{v\in V} \alpha(t,\tau,v)$ равенство (14) дает требуемый результат.

В работе [10] показано, что гарантированное время завершения конфликтно-управляемого процесса (1), (2) для квазистратегии (3) определяется соотношением

$$T_1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \inf_{v(\cdot)\in V[0,t]} \int_0^t \alpha(t,\tau,v(\tau))d\tau \ge 1 \right\}.$$

Следствие 2 показывает, что

$$T_1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \inf_{v\in V} \alpha(t,\tau,v)d\tau \ge 1 \right\}$$

и, если выполнено условие 2, в силу теоремы 2 можно вместо квазистратегии (3) применить стробоскопическую стратегию (4).

ПЕРВЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД ПОНТРЯГИНА

Первый прямой метод Понтрягина [5, 6] дает достаточные условия окончания дифференциальной игры сближения за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий. Представляет интерес обобщение этого метода на конфликтно-управляемые процессы вида (1) с терминальной функцией платы (2) и сравнение с полученными выше результатами.

Рассмотрим аналог функции Понтрягина для конфликтно-управляемого процесса (1), (2)

$$\mathbf{P}(g(\cdot)) = \inf\left\{ t \ge 0 \colon \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(p, \pi g(t)) - \int_0^t C(W(t,\tau), -p)\, d\tau - \sigma^*(p) \right] \le 0 \right\}. \quad (22)$$

Здесь $C(W, p)$ — опорная функция множества W [1]. Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathbf{P}(g(\cdot)) = +\infty$.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие Понтрягина, точная нижняя грань в (22) достигается и $\mathbf{P} = \mathbf{P}(g(\cdot)) < +\infty$. Тогда игра может быть закончена в момент $\mathbf{P}$ с помощью управления вида (4).

Доказательство. Из условий теоремы и соотношения (22) следует

$$\max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(p, \pi g(\mathbf{P})) - \int_0^{\mathbf{P}} C(W(\mathbf{P},\tau), -p)\, d\tau - \sigma^*(p) \right] \le 0. \quad (23)$$

В силу определения интеграла от многозначного отображения и свойств опорной функции [1,18] из соотношения (23) вытекает, что существует измеримый селектор $\gamma(t,\tau)$ многозначного отображения $W(t,\tau)$ такой, что

$$\max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(p, \pi g(\mathbf{P})) + \int_0^{\mathbf{P}} (p, \gamma(\mathbf{P},\tau))\, d\tau - \sigma^*(p) \right] \le 0. \quad (24)$$

Множество таких селекторов обозначим Γ_t.

Из условия Понтрягина и включения $\gamma(\mathbf{P},\tau) \in W(\mathbf{P},\tau)$ непосредственно вытекает

$$\min_{u \in U} \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} (p, \pi\Omega(\mathbf{P},\tau)\varphi(u,v) - \gamma(\mathbf{P},\tau)) \le 0 \quad \forall\, \mathbf{P} \ge \tau \ge 0, \ v \in V.$$

Рассмотрим многозначное отображение для $\mathbf{P} \ge \tau \ge 0$, $v \in V$

$$U_0(\tau, v) = \left\{ u \in U \colon \sup_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} [(p, \pi\Omega(\mathbf{P},\tau)\varphi(u,v) - \gamma(\mathbf{P},\tau))] \le 0 \right\}. \quad (25)$$

Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathbf{P}]$. Тогда из соотношения (25) вытекает, что отображение $U_0(\tau) = U_0(\tau, v(\tau))$ является компактнозначным измеримым многозначным отображением на интервале $[0, \mathbf{P}]$. Согласно теореме измеримого выбора в нем существует измеримый селектор $u_0(\tau)$, который выберем в качестве управления преследователя на интервале $[0, \mathbf{P}]$.

Из формулы (1) и соотношений (24), (25) получим

$$\sigma(z(T)) = \sigma(\pi z(T)) \le \max_{p \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left[(p, \pi g(\mathbf{P})) + \int_0^{\mathbf{P}} (p, \gamma(\mathbf{P},\tau))\, d\tau - \sigma^*(p) \right] \le 0,$$

что завершает доказательство теоремы.

Следствие 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие Понтрягина. Тогда для того чтобы

$$\max_{p\in\mathrm{dom}\,\sigma^*}\left[(p,\pi g(t))-\int_0^t C(W(t,\tau),-p)d\tau-\sigma^*(p)\right]\le 0,\ t\ge 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал такой селектор $\gamma(t,\tau)\in\Gamma_t$, что

$$\sigma(\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot)))\le 0.$$

Пусть в числовом множестве $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ существует минимальный элемент $T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$.

Следствие 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) с терминальным функционалом $\sigma(z)$, который является собственной выпуклой замкнутой ограниченной снизу по z функцией, выполнено условие Понтрягина. Тогда существует такой селектор $\gamma(\cdot,\cdot)$, что $T_0(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))\le \mathbf{P}(g(\cdot))$ для любых измеримых ограниченных для $t\ge 0$ функций $g(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены квазилинейные конфликтно-управляемые процессы общего вида с терминальной функцией платы. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий Хайека [4].

Показано, что это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий при минимальных дополнительных предположениях. Предложена схема регуляризации разрешающих функций, которая превращает их в функции Каратеодори [18] и существенно упрощает общую схему метода разрешающих функций без изменения гарантированного времени завершения игры. Удалось обобщить первый прямой метод Понтрягина на конфликтно-управляемые процессы с терминальной функцией платы и сравнить его с методом разрешающих функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 470 с.
2. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 5. — С. 40–64.
3. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. — Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. — 424 p.
4. Hajek O. Pursuit games. — New York; London: Academic Press, 1975. — 266 p.
5. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. — М.: Наука, 1988. — Т. 2. — 576 с.
6. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — 65 с.
7. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. О гарантированном результате в дифференциальной игре с терминальной функцией платы // Прикл. математика и механика. — 1995. — **59**, № 5. — С. 714–720.
8. Chikrii A. A., Rappoport J.S. Guarantee result in differential games with terminal payoff // Ann. Dynamic Games. — Berlin: Birkhauser, 1995. — **59.** — P. 323–330.
9. Раппопорт И.С., Чикрий А.А. Гарантированный результат в дифференциальной игре группового преследования с терминальной функцией платы // Прикл. математика и механика. — 1997. — **61**, № 4. — С. 584–594.
10. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы // Проблемы управления и информатики. — 2016. — № 3. — С. 49–58.

11. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы // Прикл. математика и механика. — 1993. — **57**, № 3. — С. 3–14.

12. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — **44.** — P. 835–851.

13. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Generalized Mittag–Leffler function in game problems for evolutionary equations of fractional order // Cybernetics and Systems Analisis. — 2000. — **36**, N 3, — P. 315–338.

14. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // J. Math., Game Theory and Algebra. — 1998. — **7**, N 2/3. — P. 81–94.

15. Кривонос Ю.Г., Матычин И.И., Чикрий А.А. Динамические игры с разрывными траекториями. — Киев: Наук. думка, 2005. — 220 с.

16. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object // Cybernetics and Systems Analisis. — 1987. — **23**, N 4. — P. 437–445.

17. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.J. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving object // Cybernetics and Systems Analisis. — 2001. — **37**, N 1. — P. 75–91.

18. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. — Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. — 461 p.

19. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 288 с.

20. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.

21. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974. — 480 с.

Надійшла до редакції 09.03.2016

Й.С. Раппопорт

ПРО СТРОБОСКОПІЧНУ СТРАТЕГІЮ В МЕТОДІ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ З ТЕРМІНАЛЬНОЮ ФУНКЦІЄЮ ПЛАТИ

Анотація. Досліджено метод розв'язувальних функцій стосовно теорії конфліктно-керованих процесів з термінальною функцією плати. Запропоновано схему методу, що забезпечує закінчення гри за певний гарантований час у класі стробоскопічних стратегій при мінімальних додаткових умовах. Наведено результати порівняння гарантованих часів цієї схеми методу розв'язувальних функцій з першим прямим методом Понтрягіна.

Ключові слова: квазілінійна диференційна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія.

I.S. Rappoport

STROBOSCOPIC STRATEGY IN THE RESOLVING-FUNCTIONS METHOD FOR CONTROL GAME PROBLEMS WITH TERMINAL PAYOFF FUNCTION

Abstract. The paper investigates the method of resolving functions with respect to the theory of conflict-controlled processes with terminal payoff function. The scheme of the method is proposed. This scheme ensures that the game ends in a certain guaranteed time in the class of stroboscopic strategies with minimum additional conditions. The guaranteed times for this scheme of the resolving-functions method are compared with those of the first direct Pontryagin method.

Keywords: differential quasi-linear game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.