УДК 517.9

Э.Р. СМОЛЬЯКОВ

НОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ИГР С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ[1]

Аннотация. Приведены усложненные понятия равновесия для статических и динамических конфликтных задач (описанных дифференциальными уравнениями), рассматриваемых как на едином для всех участников игровом множестве, так и на частично пересекающихся игровых множествах, полезные для поиска наисильнейшего равновесия в любых задачах и для определения справедливого дележа кооперативного дохода.

Ключевые слова: игры на пересекающихся множествах, усложненные равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаются новые понятия равновесия, особенно полезные для конфликтных задач (статических и динамических) с побочными интересами участников, т.е. определяемых на их частично пересекающихся игровых множествах. Разработка теории подобных задач, по существу совершенно не изученных, сопряжена с проблемой чрезвычайной сложности поиска понятий равновесия, не содержащих в своем определении каких-либо искусственно навязываемых участникам норм поведения.

Классическая теория игр посвящена изучению конфликтных задач на едином для участников игровом множестве [1–8], однако на практике, как правило, конфликты реализуются на частично пересекающихся игровых множествах. Например, почти в любом конкретном бизнесе участвует несколько игроков, из которых некоторые (или все) являются партнерами и в других бизнес-системах, что формирует некий конфликт побочных интересов участников.

Конфликтные задачи с побочными интересами (доходами) игроков характеризуются тем, что каждый из них имеет доходы из различных источников, причем последние не всегда доступны для получения доходов другими участниками. Явные конфликтные отношения возникают лишь на пересечениях игровых множеств участников, а на некоторой части игрового множества любого участника (или их коалиции), не пересекающейся с игровыми множествами других игроков, полученные доходы естественно назвать побочными, поскольку они непосредственно не связаны с данным конфликтом, но косвенно оказывают на него влияние. Последний в свою очередь также оказывает влияние на побочные доходы. Частично пересекающиеся множества существенно усложняют формирование общей теории конфликтных задач, начальная базовая основа которой приведена в работах [9–11].

В подобных задачах возникают проблемы, не присущие классическим играм на едином для участников игровом множестве. Одна из них состоит в том, что в любых конфликтных задачах, рассматриваемых на едином для участников игровом множестве, всегда непустое множество A наиболее слабых равновесий [12–16] может быть пустым в играх с побочными интересами. Это обусловило введение понятий сильных угроз и специфических слабых равновесий [9–11], которые не использовались в теории конфликтных задач на едином для всех

[1] Работа поддержана РФФИ, проект № 15-01-08838-а.

участников игровом множестве [1–8, 12–16]. Однако приведенные в [9–11] равновесия оказались слишком слабыми (т.е. слишком общими), что затрудняло поиск наисильнейшего равновесия. В настоящей работе предлагается существенно более сильное равновесие, которое весьма эффективно для решения любых статических и динамических задач с пересекающимися и непересекающимися игровыми множествами участников.

ФОРМУЛИРОВКИ РАВНОВЕСИЙ И ПОИСК РЕШЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИХ ИГРАХ

Чтобы не усложнять изложение громоздкими непринципиальными деталями и облегчить восприятие и возможности использования новых понятий равновесия, рассмотрим вначале статические задачи с двумя участниками в формулировке работы [11] при ограничениях, не снижающих общности получаемых результатов.

Допущение 1. Пусть Q_i, $i=1,2$, — метрические пространства и $Q=Q_1\times Q_2$; G_i — компактные множества в пространстве Q, причем $G=G_1\cap G_2\neq\varnothing$, а $G'=G_1\cup G_2$; и пусть на множестве G_i определена непрерывная функция (функционал) $J_i(q)$, $i=1,2$, $q=(q_1,q_2)$, q_i — стратегия i-го участника конфликта.

Кроме того, i-й участник имеет возможность выбирать свою стратегию q_i из проекции $\mathrm{Pr}_{Q_i}G'$ множества G' на пространство Q_i или из сечения $G'(q_k)$ $(k\neq i,\ i=1,2)$ и стремится обеспечить максимум своей платежной функции (функционала) $J_i(q)$, определенной лишь на его индивидуальном игровом множестве $G_i\subseteq Q$, имеющем непустое пересечение G с аналогичным индивидуальным игровым множеством G_k другого игрока, максимизирующего на нем свою платежную функцию J_k. По существу это означает, что интересы участников явно сталкиваются только на множестве G, на котором они вступают в конкурентные взаимоотношения, а на множествах $G'\setminus G_i$ и $G'\setminus G_k$ игроки получают свои побочные доходы, не связанные явно с бизнесом на множестве G.

Исходным понятием для построения любых систем конфликтных равновесий в задачах с побочными интересами участников является обобщенное понятие A-равновесия из работ [9–11], которое необходимо привести, поскольку на нем (явно или неявно) основаны все известные понятия равновесия [1–16].

Определение 1. Точку (ситуацию) $q^*\in G_i$ назовем A_i-экстремальной для i-го участника, если при заданной стратегии q_k^* k-го участника только одна стратегия $q_i^*=G_i(q_k^*)$ оказывается допустимой для i-го игрока или если любой стратегии $q_i\in G_i(q_k^*)\setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat q_k=\hat q_k\ \langle q_i\rangle\in G_i(q_i)$ k-го участника такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i,\hat q_k)\le J_i(q^*) \tag{1}$$

(назовем этот случай задачей типа 1); либо такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i,\hat q_k)\le J_i(q^*),\ \ \hat q_k\in G'(q_i) \tag{2}$$

(назовем этот случай задачей типа 2, отличающейся от задачи типа 1 тем, что в ней, помимо угроз $\hat q_k$, используемых в (1), допускаются еще и сильные угрозы на множестве $G'(q_i)\setminus G_i(q_i)$, на котором угрожающий k-й игрок получает доход, а i-й игрок ничего не получает); либо, если любой стратегии $q_i\in G(q_k^*)\setminus q_i^*$ i-го участника можно поставить в соответствие по крайней мере одну допустимую стратегию $\hat{q}_k$ другого участника, такую, чтобы имело место отношение

$$J_i(q_i, \hat{q}_k) \le J_i(q^*), \ \hat{q}_k \in G(q_i) \tag{3}$$

(назовем этот случай задачей типа 3, характеризующейся тем, что рассматривается вспомогательная игра только на пересечении G множеств G_1 и G_2).

Ситуацию q^* назовем A-равновесием в задачах типа 1, 2 или 3, если соответственно условия (1), (2) или (3) удовлетворяются в точке $q^* \in G'$ для $i = 1, 2$, т.е. если $q^* \in A_1 \cap A_2 = A$.

Из определения 1 следует, что в задачах типа 1 и 3 угрозы естественные (слабые), а в задаче типа 2 — сильные, т.е. в игровых задачах на частично пересекающихся игровых множествах угрожающий k-й игрок имеет возможность реализовать свои угрозы не только в сечениях $G_i(q_i)$ игрового множества G_i i-го участника, но и в более широких сечениях $G'(q_i) \supseteq G_i(q_i)$, в которых он получает доход, а наказуемый i-й участник ничего не получает.

В задачах с частично пересекающимися интересами участников, где множество A пустое, последнее можно заменить множеством P. Формулировка этого множества дана в определении 2 и представляет собой переформулировку множества $\overline{P}^{\,b}$ из работы [11], основанного на понятии оптимальности по Парето: ситуацию q^* называют оптимальной по Парето [17], если несовместны неравенства $J_i(q) \ge J_i(q^*)$, $q \in G$, $q \ne q^*$, $i = 1, 2$, среди которых хотя бы одно строгое.

Определение 2. Ситуацию $q^* \in G_i$ назовем P_i-экстремальной, если при каждой попытке $q_i \in G_i(q_k^*) \setminus q_i^*$ i-го участника ($i = 1, 2$, $k \ne i$) увеличить свой выигрыш по сравнению с выигрышем в ситуации q^* за счет перехода из нее в более выгодную ситуацию q_i окажется, что ситуация q^* является точкой Парето (или индивидуально-паретовским равновесием в терминологии работы [12, с. 145]) по отношению ко всем точкам сечения $G'(q_i)$. Если ситуация $q^* \in G_i$ является максимумом функционала J_i в сечении $G_i(q_k^*)$, то она полагается P_i -экстремальной по определению. Ситуацию q^* назовем P-равновесием (или P-оптимальной), если она P_i-экстремальна одновременно для $i = 1, 2$.

Следующее предлагаемое новое понятие относительно сильного D^P-равновесия, основанное на понятии P-равновесия и усиливающее последнее, полезно не только в задачах с побочными интересами участников, в которых A-равновесие пустое, но и вообще в любых конфликтных задачах.

Определение 3. Ситуацию $q^* \in P_i$ назовем D_i^P-экстремальной, если

$$\max_{q_i \in P_i(q_k^*)} J_i\left(\operatorname{Arg} \max_{q_k \in P_i(q_i)} J_k(q_i, q_k) \right) = J_i(q^*), \ i = 1, 2. \tag{4}$$

Ситуацию q^* назовем D^P-равновесием, если $q^* \in D_1^P \cap D_2^P = D^P$.

Отметим, что поиск D^P-равновесия в прикладных задачах весьма трудоемок, следовательно, прибегать к его нахождению целесообразно только тогда, когда без его помощи решение не определяется однозначно.

Если A-равновесие непустое, то прежде чем пытаться искать D^P-равновесие следует воспользоваться известными понятиями равновесия [1–16], из которых приведем далее только три равновесия из [9–16], необходимые для решения примеров.

Определение 4. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем B_i-экстремальной, если образующая ее стратегия другого игрока удовлетворяет условию

$$\max_{q_k \in A_i(q_i^*)} J_k(q_i^*, q_k) = J_k(q^*), \ k = 1, 2, \ k \neq i.$$

Ситуацию $q^* \in G$ назовем B-равновесием, если $q^* \in B_1 \cap B_2$, где B_i — множество всех B_i-экстремальных ситуаций.

Определение 5. Ситуацию $q^* \in B_i$ назовем $\overline{D}_i$-экстремальной, если

$$\max_{q \in B_i} J_i(q) = J_i(q^*), \ i = 1, 2,$$

или, что то же самое, если

$$\max_{q_i \in \mathrm{Pr}_{Q_i} A_i} J_i \left(\mathrm{Arg} \max_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k) \right) = J_i(q^*), \ i = 1, 2.$$

Ситуацию q^* назовем $\overline{D}$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \overline{D}$.

В любых конфликтных задачах, в которых существует $\overline{D}$-равновесие, оно оказывается наиболее устойчивым и наивыгоднейшим для всех участников (к сожалению, данное равновесие существует далеко не всегда).

Заметим, что некоторое ослабление B- и $\overline{D}$-равновесий можно получить, если в определениях 4 и 5 вместо каждого из множеств A_1 и A_2 использовать множество A. Полученные в результате такой замены равновесия в [9–15] названы B'- и D'-равновесиями.

Некоторым ослаблением равновесий из определений 4 и 5 является также следующее равновесие.

Определение 6. Ситуацию $q^* \in A_i$ назовем $\overline{D}_i'$-экстремальной, если

$$\max_{q_i \in A_i(q_k^*)} J_i \left(\mathrm{Arg} \max_{q_k \in A_i(q_i)} J_k(q_i, q_k) \right) = J_i(q^*), \ i = 1, 2, \ i \neq k.$$

Ситуацию q^* назовем $\overline{D}'$-равновесием, если $q^* \in \overline{D}_1' \cap \overline{D}_2' = \overline{D}'$.

Предлагаемое ранее новое, весьма сложное при его практическом поиске, D^P-равновесие в случае, если равновесия из определений 4–6 пустые, может их заменить.

Заметим, что для решения прикладных задач с побочными интересами участников в большинстве случаев весьма полезно предложение 1 из [11], которое целесообразно привести и в данной работе (с учетом его коррекции вследствие введения нового понятия D^P-равновесия (4)).

Предложение 1. В общем случае в игровой задаче с несовпадающими и пересекающимися игровыми множествами G_i отметим следующее.

1. Если сильные угрозы (2) недопустимы (по соглашению между всеми участниками) и множество A пустое в естественном классе слабых угроз (1) (т.е. в задаче типа 1), то наисильнейшие равновесия (и решение задачи в том или ином смысле) всегда можно найти из всегда существующего решения задачи типа 3 (в естественном классе слабых угроз (1)), дополненного использованием равновесия D^P.

2. Если сильные угрозы (2) недопустимы и множество A в задаче типа 1 непустое, то следует в качестве основного использовать решение задачи типа 1 (со всеми возможными его итерациями [11–17]) с учетом равновесия D^P, а для

оценки влияния побочных интересов на решение исходной игры — решение задачи типа 3; причем в случае несовпадения решений задач типов 1 и 3 за основу принять решение задачи типа 1, а решение задачи типа 3 рассматривать лишь как возможную коррекцию этого решения; совпадение решений задач типов 1 и 3 означает, что не существует влияния побочных доходов на решение игры (что весьма благоприятно для участников).

3. Если сильные угрозы (2) допустимы и при этом множество A в задаче (1) пустое, то в качестве основного решения исходной задачи следует рассматривать решение задачи типа 2 (2), а равновесие (4) и решение задачи типа 3 (3) рассматривать лишь с точки зрения возможности корректировки с их помощью решения задачи типа 2 (принимаемого как основное); причем если во всех случаях сильнейшие равновесия одинаковы, то это означает, что побочные доходы участников не влияют на решение игры.

4. Если сильные угрозы (2) допустимы и множество A в задаче типа 1 непустое, то следует найти решения задач типов 1–3 и равновесия (4); если в них наисильнейшие равновесия одинаковые, то на решение исходной задачи по существу не влияют ни типы угроз, ни побочные интересы участников, что наиболее благоприятно для последних; в случае различных равновесий в задачах типов 1–3 участникам следует рассматривать в качестве основного решение задачи типа 2, а решения задач типов 1 и 3, а также D^P-равновесие использовать лишь как корректировочные.

Пример 1. Рассмотрим конфликтную (игровую) задачу с двумя участниками, в которой каждый игрок максимизирует свою (матричную) платежную функцию на индивидуальном игровом множестве, частично пересекающемся с игровым множеством другого участника, т.е. игру с побочными интересами участников:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & 7 & \cdot \\ \cdot & 4 & \cdot & 10 \\ 6 & \cdot & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 9 & \cdot \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & \cdot & 2 \\ 3 & \cdot & 9 & \cdot \\ \cdot & 10 & 4 & 1 \\ \cdot & 7 & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Оба игрока располагают стратегиями q_1 и q_2, каждая из которых принимает в этой игре четыре значения. Стратегия q_1 — выбор первым игроком любой из четырех строк, а стратегия q_2 — выбор вторым игроком любого из четырех столбцов. Например, выбор первым игроком второй строки, а вторым игроком — третьего столбца приводит к реализации ситуации a_{23}, в которой второй игрок получает свой побочный доход $J_2 = 9$, а первый игрок ничего не получает, так как данная ситуация не принадлежит его игровому множеству. В этой задаче игровое множество G_i i-го участника задается теми элементами матрицы J_i, в которых приведены возможные значения его выигрыша. Конфликт имеет место на множестве $G = G_1 \cap G_2 = (a_{11}, a_{33}, a_{34}, a_{42}, a_{43})$, а полное игровое множество $G' = G_1 \cup G_2$ включает 15 элементов (кроме элемента a_{44}).

Исследуем, в какой мере побочные интересы участников и возможности использования ими различных типов угроз могут влиять на их доходы и на решение игры (кооперативной или некооперативной).

Найдем равновесия в классе слабых угроз, причем естественно вначале искать наиболее слабые, т.е. A-равновесия (1):

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & \cdot & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} + & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad A = A_1 \cap A_2 = \varnothing,$$

где крестиками отмечены непустые элементы матриц A_i.

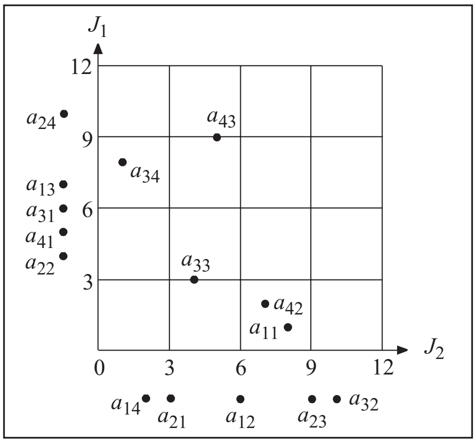

Рис. 1

Поскольку множество A-равновесий пустое, то, следовательно, не существует определяемых на этом множестве более сильных B-, $\overline{D}$-, $\overline{D}'$-равновесий и многих других известных [1–16]. Поэтому начнем поиск приведенного ранее P-равновесия (которое в данном случае заменит A-равновесие в определении 1) и его усиления — предлагаемого в данной работе нового D^P-равновесия. Однако, так как поиск этих равновесий, основанный только на их определениях, довольно затруднителен, воспользуемся геометрическим отображением матриц J_1 и J_2 на плоскость (J_1, J_2), приведенным на рис. 1, где по вертикали отложены значения матричной платежной функции J_1, а по горизонтали — значения J_2.

Заметим, что специфика задач с побочными интересами участников вынуждает использовать особую (никогда не применяющуюся в математике) форму отображений множеств G_1 и G_2 на плоскость (J_1, J_2) (см. рис. 1). В первом квадранте приводится отображение $(J_1(G), J_2(G))$ только множества G, на котором определены обе функции: J_1 и J_2, а отображение множества $(G_1 \setminus G)$ условно приводится левее оси J_1, поскольку на этом множестве функция J_2 не определена. Аналогично отображение множества $(G_2 \setminus G)$ условно приводится ниже оси J_2.

Таким образом, поскольку в ситуациях $a_{12}, a_{14}, a_{21}, a_{23}$ и a_{32} определена платежная функция J_2 только второго участника, значения данной функции в этих элементах располагаются вне первого квадранта — ниже оси J_2, и помечены элементами, расположенными в местах, соответствующих численному значению функции J_2 в этих элементах. Аналогично объясняется расположение левее оси J_1 тех элементов матрицы J_1, в которых не определена платежная матрица J_2.

Несмотря на то, что множество A-равновесий в этой задаче пустое, множества предлагаемых P- и D^P-равновесий непустые. Матрицы P_1, P_2 и P непустые и имеют следующий вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \; P_2 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим процедуру поиска этих равновесий на примерах поиска нескольких элементов данных матриц.

Ситуация a_{11} является P_1-экстремальной, так как при любой попытке первого игрока улучшить ее за счет перехода из данной ситуации в доступные и более выгодные ситуации a_{31} и a_{41} оказывается, что ситуация a_{11} является оптимальной по Парето по отношению к множеству, составленному из всех элементов третьей строки матрицы J_1, и независимо от этого ситуация a_{11} также оптимальна по Парето по отношению к множеству, составленному из всех элементов четвертой строки матрицы J_1 (см. рис. 1). И наконец, ситуация a_{11} оказывается также и P_2-экстремальной, поскольку второй участник не имеет оснований переходить из нее в доступные ему в первой строке матрицы J_2 (непустые) ситуации a_{12} и a_{14}, так как в них он не может улучшить своего выигрыша, полученного в ситуации a_{11}. Это означает согласно определению 2, что ситуация a_{11} является еще и P_2-экстремальной, а следовательно, она P-равновесная.

Рассмотим процедуру поиска P-равновесия в ситуации a_{33}, из которой второй игрок имеет возможность перейти только в одну более выгодную для него ситуацию a_{32}. В этом случае ситуация a_{33} оптимальна по Парето по отношению ко всем элементам второго столбца, следовательно, $a_{33} \in P_2$. Убедимся, что ситуация a_{33} не является P_1-экстремальной. Из нее первый игрок имеет возможность перейти в более выгодные для него ситуации a_{13} или в a_{43}. В случае перехода в ситуацию a_{13} ситуация a_{33} (отображенная на плоскость (J_1, J_2)) является оптимальной по Парето по отношению ко всем элементам первой строки платежных матриц участников. Однако переход в ситуацию a_{43} приводит к тому, что ситуация a_{33} не оказывается оптимальной по Парето по отношению одновременно ко всем элементам четвертой строки (в данном случае она не оптимальная по Парето по отношению к элементу a_{43}). Таким образом, получаем, что ситуация a_{33} не является P_1-экстремальной, а следовательно, она не является P-равновесием.

Аналогично находятся любые другие элементы матриц P_1 и P_2. Причем из трех непустых элементов матрицы P только один элемент a_{42} оказывается D^P-равновесием, т.е. удовлетворяет определению 3:

$$\max_{q_1 \in P_1(q_2^*)} J_1\left(\operatorname{Arg} \max_{q_2 \in P_1(q_1)} J_2(q_1, q_2) \right) = \max_{q_1 \in P_1(q_2^*)} J_1(\varnothing, a_{42}) = J_1(a_{42}),$$

$$\max_{q_2 \in P_2(q_1^*)} J_2\left(\operatorname{Arg} \max_{q_1 \in P_2(q_2)} J_1(q_1, q_2) \right) = \max_{q_2 \in P_2(q_1^*)} J_2(a_{42}, a_{43}) = J_2(a_{42}).$$

Таким образом, при замене в (1) пустой матрицы A матрицей P удалось найти всего одну ситуацию, являющуюся наисильнейшим D^P-равновесием в задаче типа 1.

Рассмотрим далее исходную задачу в классе сильных угроз как задачу типа (2) и будем отмечать равновесия в этом классе индексом s. Заметим, что множество A в классе сильных угроз теперь уже не является пустым и нет необходимости в этом классе прибегать к весьма трудоемкому поиску множества P:

$$A_1^s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & + \\ + & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2^s = \begin{pmatrix} + & + & \cdot & + \\ + & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A^s = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}.$$

При этом оказалось, что множество B в классе сильных угроз включает только одну игровую ситуацию a_{42}:

$$B_1^s = (a_{33}, a_{42}), \; B_2^s = (a_{11}, a_{42}, a_{34}, a_{43}), \; B^s = a_{42},$$

которая является еще и весьма сильным $\overline{D}'$-равновесием.

Поскольку в задаче типа 1 (с заменой в ней множества A на P) и в задаче типа 2 (в классе сильных угроз) наисильнейшее равновесие оказалось одним и тем же и единственным ($D^{p} = \overline{D}' = a_{42}$), справедливый дележ кооперативного дохода (всегда наиболее выгодного для игроков в любых конфликтных задачах), равного в данной задаче 14 и достигаемого в ситуации a_{43}, одинаков для обоих типов задач и вычисляется по формулам [14, с. 174]:

$$y_1 = 14 \cdot \frac{2}{9} \approx 3{,}1, \quad y_2 = 14 \cdot \frac{7}{9} \approx 10{,}9,$$

где доля y_1 первого игрока задается произведением кооперативного дохода на дробь, числитель которой равен доходу первого игрока в наисильнейшей равновесной ситуации, а знаменатель — сумме доходов обоих игроков в этой ситуации. Аналогично определяется справедливая доля y_2 второго игрока.

Чтобы получить полную оценку влияния побочных доходов игроков на решение игры, необходимо рассмотреть еще и задачу типа 3, особенно важную потому, что она ставится на пересечении игровых множеств участников, т.е. именно на том множестве, на котором по существу и сталкиваются интересы (конкурентные отношения) участников.

Во вспомогательной игре на множестве G (т.е. на пересечении игровых множеств участников) платежными функциями игроков являются следующие:

$$J_1^G = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 3 & 8 \\ \cdot & 2 & 9 & \cdot \end{pmatrix}, \quad J_2^G = \begin{pmatrix} 8 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & 1 \\ \cdot & 7 & 5 & \cdot \end{pmatrix}.$$

В этой вспомогательной игре множество A не может быть пустым и задается матрицами

$$A_1^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & + \\ \cdot & + & + & \cdot \end{pmatrix}, \quad A_2^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad A^G = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & + & \cdot \\ \cdot & + & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Усилениями этого A^G-равновесия являются следующие равновесия:

$$B_1 = B_2 = B = \overline{D}' = (a_{11}, a_{33}, a_{42}), \ \overline{D}_1 = a_{33}, \ \overline{D}_2 = a_{11}, \ \overline{D} = \varnothing.$$

Таким образом, в отличие от предыдущих двух вспомогательных задач во вспомогательной игре на пересечении игровых множеств имеются три эквивалентных наисильнейших равновесных ситуации, среди которых не удается выделить единственного наисильнейшего равновесия. Несовпадение наисильнейших равновесий в каких-либо из трех вспомогательных игровых постановок (1)–(3) свидетельствует о некотором влиянии побочных доходов на решение игры.

Если исходная игра бескоалиционная (а в подобных играх в качестве решения обычно принимают ситуацию наисильнейшего равновесия), то следует признать, что побочные доходы оказывают слабое влияние на ее решение.

Если рассматриваемая игра кооперативная (а в подобных играх в качестве решения используется справедливый дележ), то убедимся, что побочные доходы в ней тоже влияют на решение, хотя и весьма незначительно. Подсчитаем справедливый кооперативный дележ во вспомогательной игре (3), учитывая, что в ней реализуются три эквивалентных наисильнейших равновесия. Воспользовавшись формулами [14, с. 175], получим дележ

$$y_1 = 14 \cdot \frac{1+3+2}{25} \approx 3{,}4, \quad y_2 = 14 \cdot \frac{8+4+7}{25} \approx 10{,}6,$$

очень близкий к найденному ранее для вспомогательных игр типов 1 и 2 (доля y_i i-го игрока задается произведением кооперативного дохода на дробь, числитель которой равен сумме выигрышей i-го игрока в трех наисильнейших эквивалентных равновесных ситуациях, а знаменатель — сумме выигрышей обоих игроков в этих ситуациях).

В задачах, где значительно влияние побочных доходов, необходимо применять предложение 1.

Таким образом, новое D^P-равновесие весьма существенно не только в играх с побочными интересами участников, но и в большинстве классических игр на едином для всех участников игровом множестве, а также в любых дифференциальных играх.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ПОБОЧНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ УЧАСТНИКОВ

Рассмотрим возможности использования нового D^P-равновесия для поиска решения динамических задач, описываемых дифференциальными уравнениями. Для их решения более приемлемым, чем понятие A-равновесия, является некоторое его усиление, названное A^c-равновесием ($A^c \subseteq A$) [9–16]. Для последнего (в отличие от A-равновесия) возможно определение необходимых условий равновесности, аналогичных необходимым условиям оптимальности для вариационных задач, на основе которых, в свою очередь, появляется возможность сведения исходной дифференциальной игры к некоторой совокупности статических «локальных» игровых задач (где платежные функции — гамильтонианы), решаемых несоизмеримо проще, чем исходная игра.

Рассмотрим конфликтующие динамические системы (в постановке работы [11]), описываемые дифференциальными уравнениями, в которых i-й участник ($i = 1, \ldots, N$), используя чистые $u_i(t)$ или смешанные стратегии $q_i(u_i, t)$, стремится обеспечить максимум своего функционала (критерия):

$$J_i(q) = \int_T dt \int_{W_i(t)_i} f_0^i(u, x, t) dq, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \int_{W'(t)} f(u, x, t)\, dq, \quad t \in T = [t_0, t_1] \subseteq E^1, \tag{6}$$

$$(u, t) \in W' \subset U \times T, \tag{7}$$

$$x_j(t_0) = x_j^0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad x_k(t_1) = x_k^1, \quad k \in K \subseteq 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ — евклидово n-мерное пространство; $U = \bigcup_{k=1}^{N} U_k$, U_k — конечномерное пространство, $k = 1, \ldots, N$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_N(t))$; $W' = \bigcup_{k=1}^{N} W_k$, W_k — компактные множества в U; $W(t)$ и $W'(t)$ — сечения множеств W и W' в момент $t \in T$; $\hat{U}_i = \mathrm{Pr}_{U_i} W'$ — проекция множества W' на U_i; $q_i(u_i, t)$ — смешанная стратегия i-го участника, $q = q_1 \ldots q_N$; $q^i = q_1 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_N$; Q_i —

множество всех смешанных стратегий $q_i(u_i, \cdot)$ i-го игрока в задаче (5), (6) с начальным условием $x(t_0) = x^0$ и с заменой множества W' множеством $\hat{U} = \hat{U}_1 \times \ldots \times \hat{U}_N$. Однако в задаче (5)–(8) уравнению (6) при ограничениях (7), (8) удовлетворяют не все перечисленные ранее возможные стратегии $q_i \in Q_i$, $i = 1, \ldots, N$, а только те из них, которые обеспечивают удовлетворение ограничениям (7), (8); они образуют некоторое компактное подмножество G' в пространстве $Q_1 \times \ldots Q_N$.

Допущение 2. Пусть множество W — компакт в $U \times T$; отображение $\hat{f}(f_0^1, \ldots, f_0^N, f_1, \ldots, f_n) : U \times E^n \times T \to E^{n+N}$ таково, что функция $\hat{f}(u, x, \cdot)$ измерима (по Лебегу) при всех $u \in U$, $x \in E^n$, а функция $\hat{f}(\cdot, \cdot, t)$ при каждом $t \in T$ непрерывна; функция $\hat{f}$ мажорируется на T функцией $s(t)(|x| + 1)$, где $s(t)$ — некоторая интегрируемая функция; $x(t) : T \to E^n$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнению (6); кроме того, функция $\hat{f}$ удовлетворяет с интегрируемой функцией $b(t)$ условию Липшица

$$| \hat{f}(u, \bar{x}, t) - \hat{f}(u, x, t) | \le b(t) | \bar{x} - x |$$

для всех $u \in U$; $x, \bar{x} \in E^n$, $t \in T$.

Отметим, что найти необходимые условия существования A-равновесий в дифференциальных играх в форме, аналогичной известной для вариационных задач, к сожалению, нельзя принципиально. Если A-равновесие несколько усилить, назвав его усиленный аналог A^c-равновесием, то вполне возможно найти удобные для приложений необходимые условия.

Для поиска решения дифференциальных игр воспользуемся понятием A^c-равновесия, которое получается из определения 1 A-равновесия для игровых задач на пересекающихся множествах добавлением в последнее после перечисления требований (1)–(3) некоторого дополнительного требования, содержащегося в следующем определении.

Определение 7. Ситуация q^* в дифференциальной игре (5)–(8) A^c-экстремальна, если каждое из отношений (1)–(3) выполняется при условии, что ненулевое (в смысле меры Лебега) множество в T, на котором $\hat{q}^i(t) \ne q^{i*}(t)$, является подмножеством множества из T, на котором $q_i(t) \ne q_i^*(t)$. Назовем ситуацию q^* A^c-равновесием в задачах типа 1–3, если соответственно требования (1)–(3) удовлетворяются в точке q^* для всех $i = 1, \ldots, N$, т.е. если $A^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_N^c$.

По аналогии с A^c-равновесием можно ввести понятие P^c-равновесия.

Если в формулировку задачи не входят произведения фазовых координат и управлений и задача линейна по фазовым координатам, то можно принять $A^c = A$ и с помощью приведенных далее необходимых условий A^c-равновесия свести решение исходной дифференциальной игры к решению некоторых вспомогательных («локальных») статических игр, в которых платежными функциями являются гамильтонианы игроков исходной дифференциальной игры [9–15]. Заметим, что если $A^c \ne A$, то всегда имеется возможность проверить оптимальность найденного решения (равновесность).

Для поиска решений дифференциальных игр с побочными интересами участников можно воспользоваться соответствующими модификациями необходимых условий существования равновесий, полученных в [9–15], в частности, следующей теоремой из [11].

Теорема 1. Пусть q^* — A^c-равновесие в задаче с N участниками. Тогда найдется N ненулевых абсолютно непрерывных вектор-функций $p^i(t) = = (p_0^i, p_1^i(t), \ldots, p_n^i(t))$, $p_0^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих почти всюду в T уравнениям

$$\dot{p}_k^i = -\int \int_{W(t)} p^i \frac{\partial f^i}{\partial x_k} dq^*, \ k = 1, \ldots, n, \ i = 1, \ldots, N, \ p_j^i(t_1) = 0, \ j \notin K, \tag{9}$$

где $f^i = (f_0^i, f_1, \ldots, f_n)$; гамильтонианы

$$H^i = \int_{W(t)} p^i f^i dq^* \tag{10}$$

непрерывны в T; A^c-равновесная ситуация q^* удовлетворяет отношениям

$$H^i(\hat{q}^i, q_i) \leq H^i(q^*), \ q_i \in G(q^{i*}), \ \hat{q}^i \in G(q_i), \ i = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

В отношении всех других базовых равновесий, более сильных, чем A^c -равновесие, справедливы некоторые естественные аналоги уравнений (9)–(11) [7–12], причем все статические понятия равновесий переносятся на динамические задачи без каких-либо дополнительных осложнений.

Пример 2. Рассмотрим конфликтную задачу с двумя участниками в классе чистых стратегий (рис. 2). Игроки выбором стратегий $u_1(t)$ и $u_2(t)$ стремятся обеспечить максимумы своих платежных функционалов соответственно

$$J_1 = \int_0^2 x_1 dt, \ J_2 = \int_0^2 x_2 dt$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1 = f_1(u_1, u_2) = (u_1 - u_2)^2,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(u_1, u_2) = (u_1 + u_2)^2,$$

$$x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 0, \ u_1 \in [0,1], \ u_2 \in [0,1].$$

На рис. 2 замкнутый треугольник $[OEFO]$ — игровое множество W_2 второго игрока, замкнутый квадрат $[OEFHO]$ — игровое множество W_1 первого игрока, замкнутый треугольник $[OFHO]$ — множество побочных доходов первого игрока, а замкнутый треугольник $[OEFO]$ — множество, на котором оба участника конкурируют при получении своих доходов. Здесь также приведены некоторые характерные уровни значений платежных функций $f_1 = \text{const}$ и $f_2 = \text{const}$ участников игры.

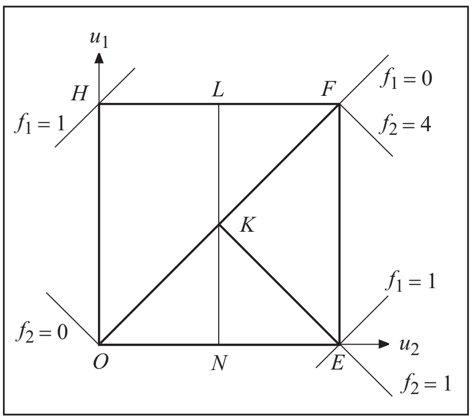

Рис. 2

Рассматриваемую дифференциальную игру можно свести к решению всего одной вспомогательной («локальной») статической игры, в которой платежными функциями являются гамильтонианы игроков.

Найдем вначале решение уравнений (9) и приведем на его основе гамильтонианы игры к виду, удобному для формулировки «локальной» игры. С учетом того, что гамильтонианы имеют вид

$$H^1 = p_0^1 x_1 + p_1^1 (u_1 - u_2)^2 + p_2^1 (u_1 + u_2)^2,$$

$$H^2 = p_0^2 x_2 + p_1^2 (u_1 - u_2)^2 + p_2^2 (u_1 + u_2)^2,$$

уравнения (9) можно свести к уравнениям

$$\dot{p}_2^2 = -p_0^2, \;\; p_2^2(2) = 0, \;\; \dot{p}_1^2 = 0, \;\; p_1^2(2) = 0,$$

$$\dot{p}_1^1 = -p_0^1, \;\; p_1^1(2) = 0, \;\; \dot{p}_2^1 = 0, \;\; p_2^1(2) = 0,$$

которые имеют следующие очевидные решения:

$$p_1^1 = p_0^1(2-t) = (2-t), \;\; p_2^1 = 0,$$

$$p_2^2 = p_0^2(2-t) = (2-t), \;\; p_1^2 = 0.$$

Подставив эти решения в гамильтонианы, приводим последние к виду

$$H^1 = x_1 + (2-t)\,(u_1 - u_2)^2, \;\; H^2 = x_2 + (2-t)\,(u_1 + u_2)^2.$$

Поскольку $(2-t) > 0$ на всей траектории (кроме несущественной точки $t = 2$), исходная дифференциальная игра по существу сводится к статической «локальной» (т.е. к статической игре в каждый момент t) с платежными функциями

$$f_1 = (u_1 - u_2)^2, \;\; f_2 = (u_1 + u_2)^2. \tag{12}$$

Отметим, что для поиска решения в построенной вспомогательной «локальной» игре (12) с использованием предлагаемых новых P- и D^P-равновесий необходимо предварительно построить отображение множеств W_1 и W_2 на плоскость (f_1, f_2), что и выполнено на рис. 3.

Отображения точек на рис. 2 и на рис. 3 обозначены одинаково. Причем треугольники $[OFHO]$ и $[OEFO]$ отображаются в одно и то же замкнутое множество $[ONEFO] = [OHLFO]$.

Найдем множества P_1, P_2 и P, а также их усиление — множество D^P. Легко видеть (см. рис. 2), что при любой заданной стратегии первого игрока максимум доходов второго игрока достигается на множестве $[EF]$. Однако из определения 2 следует, что множество максимумов обязательно принадлежит множеству P_2. На рис. 3 видно, что никакие другие точки из множества W_2 не могут принадлежать множеству P_2. Нетрудно убедиться также в том, что множество P_1 должно содержать пару отрезков: $[HL]$ и $[NE]$. Это следует из того, что при любой фиксированной стратегии u_2 платежная функция первого игрока достигает максимума именно на этих отрезках (см. рис. 2). Никакие другие точки области W_2 не принадлежат множеству P_2.

Таким образом, получаем, что $P = P_1 \cap P_2 = E$. Выясним, является ли ситуация E всего лишь P-равновесием или существенно более сильным равновесием, например D^P-равновесием:

$$\operatorname{Arg} \max_{q_1 \in P_1(q_2^*)} J_1 \left(\operatorname{Arg} \max_{q_2 \in P_1(q_1)} J_2(q_1, q_2) \right) = \operatorname{Arg} \max_{q_1 \in P_1(q_2^*)} J_1(E) = E,$$

$$\operatorname{Arg} \max_{q_2 \in P_2(q_1^*)} J_2 \left(\operatorname{Arg} \max_{q_1 \in P_2(q_2)} J_1(q_1, q_2) \right) = \operatorname{Arg} \max_{q_2 \in P_2(q_1^*)} J_2(E) = E.$$

Итак, предварительный результат свидетельствует о том, что ситуация E является по крайней мере D^P-равновесием. Найдем другие равновесия в игре (12).

В классе слабых угроз (1) получаем (см. рис. 2 и рис. 3):

$$A_1 = [OEFH],\ A_2 = [EFK],\ A = A_1 \cap A_2 = [EFK];$$

$$B_1 = [EF],\ B_2 = [EK] \cup [LN],\ B = E;$$

$$\overline{D}_1 = E,\ \overline{D}_2 = [EK],\ \overline{D} = E.$$

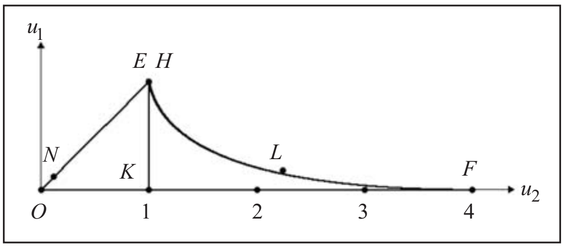

Рис. 3

В рассматриваемой «локальной» игре (12) на пересекающихся игровых множествах в классе сильных угроз (т.е. в игре типа 2 (2)), а также во вспомогательной игре (типа 3 (3)) на множестве $[OEFO]$, на котором игроки вступают в явные конкурентные (конфликтные) взаимоотношения, решение аналогичное.

Итак, во всех вспомогательных играх (1)–(3) ситуация E из рис. 2 — единственное наисильнейшее равновесие, что свидетельствует о том, что побочные доходы по существу не влияют на решение. Это очень благоприятно для участников, но реализуется довольно редко.

Равновесная ситуация E (см. рис. 2) определяет пару равновесных стратегий участников $(u_1^*, u_2^*) = (0, 1)$. Подставляя эту пару в исходную дифференциальную игру, получаем

$$\dot{x}_1 = (u_1^* - u_2^*)^2 = 1,\ \dot{x}_2 = (u_1^* + u_2^*)^2 = 1.$$

Интегрируя эти уравнения, находим $x_1 = x_2 = t$, а подставляя данные решения в платежные функционалы, определяем следующие выигрыши участников в равновесной ситуации E:

$$J_1 = \int_0^2 x_1 dt = 2,\ J_2 = \int_0^2 x_2 dt = 2.$$

Если игроки кооперируются, то имеют возможность выиграть значительно больше, чем в равновесной ситуации. Как видно из рис. 2, кооперативное решение достигается в точке F. Учитывая, что уравнения движения в случае кооперативного решения приводятся к виду $\dot{x}_1 = 0,\ \dot{x}_2 = 4$, а их решения — к виду $x_1(t) = 0,\ x_2(t) = 4t$, получаем, что совместный выигрыш участников в кооперативной ситуации F равен $J_1 + J_2 = J_2 = \int_0^2 4t\,dt = 8$, что гораздо больше, чем сумма их выигрышей $J_1 + J_2 = 2 + 2 = 4$ в наисильнейшей равновесной ситуации $(u_1^*, u_2^*) = (0, 1)$. Вследствие равенства доходов участников в единственной наисильнейшей равновесной ситуации E справедливый дележ дохода, определяемый формулами [14, с. 174], приводит к равенству доходов участников в этой дифференциальной игре: $J_1 = J_2 = 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное в работе довольно сильное понятие D^P-равновесия весьма эффективно можно использовать для поиска решения любых конфликтных задач на едином для участников игровом множестве и на пересекающихся игровых множествах как для статических, так и динамических задач, описываемых системами дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 480 с.
2. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. — М.: Физматлит, 1960. — 420 с.
3. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономические поведение. — М.: Наука, 1970. — 708 с.
4. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 324 с.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 350 с.
6. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Сов. радио, 1980. — 304 с.
7. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 495 с.
8. Чикрий А.А. Конфликтно-управляемые процессы. — Киев: Наук. думка, 1992. — 212 с.
9. Смольяков Э.Р. Управление конфликтами с побочными интересами участников. — Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2013. — 154 с.
10. Смольяков Э.Р. Теория решения дифференциальных игр с побочными интересами участников // Дифференциальные уравнения. — 2014. — **50**, № 12. — С. 1647–1659.
11. Смольяков Э.Р. Индивидуально-паретовские равновесия для игровых задач с побочными интересами участников // Кибернетика и системный анализ. — 2015. — **51**, № 2. — С. 29–41.
12. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 160 с.
13. Смольяков Э.Р. Теория конфликтных равновесий. — М.: Эдиториал УРСС, 2005. — 304 с.
14. Смольяков Э.Р. Методы решения конфликтных задач. — М.: МГУ, 2010. — 244 с.
15. Смольяков Э.Р. Обобщенное оптимальное управление и динамические конфликтные задачи. — М.: МГУ, 2010. — 232 с.
16. Смольяков Э.Р. Равновесные модели при несовпадающих интересах участников. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
17. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения мгогокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

Надійшла до редакції 16.07.2015

Е.Р. Смольяков

НОВІ РІВНОВАГИ ДЛЯ ІГОР З ПОБІЧНИМИ ІНТЕРЕСАМИ УЧАСНИКІВ

Анотація. Наведено ускладнені поняття рівноваги для статичних і динамічних конфліктних задач (описаних диференціальними рівняннями), що розглядаються як на єдиній для всіх учасників ігровій множині, так і на ігрових множинах, що частково перетинаються. Ці поняття корисні для пошуку найсильнішої рівноваги у будь-яких задачах і для визначення справедливого розподілу кооперативного доходу.

Ключові слова: ігри на множинах, що перетинаються, ускладнені рівноваги.

E.R. Smol’yakov

NEW EQUILIBRIA FOR GAMES WITH LATERAL INTERESTS OF PARTICIPANTS

Abstract. The author proposes advanced concepts of equilibrium for static and dynamic conflict problems described by differential equations. The problems are considered both on the game set common for all the participants and on partially intersecting game sets. These concepts are useful to search for the strongest equilibrium in any problems and to find a fair sharing of co-operative income.

Keywords: games on intersected sets, complex equilibria.

Смольяков Эдуард Римович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Россия, e-mail: ser-math@rambler.ru.