УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА M/G/1/m С ГИСТЕРЕЗИСНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания M/G/1/m с гистерезисными стратегиями случайного отбрасывания заявок и управления временем обслуживания. Получены формулы для определения преобразований Лапласа распределения числа заявок в системе в течение периода занятости, функции распределения периода занятости и формулы для вычисления стационарных характеристик. Соотношения для стационарных характеристик проверены на примерах с помощью имитационных моделей, построенных с использованием инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: одноканальная система обслуживания, гистерезисные стратегии, случайное отбрасывание заявок, метод потенциалов.

ВВЕДЕНИЕ

В целях предотвращения перегрузок в информационно-телекоммуникационных системах, моделируемых с помощью систем обслуживания, используется гистерезисное управление нагрузкой [1]. Можно осуществлять управление как входящим потоком и его параметрами, так и интенсивностью (временем) обслуживания. В силу практической важности исследованию систем обслуживания с гистерезисными стратегиями функционирования посвящено множество научных публикаций. В частности, достаточно подробный обзор полученных результатов приведен в [2–4].

Эффективным способом управления интенсивностью входящего потока является стратегия случайного отбрасывания заявок, когда каждую поступившую заявку можно отбросить с определенной вероятностью, зависящей от длины очереди в момент прибытия заявки, даже если буфер еще полностью не заполнен [5]. Зависимость вероятности отбрасывания заявок от длины очереди называют функцией отбрасывания. Стратегии управления интенсивностью обслуживания строятся исходя из предположения, что распределение времени обслуживания зависит от числа заявок в системе в момент начала обслуживания каждой из них [6, 7].

Алгоритмы вычисления стационарных характеристик систем типа $M^{\theta}/G/1/m$ и $M^{\theta}/G/1$ с гистерезисными стратегиями функционирования созданы с помощью метода потенциалов [4, 8–10]. Здесь $M^{\theta}/G/1/m$ — система типа M/G/1/m, в которую заявки поступают группами численностью θ, причем $\mathbf{P}\{\theta = k\} = a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k < \infty$.

Метод потенциала с одним базовым случайным блужданием разработан в целях исследования системы $M^{\theta}/G/1/m$ с одним фиксированным распределением времени обслуживания [11] с использованием подхода, предложенного в [12]. Метод потенциалов предназначен для изучения систем с несколькими режимами функционирования, когда возникает необходимость применения стольких базовых случайных блужданий и их потенциалов сколько и различных режимов функционирования.

В работах [4, 8–10] рассматривались гистерезисные стратегии с возможностью переключения режимов функционирования системы обслуживания только в моменты начала обслуживания заявок. Цель настоящей статьи — получение с помощью метода потенциалов формул для определения стационарного распределения числа заявок в системе типа M/G/1/m, в которой применяется двухпороговая гистерезисная стратегия управления интенсивностью входящего потока и временем обслуживания, допускающая переключение режимов управления входящим потоком в моменты изменения числа заявок в системе. Предполагается, что управление интенсивностью входящего потока осуществляется с помощью случайного отбрасывания заявок. Каждую поступающую заявку можно принять на обслуживание или отбросить согласно правилу: если в момент прибытия заявки в системе находятся n заявок, то поступившая принимается в очередь с вероятностью β_n и покидает систему (получает отказ, отбрасывается) с вероятностью $1-\beta_n$. Для рассматриваемой гистерезисной стратегии управления входящим потоком используются два набора вероятностей: β_n и $\widetilde{\beta}_n$, соответствующие основному режиму функционирования системы и режиму перегрузки.

Кроме стационарного распределения числа заявок, в работе найдены преобразования Лапласа распределения числа заявок в системе в течение периода занятости и функции распределения периода занятости, а также получены формулы для стационарных характеристик: средней продолжительности периода занятости, относительной пропускной способности системы, средней длины очереди и среднего времени ожидания.

ОПИСАНИЕ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ СТРАТЕГИЙ

Рассмотрим систему M/G/1/m, где m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Входящий поток заявок простейший, т.е. интервалы времени между моментами прибытия соседних заявок — независимые случайные величины, показательно распределенные с параметром λ.

Гистерезисная стратегия функционирования системы (назовем соответствующую ей систему обслуживания системой 1) основана на использовании двух режимов управления входящим потоком и временем обслуживания: основного и режима перегрузки. Переключение режимов управления временем обслуживания осуществляется только в моменты начала обслуживания заявок, а режимов управления входящим потоком — в моменты изменения числа заявок в системе. Управление временем обслуживания проводится согласно правилу: если в момент начала обслуживания заявки их число в системе равно n, то время обслуживания этой заявки — случайная величина с функцией распределения $F_n(x)$ для основного режима и с функцией распределения $\widetilde{F}_n(x)$ для режима перегрузки. Зафиксировав пороговые значения h_1 и h_2 $(1 \le h_1 < h_2 < m)$, предположим, что прибывшая заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_n $(1 \le n \le h_2)$ для основного режима управления входящим потоком и с вероятностью $\widetilde{\beta}_n$ $(h_1+1 \le n \le m+1)$ для режима перегрузки, где n — число заявок в системе в момент прибытия заявки (без учета поступившей), причем $\beta_1 = 1$, $\widetilde{\beta}_{m+1} = 0$, а среди вероятностей β_n $(1 \le n \le h_2)$ и $\widetilde{\beta}_n$ $(h_1+1 \le n \le m+1)$ не существует одинаковых. Основной режим управления входящим потоком функционирует, если число заявок в системе не превышает значения h_1, а режим перегрузки – если число заявок в системе превышает значение h_2. Аналогичное правило вводится для режимов управления временем обслуживания, но переключение этих режимов допускается только в моменты начала обслуживания заявок. Режим перегрузки управления входящим потоком функционирует от момента, когда число заявок в системе достигает значения h_2+1, до момента, когда оно уменьшается до значения h_1. Переключение с основного режима управления временем обслуживания на режим перегрузки осуществляется в момент начала обслуживания той заявки, для которой число заявок в системе равно h_2.

В момент начала обслуживания заявки режимы управления входящим потоком и временем обслуживания совпадают, и только режим управления входящим потоком может измениться в течение обслуживания одной заявки.

Рассмотрим два частных случая описанной общей гистерезисной стратегии, для которых вероятностные характеристики базовых случайных блужданий метода потенциалов определяются по-разному и иначе, чем для системы 1. Назовем системой 2 частный случай системы 1, когда $\widetilde{\beta}_n = \widetilde{\beta}$ $(0 < \widetilde{\beta} < 1)$ при $h_1 + 1 \le n \le m$, и системой 3 частный случай системы 1, когда $\beta_n = 1$ при $1 \le n \le h_2$ и $\widetilde{\beta}_n = \widetilde{\beta}$ $(0 < \widetilde{\beta} < 1)$ для $h_1 + 1 \le n \le m$. Предположим, что $\widetilde{\beta} \ne \beta_n$ для всех $1 \le n \le h_2$.

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЗОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

Пусть $\mathbf{P}_n$ — условная вероятность, если в начальный момент времени, совпадающий с моментом начала обслуживания заявки, в системе находятся n заявок и система функционирует в основном режиме, а $\widetilde{\mathbf{P}}_n$ — соответствующая условная вероятность для режима перегрузки. Положим

$$f_n(s) = f_n^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_n(x),\ f_n^{(i)}(s+\lambda) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-(s+\lambda)x} dF_n(x),\quad i = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\widetilde{f}_n(s) = \widetilde{f}_n^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\widetilde{F}_n(x),\ \widetilde{f}_n^{(i)}(s+\widetilde{\lambda}) = \int_0^\infty \frac{(\widetilde{\lambda} x)^i}{i!} e^{-(s+\widetilde{\lambda})x} d\widetilde{F}_n(x),\ i = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$M_n = \int_0^\infty x dF_n(x) < \infty,\ \widetilde{M}_n = \int_0^\infty x d\widetilde{F}_n(x) < \infty,\ \overline{F}_n(x) = 1 - F_n(x),\ \overline{\widetilde{F}}_n(x) = 1 - \widetilde{F}_n(x).$$

Для основного режима управления временем обслуживания введем последовательности $\pi_{ni}(s)$ и $q_{ni}(s)$, определяемые с помощью соотношений

$$\pi_{ni}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n \{\eta(x) = i+1\}\, dF_n(x),\ i \in \{-1, 0, 1, \ldots, m-n-1\};$$

$$\pi_{n,m-n}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n \{\eta(x) \ge m-n+1\}\, dF_n(x); \tag{1}$$

$$q_{ni}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n \{\eta(x) = i\}\, \overline{F}_n(x) dx,\ i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-n\};$$

$$q_{n,m-n+1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_n \{\eta(x) \ge m-n+1\}\, \overline{F}_n(x) dx. \tag{2}$$

Здесь $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему за промежуток времени $[0; x)$, $\operatorname{Re} s \ge 0$, $n \in \{1, 2, \ldots, h\}$, $h = h_2 - 1$. Последовательность $\pi_{ni}(s)$ при $s > 0$ и фиксированном n можно трактовать как распределение скачков некоторого полунепрерывного снизу случайного блуждания S_n (которое назовем базовым), соответствующего функции распределения $F_n(x)$ времени обслуживания и вероятностям $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = i+1\}$. Функция $R_n(s) = \dfrac{1}{f_n(s)\pi_{n,-1}(s)}$ $(n \in \{1, 2, \ldots, m\})$ называется резольвентой, а постоянная $R_n = \lim\limits_{s \to +0} R_n(s)$ — потенциалом случайного блуждания S_n.

Режиму перегрузки управления временем обслуживания при $n \in \{h_1+1, h_1+2, \ldots, m\}$ соответствуют последовательности $\widetilde{\pi}_{ni}(s)$, $\widetilde{q}_{ni}(s)$ и $\widetilde{R}_n(s)$ вида

$$\widetilde{\pi}_{ni}(s) = \frac{1}{\widetilde{f}_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) = i+1\} d\widetilde{F}_n(x), \quad i \in \{-1, 0, 1, \ldots, m-n-1\};$$

$$\widetilde{\pi}_{n,m-n}(s) = \frac{1}{\widetilde{f}_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) \ge m-n+1\}\, d\widetilde{F}_n(x); \tag{3}$$

$$\widetilde{q}_{ni}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) = i\} \overline{\widetilde{F}}_n(x) dx, \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots, m-n\};$$

$$\widetilde{q}_{n,m-n+1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) \ge m-n+1\} \overline{\widetilde{F}}_n(x) dx; \quad \widetilde{R}_n(s) = \frac{1}{\widetilde{f}_n(s) \widetilde{\pi}_{n,-1}(s)}.$$

Пусть T_n, $\widetilde{T}_n$, $\widetilde{T}$ и T — показательно распределенные случайные величины с параметрами $\lambda_n = \lambda\beta_n$, $\widetilde{\lambda}_n = \lambda\widetilde{\beta}_n$, $\widetilde{\lambda} = \lambda\widetilde{\beta}$ и λ соответственно, а Z_n — случайная величина, распределенная по закону Паскаля, т.е. $\mathbf{P}\{Z_n = k\} = \beta_n^k (1-\beta_n)^{n-k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Известно [13, с. 95], что $Z_n T = T_n$, т.е. в результате случайного прореживания простейшего потока получаем простейший поток.

Для вычисления вероятностей $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = i\}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) = i\}$ для системы 1 необходимо найти распределения случайных величин $\sum_i T_i$, $\sum_j \widetilde{T}_j$ и $\sum_i T_i + \sum_j \widetilde{T}_j$, для системы 2 — распределения случайных величин $\sum_i T_i$, $j\widetilde{T}$ и $\sum_i T_i + j\widetilde{T}$, а для системы 3 — распределения случайных величин iT, $j\widetilde{T}$ и $iT + j\widetilde{T}$. Формулы для вычисления приведенных распределений получены в [14].

С учетом выражений для $\mathbf{P}_n\{\eta(x) = i\}$, $\widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x) = i\}$ [14] и равенств

$$\int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-(s+\lambda)x} \overline{F}_n(x) dx = g_{nk}(s+\lambda) = \frac{\lambda^k}{(s+\lambda)^{k+1}} \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{s+\lambda}{\lambda} \right)^i f_n^{(i)}(s+\lambda) \right),$$

$$\int_0^\infty \frac{(\widetilde{\lambda} x)^k}{k!} e^{-(s+\widetilde{\lambda})x} \overline{\widetilde{F}}_n(x) dx = \widetilde{g}_{nk}(s+\widetilde{\lambda}) = \frac{\widetilde{\lambda}^k}{(s+\widetilde{\lambda})^{k+1}} \left(1 - \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{s+\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}} \right)^i \widetilde{f}_n^{(i)}(s+\widetilde{\lambda}) \right)$$

по формулам (1)–(3) вычислим члены последовательностей $\pi_{ni}(s)$, $q_{ni}(s)$, $\widetilde{\pi}_{ni}(s)$ и $\widetilde{q}_{ni}(s)$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_n = \begin{cases} \lambda_n, & 1 \le n \le h_2, \\ \widetilde{\lambda}_n, & h_2+1 \le n \le m; \end{cases}$$

$$G_{(n,n+j),r}(x) = \mathbf{P}\left\{ \sum_{i=n}^{n+j} T_i + r\widetilde{T} < x \right\} =$$

$$= 1 - \frac{(-1)^j \widetilde{\lambda}^r}{(r-1)!} \prod_{l=n}^{n+j} \lambda_l \sum_{i=n}^{n+j} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n \\ s \ne i}}^{n+j} (\lambda_i - \lambda_s)} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k \frac{(r-1-k)!}{(\widetilde{\lambda} - \lambda_i)^{r-k}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k} \frac{(k+\nu)!(\lambda_i - \widetilde{\lambda})^{\nu}}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}} e^{-\lambda_i x} \sum_{\alpha=0}^{k+\nu} \frac{(\lambda_i x)^{\alpha}}{\alpha!} - \frac{k!}{\widetilde{\lambda}^{k+1}} e^{-\widetilde{\lambda} x} \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{(\widetilde{\lambda} x)^{\alpha}}{\alpha!} \right),$$

$$1 \le j \le h-n,\ 1 \le r \le m-h;$$

$$G_{(n,n+j),0}(x) = \mathbf{P}\left\{ \sum_{i=n}^{n+j} T_i < x \right\} = 1 - (-1)^j \prod_{k=n}^{n+j} \lambda_k \sum_{i=n}^{n+j} \frac{e^{-\lambda_i x}}{\lambda_i \prod\limits_{\substack{s=n \\ s \ne i}}^{n+j} (\lambda_i - \lambda_s)},\ 1 \le j \le h-n;$$

$$G_{n,r}(x) = \mathbf{P}\{nT + r\widetilde{T} < x\} =$$

$$= 1 - \frac{(-1)^n \lambda^n \widetilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\widetilde{\lambda} - \lambda)^{n+r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^{k} (n+r-2-k)!(\widetilde{\lambda} - \lambda)^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k} (-1)^{j+1} \frac{(k+j)!(\widetilde{\lambda} - \lambda)^j}{j!\,\lambda^{k+j+1}} e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{k+j} \frac{(\lambda x)^i}{i!} + \frac{k!}{\widetilde{\lambda}^{k+1}} e^{-\widetilde{\lambda} x} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\widetilde{\lambda} x)^i}{i!} \right),$$

$$1 \le r \le m-h;$$

$$G_{n,0}(x) = \mathbf{P}\{nT < x\} = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Для системы 1 находим:

$$\pi_{n,-1}(s) = \frac{f_n(\lambda_n + s)}{f_n(s)},\ q_{n0}(s) = \frac{1 - f_n(\lambda_n + s)}{\lambda_n + s},\ 1 \le n \le h;$$

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{(-1)^j}{f_n(s)} \prod_{k=n}^{n+j-1} \alpha_k \sum_{i=n}^{n+j} \frac{f_n(\alpha_i + s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=n \\ \nu \ne i}}^{n+j} (\alpha_i - \alpha_\nu)},$$

$$q_{nj}(s) = (-1)^j \prod_{k=n}^{n+j-1} \alpha_k \sum_{i=n}^{n+j} \frac{1 - f_n(\alpha_i + s)}{(\alpha_i + s) \prod\limits_{\substack{\nu=n \\ \nu \ne i}}^{n+j} (\alpha_i - \alpha_\nu)},\ 1 \le n \le h,\ 1 \le j \le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s) = \frac{(-1)^{m-n}}{f_n(s)} \prod_{k=n}^{m} \alpha_k \sum_{i=n}^{m} \frac{f_n(s) - f_n(\alpha_i + s)}{\alpha_i \prod\limits_{\substack{\nu=n \\ \nu \ne i}}^{m} (\alpha_i - \alpha_\nu)},\ 1 \le n \le h;$$

$$q_{n,m-n+1}(s) = (-1)^{m-n} \prod_{k=n}^{m} \alpha_k \sum_{i=n}^{m} \frac{\dfrac{1 - f_n(s)}{s} - \dfrac{1 - f_n(\alpha_i + s)}{\alpha_i + s}}{\alpha_i \prod\limits_{\substack{\nu=n \\ \nu \ne i}}^{m} (\alpha_i - \alpha_\nu)},\ 1 \le n \le h;$$

$$\widetilde{\pi}_{n,-1}(s) = \frac{\widetilde{f}_n(\widetilde{\lambda}_n + s)}{\widetilde{f}_n(s)},\quad \widetilde{q}_{n0}(s) = \frac{1 - \widetilde{f}_n(\widetilde{\lambda}_n + s)}{\widetilde{\lambda}_n + s},\ h_1 + 1 \le n \le m;$$

$$\tilde{\pi}_{n,\,j-1}(s)=\frac{(-1)^j}{\tilde{f}_n(s)}\prod_{k=n}^{n+j-1}\tilde{\lambda}_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{\tilde{f}_n(\tilde{\lambda}_i+s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\neq i}}^{n+j}(\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_\nu)},$$

$$\tilde{q}_{nj}(s)=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\tilde{\lambda}_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1-\tilde{f}_n(\tilde{\lambda}_i+s)}{(\tilde{\lambda}_i+s)\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\neq i}}^{n+j}(\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_\nu)},\ h_1+1\le n\le m-1,\ 0\le j\le m-n;$$

$$\tilde{\pi}_{m,0}(s)=1-\frac{\tilde{f}_m(\tilde{\lambda}_m+s)}{\tilde{f}_m(s)};\quad \tilde{q}_{n,\,m-n+1}(s)=\frac{1-\tilde{f}_n(s)}{s}-\sum_{j=0}^{m-n}\tilde{q}_{n\,j}(s),\ h_1+1\le n\le m.$$

Для системы 2 при $1\le n\le h$ получаем равенства:

$$\pi_{n,-1}(s)=\frac{f_n(\lambda_n+s)}{f_n(s)},\ q_{n0}(s)=\frac{1-f_n(\lambda_n+s)}{\lambda_n+s};$$

$$\pi_{n,\,j-1}(s)=\frac{(-1)^j}{f_n(s)}\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{f_n(\lambda_i+s)}{\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_\nu)},$$

$$q_{nj}(s)=(-1)^j\prod_{k=n}^{n+j-1}\lambda_k\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1-f_n(\lambda_i+s)}{(\lambda_i+s)\prod\limits_{\substack{\nu=n\\ \nu\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_\nu)},\ 1\le n\le h-1,\ 0\le j\le h-n;$$

$$\pi_{n,\,j-1}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^\infty e^{-sx}(G_{(n,\,h),\,n-h+j-1}(x)-G_{(n,\,h),\,n-h+j}(x))dF_n(x),$$

$$q_{nj}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}(G_{(n,\,h),\,n-h+j-1}(x)-G_{(n,\,h),\,n-h+j}(x))\,\bar{F}_n(x)dx,\ h-n+1\le j\le m-n;$$

$$\pi_{n,\,m-n}(s)=\frac{1}{f_n(s)}\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,\,h),\,m-h}(x)\,dF_n(x),$$

$$q_{n,\,m-n+1}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,\,h),\,m-h}(x)\,\bar{F}_n(x)dx;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx}G_{(n,\,n+j),\,r}(x)dF_n(x)=$$

$$=f_n(s)-\frac{(-1)^j\tilde{\lambda}^r}{(r-1)!}\prod_{l=n}^{n+j}\lambda_l\sum_{i=n}^{n+j}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j}(\lambda_i-\lambda_s)}\sum_{k=0}^{r-1}C_{r-1}^k\frac{(r-1-k)!}{(\tilde{\lambda}-\lambda_i)^{r-k}}\times$$

$$\times\left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k}\frac{(k+\nu)!(\lambda_i-\tilde{\lambda})^\nu}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}}\sum_{\alpha=0}^{k+\nu}f_n^{(\alpha)}(s+\lambda_i)-\frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}}\sum_{\alpha=0}^{k}f_n^{(\alpha)}(s+\tilde{\lambda})\right),$$

$$1\le j\le h-n,\ 1\le r\le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{(n,n+j),0}(x)\,dF_n(x) = f_n(s) - (-1)^j \prod_{k=n}^{n+j} \lambda_k \sum_{i=n}^{n+j} \frac{f_n(s+\lambda_i)}{\lambda_i \prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j} (\lambda_i - \lambda_s)},\ 1 \le j \le h-n;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{(n,n+j),r}(x)\overline{F}_n(x)\,dx =$$

$$= \frac{1-f_n(s)}{s} - \frac{(-1)^j \widetilde{\lambda}^r}{(r-1)!} \prod_{l=n}^{n+j} \lambda_l \sum_{i=n}^{n+j} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j} (\lambda_i - \lambda_s)} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k \frac{(r-1-k)!}{(\widetilde{\lambda} - \lambda_i)^{r-k}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\nu=0}^{r-1-k} \frac{(k+\nu)!(\lambda_i - \widetilde{\lambda})^\nu}{\nu!\,\lambda_i^{k+\nu+1}} \sum_{\alpha=0}^{k+\nu} g_{n\alpha}(s+\lambda_i) - \frac{k!}{\widetilde{\lambda}^{k+1}} \sum_{\alpha=0}^{k} g_{n\alpha}(s+\widetilde{\lambda}) \right),$$

$$1 \le j \le h-n,\ 1 \le r \le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{(n,n+j),0}(x)\overline{F}_n(x)\,dx = \frac{1-f_n(s)}{s} - (-1)^j \prod_{k=n}^{n+j} \lambda_k \sum_{i=n}^{n+j} \frac{1-f_n(s+\lambda_i)}{\lambda_i (s+\lambda_i) \prod\limits_{\substack{s=n\\ s\neq i}}^{n+j} (\lambda_i - \lambda_s)},$$

$$1 \le j \le h-n.$$

Для систем 2 и 3 при $h_1 + 1 \le n \le m$ находим

$$\widetilde{\pi}_{n,j-1}(s) = \frac{\widetilde{f}_n^{(j)}(s+\widetilde{\lambda})}{\widetilde{f}_n(s)},\ \widetilde{q}_{nj}(s) = \widetilde{g}_{nj}(s+\widetilde{\lambda}),\ 0 \le j \le m-n;$$

$$\widetilde{\pi}_{n,m-n}(s) = 1 - \frac{1}{\widetilde{f}_n(s)} \sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{f}_n^{(j)}(s+\widetilde{\lambda}),\quad \widetilde{q}_{n,m-n+1}(s) = \frac{1-\widetilde{f}_n(s)}{s} - \sum_{j=0}^{m-n} \widetilde{g}_{nj}(s+\widetilde{\lambda}).$$

Для системы 3 при $1 \le n \le h$ получаем:

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{f_n^{(j)}(s+\lambda)}{f_n(s)},\ q_{nj}(s) = g_{nj}(s+\lambda),\ 0 \le j \le h-n;$$

$$\pi_{n,j-1}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} (G_{h-n+1,n-h+j-1}(x) - G_{h-n+1,n-h+j}(x))\,dF_n(x),$$

$$q_{nj}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} (G_{h-n+1,n-h+j-1}(x) - G_{h-n+1,n-h+j}(x))\overline{F}_n(x)\,dx,$$

$$h-n+1 \le j \le m-n;$$

$$\pi_{n,m-n}(s) = \frac{1}{f_n(s)} \int_0^\infty e^{-sx} G_{h-n+1,m-h}(x)\,dF_n(x),$$

$$q_{n,m-n+1}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G_{h-n+1,m-h}(x)\overline{F}_n(x)\,dx;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,r}(x) dF_n(x) =$$

$$= f_n(s) - \frac{(-1)^n \lambda^n \tilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^{n+r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k (n+r-2-k)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k} (-1)^{j+1} \frac{(k+j)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^j}{j!\lambda^{k+j+1}} \sum_{i=0}^{k+j} f_n^{(i)}(s+\lambda) + \frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} f_n^{(i)}(s+\tilde{\lambda}) \right),$$

$$1 \le r \le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,0}(x) dF_n(x) = f_n(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f_n^{(k)}(s+\lambda);$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,r}(x) \bar{F}_n(x) dx =$$

$$= \frac{1-f_n(s)}{s} - \frac{(-1)^n \lambda^n \tilde{\lambda}^r}{(n-1)!(r-1)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^{n+r-1}} \sum_{k=0}^{r-1} C_{r-1}^k (n+r-2-k)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{n+r-2-k} (-1)^{j+1} \frac{(k+j)!(\tilde{\lambda}-\lambda)^j}{j!\lambda^{k+j+1}} \sum_{i=0}^{k+j} g_{ni}(s+\lambda) + \frac{k!}{\tilde{\lambda}^{k+1}} \sum_{i=0}^{k} g_{ni}(s+\tilde{\lambda}) \right),$$

$$1 \le r \le m-h;$$

$$\int_0^\infty e^{-sx} G_{n,0}(x) \bar{F}_n(x) dx = \frac{1-f_n(s)}{s} - \sum_{k=0}^{n-1} g_{nk}(s+\lambda).$$

Учитывая, что

$$\lim_{s\to+0} f_n(s) = \lim_{s\to+0} \tilde{f}_n(s) = 1, \quad \lim_{s\to+0} \frac{1-f_n(s)}{s} = M_n, \quad \lim_{s\to+0} \frac{1-\tilde{f}_n(s)}{s} = \tilde{M}_n,$$

вычисляем последовательности

$$\pi_{ni} = \lim_{s\to+0} \pi_{ni}(s), \quad q_{ni} = \lim_{s\to+0} q_{ni}(s), \quad \tilde{\pi}_{ni} = \lim_{s\to+0} \tilde{\pi}_{ni}(s), \quad \tilde{q}_{ni} = \lim_{s\to+0} \tilde{q}_{ni}(s),$$

которые используем при определении стационарных характеристик рассматриваемых систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t и $\tau = \inf \{t \ge 0 : \xi(t) = 0\}$ — первый период занятости для рассматриваемой системы обслуживания. Для $k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ введем следующие обозначения:

$$\psi_n(t,k) = \mathbf{P}_n\{\xi(t) = k, \tau > t\}, \quad 1 \le n \le h;$$

$$\tilde{\psi}_n(t,k) = \tilde{\mathbf{P}}_n\{\xi(t) = k, \tau > t\}, \quad h_1 + 1 \le n \le m+1;$$

$$\varphi_n(t,k) = \begin{cases} \psi_n(t,k), \ 1 \le n \le h; \\ \tilde{\psi}_n(t,k), \ h_2 \le n \le m+1; \end{cases}$$

$$\Phi_n(s,k) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t,k) dt, \quad \tilde{\Phi}_n(s,k) = \int_0^\infty e^{-st} \tilde{\psi}_n(t,k) dt, \ \operatorname{Re} s > 0.$$

Очевидно, что $\varphi_0(t,k)=0$, $\widetilde{\psi}_{h_1}(t,k)=\varphi_{h_1}(t,k)$. С помощью формулы полной вероятности для каждой из систем 1–3 получим равенства:

$$\varphi_n(t,k)=\sum_{j=0}^{m-n}\int_0^t \mathbf{P}_n\{\eta(x)=j\}\varphi_{n+j-1}(t-x,k)dF_n(x)+\int_0^t \mathbf{P}_n\{\eta(x)\ge$$

$$\ge m-n+1\}\varphi_m(t-x,k)dF_n(x)+I\{n\le k\le m+1\}\mathbf{P}_n\{\eta(t)=k-n\}\overline{F}_n(t),\ 1\le n\le h;$$

$$\widetilde{\psi}_n(t,k)=\sum_{j=0}^{m-n}\int_0^t \widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(x)=j\}\widetilde{\psi}_{n+j-1}(t-x,k)d\widetilde{F}_n(x)+\int_0^t \widetilde{\mathbf{P}}_n\ \{\eta(x)\ge$$

$$\ge m-n+1\}\widetilde{\psi}_m(t-x,k)d\widetilde{F}_n(x)+I\{n\le k\le m+1\}\widetilde{\mathbf{P}}_n\{\eta(t)=k-n\}\overline{\widetilde{F}}_n(t),$$

$$h_1+1\le n\le m;$$

$$\widetilde{\psi}_{m+1}(t,k)=\int_0^t \widetilde{\psi}_m(t-x,k)d\widetilde{F}_{m+1}(x)+I\{k=m+1\}\overline{\widetilde{F}}_{m+1}(t).$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 или 0 в зависимости от того, состоялось ли событие A.

Введя обозначения $f_{(n)}(s,k)=I\{n\le k\le m+1\}q_{n,k-n}(s)$ и $\widetilde{f}_{(n)}(s,k)=I\{n\le$ $\le k\le m+1\}\widetilde{q}_{n,k-n}(s)$, придем к системе уравнений для определения функций $\Phi_n(s,k)$ и $\widetilde{\Phi}_n(s,k)$:

$$\Phi_n(s,k)=f_n(s)\sum_{j=0}^{m+1-n}\pi_{n,j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,k)+f_{(n)}(s,k),\quad 1\le n\le h; \tag{4}$$

$$\widetilde{\Phi}_n(s,k)=\widetilde{f}_n(s)\sum_{j=0}^{m+1-n}\widetilde{\pi}_{n,j-1}(s)\widetilde{\Phi}_{n+j-1}(s,k)+\widetilde{f}_{(n)}(s,k),\ h_1+1\le n\le m;$$

$$\widetilde{\Phi}_{m+1}(s,k)=\widetilde{f}_{m+1}(s)\widetilde{\Phi}_m(s,k)+I\{k=m+1\}\frac{1-\widetilde{f}_{m+1}(s)}{s} \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\Phi_0(s,k)=0,\ \widetilde{\Phi}_{h_1}(s,k)=\Phi_{h_1}(s,k). \tag{6}$$

Для решения системы уравнений (4)–(6) используем функции $\mathcal{R}_{ni}(s)$ и $\widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)$, определяемые с помощью рекуррентных соотношений

$$\mathcal{R}_{n1}(s)=R_{n+1}(s);$$

$$\mathcal{R}_{n,j+1}(s)=R_{n+1}(s)\left(\mathcal{R}_{n+1,j}(s)-f_{n+1}(s)\sum_{i=0}^{j-1}\pi_{n+1,i}(s)\,\mathcal{R}_{n+1+i,j-i}(s)\right),$$

$$0\le n\le h-1,\ 1\le j\le m-n-1;$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n1}(s)=\widetilde{R}_{n+1}(s);$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{n,j+1}(s)=\widetilde{R}_{n+1}(s)\left(\widetilde{\mathcal{R}}_{n+1,j}(s)-\widetilde{f}_n(s)\sum_{i=0}^{j-1}\widetilde{\pi}_{n+1,i}(s)\widetilde{\mathcal{R}}_{n+1+i,j-i}(s)\right),$$

$$h_1\le n\le m-1,\ 1\le j\le m-n-1.$$

Поскольку уравнения (4)–(6) по структуре не отличаются от полученных в [15], приведенные далее утверждения справедливы для систем 1–3 и следуют непосредственно из работы [15].

Введем обозначения:

$$C_n(s)=\mathcal{R}_{n,h-n}(s)-\sum_{i=1}^{h-n}\mathcal{R}_{ni}(s)f_{n+i}(s)\pi_{n+i,h-n-i}(s),\quad C_h(s)=\mathcal{R}_{h,0}(s)\equiv 1;$$

$$\widetilde{D}_n(s)=\sum_{i=1}^{h-n}\mathcal{R}_{ni}(s)f_{n+i}(s)\left(\pi_{n+i,m-n-i}(s)+\sum_{j=h+1}^{m-1}\pi_{n+i,j-n-i}(s)\widetilde{A}_j(s)\right);$$

$$\widetilde{A}_n(s)=\widetilde{\mathcal{R}}_{n,m-n}(s)-\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)f_{n+i}(s)\widetilde{\pi}_{n+i,m-n-i}(s);\ \widetilde{D}_h(s)=D_h(s,k)\equiv 0;$$

$$D_n(s,k)=$$
$$=\sum_{i=1}^{h-n}\mathcal{R}_{ni}(s)\left(f_{(n+i)}(s,k)-f_{n+i}(s)\sum_{j=h+1}^{m-1}\pi_{n+i,j-n-i}(s)\sum_{u=1}^{m-j}\widetilde{\mathcal{R}}_{ju}(s)\widetilde{f}_{(j+u)}(s,k)\right).$$

Теорема 1. Для всех $k\in\{1,2,\dots,m+1\}$ и $\operatorname{Re}s>0$ выполнены равенства

$$\Phi_n(s,k)=$$
$$=\frac{1}{C_0(s)}(C_n(s)D_0(s,k)+(C_n(s)\widetilde{D}_0(s)-C_0(s)\widetilde{D}_n(s))\Phi_m(s,k))-D_n(s,k),\ 1\le n\le h;$$

$$\Phi_n(s,k)=\widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,k)-\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)\widetilde{f}_{(n+i)}(s,k),\quad h_2\le n\le m-1;$$

$$\widetilde{\Phi}_n(s,k)=\widetilde{A}_n(s)\Phi_m(s,k)-\sum_{i=1}^{m-n}\widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)\widetilde{f}_{(n+i)}(s,k),\quad h_1+1\le n\le h;$$

$$\Phi_{m+1}(s,k)=\widetilde{f}_{m+1}(s)\Phi_m(s,k)+I\{k=m+1\}\,\frac{1-\widetilde{f}_{m+1}(s)}{s};$$

$$\Phi_m(s,k)=\frac{C_0(s)\left(D_{h_1}(s,k)-\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i}(s)\widetilde{f}_{(h_1+i)}(s,k)\right)-C_{h_1}(s)D_0(s,k)}{C_{h_1}(s)\widetilde{D}_0(s)-C_0(s)(\widetilde{D}_{h_1}(s)+\widetilde{A}_{h_1}(s))}.$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа от функции распределения периода занятости τ определяется в виде

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau>t\}dt=\frac{1}{C_0(s)}(C_1(s)D_0(s)+(C_1(s)\widetilde{D}_0(s)-C_0(s)\widetilde{D}_1(s))\Phi_m(s))-D_1(s),$$

где

$$D_n(s)=\sum_{i=1}^{h-n}\widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)\left(\frac{1-f_{n+i}(s)}{s}-f_{n+i}(s)\sum_{j=h_2}^{m-1}\pi_{n+i,j-n-i}(s)\sum_{u=1}^{m-j}\widetilde{\mathcal{R}}_{ju}(s)\frac{1-\widetilde{f}_{j+u}(s)}{s}\right);$$

$$\Phi_m(s)=\frac{C_0(s)\left(D_{h_1}(s)-\sum_{i=1}^{m-h_1}\widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i}(s)\frac{1-\widetilde{f}_{h_1+i}(s)}{s}\right)-C_{h_1}(s)D_0(s)}{C_{h_1}(s)\widetilde{D}_0(s)-C_0(s)(\widetilde{D}_{h_1}(s)+\widetilde{A}_{h_1}(s))}.$$

Теорема 3. Пусть $\mathcal{R}_{ni} = \lim\limits_{s \to +0} \mathcal{R}_{ni}(s)$, $\widetilde{\mathcal{R}}_{ni} = \lim\limits_{s \to +0} \widetilde{\mathcal{R}}_{ni}(s)$. Средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{E}(\tau)$, стационарное распределение числа заявок в системе $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\xi(t) = k\} = p_k$, $0 \le k \le m+1$, и стационарная вероятность обслуживания поступившей заявки $\mathbf{P}_{\text{sv}}$ (относительная пропускная способность системы) определяются по формулам:

$$\mathbf{E}(\tau) = D_0 - D_1 - R(h_1, h_2)\left(D_{h_1} - \sum_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i} \widetilde{M}_{h_1+i} \right);$$

$$\mathbf{P}_{\text{sv}} = p_0 \left(T_0 - T_1 + R(h_1, h_2)\left(\sum_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i} - T_{h_1} \right)\right);$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \lambda \mathbf{E}(\tau)}; \quad p_k = \lambda p_0 \left(\mathcal{R}_{0k} q_{k0} + \sum_{i=1}^{k-1} (\mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} - \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,k-i-1}) \right),$$
$$1 \le k \le h_1;$$

$$p_k = \lambda p_0 \left(\sum_{i=1}^{k} \mathcal{R}_{0i} q_{i,k-i} + R(h_1, h_2) \sum_{i=1}^{k-h_1} (\widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i} \widetilde{q}_{h_1+i,k-h_1-i} - \right.$$
$$\left. - \mathcal{R}_{h_1 i} q_{h_1+i,k-h_1-i}) - \sum_{i=1}^{k-1} \mathcal{R}_{1i} q_{i+1,k-1-i} \right), \; h_1 + 1 \le k \le h;$$

$$p_k = \lambda p_0 \left(D_0(k) - D_1(k) + R(h_1, h_2)\left(\sum_{i=1}^{k-h_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i} \widetilde{q}_{h_1+i,k-h_1-i} - D_{h_1}(k) \right)\right),$$
$$h_2 \le k \le m;$$

$$p_{m+1} =$$
$$= \lambda p_0 \left(D_0(m+1) - D_1(m+1) + R(h_1, h_2)\left(\sum_{i=1}^{m-h_1} \widetilde{\mathcal{R}}_{h_1 i} \widetilde{q}_{h_1+i,m+1-h_1-i} - D_{h_1}(m+1) \right)\right),$$

где
$$D_n = \sum_{i=1}^{h-n} \mathcal{R}_{ni} \left(M_{n+i} - \sum_{j=h_2}^{m-1} \pi_{n+i,j-n-i} \sum_{u=1}^{m-j} \widetilde{\mathcal{R}}_{ju} \widetilde{M}_{j+u} \right);$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{h-n} \mathcal{R}_{ni} \left(1 - \sum_{j=h_2}^{m-1} \pi_{n+i,j-n-i} \sum_{u=1}^{m-j} \widetilde{\mathcal{R}}_{ju} \right);$$

$$D_n(k) = \sum_{i=1}^{h-n} \mathcal{R}_{ni} \left(q_{n+i,k-n-i} - I\{h+2 \le k \le m\} \sum_{j=h_2}^{k-1} \pi_{n+i,j-n-i} \sum_{u=1}^{k-j} \widetilde{\mathcal{R}}_{ju} \widetilde{q}_{j+u,k-j-u} \right);$$

$$D_n(m+1) = \sum_{i=1}^{h-n} \mathcal{R}_{ni} \left(q_{n+i,m+1-n-i} - \sum_{j=h_2}^{m-1} \pi_{n+i,j-n-i} \sum_{u=1}^{m-j} \widetilde{\mathcal{R}}_{ju} \widetilde{q}_{j+u,m+1-j-u} \right);$$

$$R(h_1, h_2) = \frac{\mathcal{R}_{0,h_2} - \mathcal{R}_{1,h}}{\mathcal{R}_{h_1,h_2-h_1}}.$$

Стационарные характеристики очереди: ее среднюю длину $\mathbf{E}(Q)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$, находим по формулам

$$\mathbf{E}(Q)=\sum_{k=1}^{m} kp_{k+1}, \quad \mathbf{E}(W)=\frac{\mathbf{P}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{\text{sv}}}.$$

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим систему 3, для которой положим: $m=6$, $h_1=2$, $h_2=4$, $\lambda=10$, $\widetilde{\beta}=0{,}4$; $F_n(x)=\widetilde{F}_n(x)=F(x)$, $1\le n\le m$. Таким образом, в данном примере для системы 3 применяется только гистерезисная стратегия случайного отбрасывания заявок с неизменным распределением времени обслуживания. Рассмотрим два случая задания функции распределения времени обслуживания $F(x)$ с одинаковым средним значением 0,25: равномерное распределение на промежутке $(0;0{,}5]$ (соответствующую систему назовем системой 3.1) и показательное распределение с параметром $\mu=4$ (система 3.2). Для оценки результатов применения гистерезисной стратегии рассмотрим также системы 4.1 и 4.2 — стандартные системы типа M/G/1/m, в которых не применяется случайного отбрасывания заявок, а распределения времени обслуживания такие же, как в системах 3.1 и 3.2 соответственно.

Значения стационарных характеристик систем 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2, найденные по формулам, полученным с помощью метода потенциалов, представлены в табл. 1 и табл. 2, где в целях проверки найденных значений приведены также результаты вычислений для систем 3.1 и 3.2 с помощью имитационных моделей, построенных с использованием инструментальных средств GPSS World [16] (значение времени моделирования $t=10^6$). Сравнение значений характеристик рассматриваемых систем, полученных с помощью GPSS World для различных значений времени моделирования, показывает, что значение времени моделирования $t=10^6$ соответствует практически достигнутому стационарному режиму функционирования системы. Для моделирования показательных и равномерного распределений использованы библиотечные генераторы случайных чисел № 5 и № 15 соответственно.

Анализируя результаты, представленные в табл. 2, видим, что применение гистерезисной стратегии случайного отбрасывания заявок позволяет уменьшить среднюю длину очереди при неизменной пропускной способности системы. Уменьшение средней длины очереди в системе 3.1 по сравнению с системой 4.1 составляет 26,9%, а в системе 3.2 по сравнению с системой 4.2 — 24,8%.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системах 3.1 и 3.2

Номер системы	Метод	Значения стационарных вероятностей							
		p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
3.1	Аналитический	0,00229	0,00925	0,03539	0,11529	0,19473	0,24006	0,24173	0,16126
3.1	GPSS World	0,00228	0,00928	0,03559	0,11561	0,19507	0,23937	0,24159	0,16122
3.2	Аналитический	0,00717	0,01791	0,04478	0,11196	0,17225	0,21531	0,21531	0,21531
3.2	GPSS World	0,00712	0,01811	0,04488	0,11150	0,17284	0,21527	0,21553	0,21475

Таблица 2. Стационарные характеристики систем 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2

Номер системы	Метод	Значения стационарных характеристик			
		$E(\tau)$	$E(Q)$	$E(W)$	P_{sv}
3.1	Аналитический	43,534	3,987	0,999	0,399
3.1	GPSS World	43,830	3,985	0,998	0,399
3.2	Аналитический	13,856	4,015	1,011	0,397
3.2	GPSS World	13,830	4,013	1,010	0,397
4.1	Аналитический	1064,199	5,456	1,364	0,400
4.2	Аналитический	101,557	5,340	1,336	0,400

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе с помощью метода потенциалов получены пригодные для числовой реализации формулы для отыскания стационарного распределения числа заявок в системе обслуживания типа M/G/1/m, в которой в целях уменьшения длины очереди применяется гистерезисная стратегия управления интенсивностью входящего потока и временем обслуживания, допускающая случайное отбрасывание заявок и переключение режимов управления входящим потоком в моменты изменения числа заявок в системе. Полученные аналитическим методом результаты подтверждаются данными имитационного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абаев П.О., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Гистерезисное управление сигнальной нагрузкой в сети SIP-серверов // Вестник Российского университета дружбы народов. Математика. Информатика. Физика. — 2011. — № 4. — С. 54–71.
2. Печинкин А.В., Разумчик Р.В. Стационарные характеристики системы $M_2/G/1/r$ с гистерезисной политикой управления интенсивностью входящего потока // Информационные процессы. — 2013. — **13**, № 3. — С. 125–140.
3. Kitaev M.Yu., Rykov V.V. Controlled queueing systems. — New York: CRC-Press, 1995. — 304 p.
4. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. An $M^\theta/G/1/m$ system with two-threshold hysteresis strategy of service intensity switching // Journal of Communic. Technology and Electronics. — 2012. — **57**, N 12. — P. 1340–1349.
5. Chydziński A. Nowe Modele Kolejkowe Dla Węzłów Sieci Pakietowych. — Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. — 286 s.
6. Sriram K., Lucantoni D.M. Traffic smoothing effects of bit dropping in a packet voice multiplexer // IEEE Trans. Comm. — 1989. — **37**, N 7. — P. 703–712.
7. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. $M^\theta/G/1/m$ and $M^\theta/G/1$ systems with the service time dependent on the queue length // Journal of Communic. Technology and Electronics. — 2013. — **58**, N 12. — P. 1267–1275.
8. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. An $M^\theta/G/1$ system with hysteretic switching of the service intensity // Journal of Communic. Technology and Electronics. — 2013. — **58**, N 6. — P. 602–612.
9. Zhernovyi K.Yu., Zhernovyi Yu.V. Probabilistic characteristics of an $M_2^\theta/G/1/m$ queue with two-loop hysteretic control of the service time and arrival rate // Journal of Communic. Technology and Electronics. — 2014. — **59**, N 12. — P. 1465–1474.
10. Жерновый Ю., Жерновый К. Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания. — Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. — 164 с.
11. Bratiychuk M., Borowska B. Explicit formulae and convergence rate for the system $M^\alpha/G/1/N$ as $N \to \infty$ // Stochastic Models. — 2002. — **18**, N 1. — P. 71–84.

12. Королюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. — К.: Наук. думка, 1975. — 138 с.

13. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с.

14. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Метод потенциалов для систем типа M/G/1/m с пороговыми стратегиями функционирования // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — **52**, № 3. — С. 170–181.

15. Zhernovyi Yu., Kopytko B. The potentials method for a closed queueing system with hysteretic strategy of the service time change // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. — 2015. — N 14(2). — P. 131–143.

16. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. — Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. — 220 p.

Надійшла до редації 16.02.2016

Ю.В. Жерновий

МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ M/G/1/m З ГІСТЕРЕЗИСНИМИ СТРАТЕГІЯМИ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування M/G/1/m з гістерезисними стратегіями випадкового відкидання замовлень і керування часом обслуговування. Отримано формули для визначення перетворень Лапласа розподілу кількості замовлень у системі протягом періоду зайнятості, функції розподілу періоду зайнятості та формули для обчислення стаціонарних характеристик. Співвідношення для стаціонарних характеристик перевірено на прикладах за допомогою імітаційних моделей, побудованих із використанням інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: одноканальна система обслуговування, гістерезисні стратегії, випадкове відкидання замовлень, метод потенціалів.

Yu.V. Zhernovyi

POTENTIALS METHOD FOR M/G/1/m SYSTEMS WITH HYSTERETIC OPERATION STRATEGIES

Abstract. We propose a method to analyze M/G/1/m queueing systems with hysteretic strategies of random dropping of customers and control of service time. We obtain formulas to determine Laplace transforms of the distribution of the number of customers in the system during busy period and of the distribution function of busy period and to calculate stationary characteristics. We test the relations for stationary characteristics on examples using simulation models constructed with the assistance of the GPSS World tools.

Keywords: single-channel queueing system, hysteretic strategies, random dropping of customers, potentials method.

Жерновый Юрий Васильевич,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского национального университета имени Ивана Франко, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.