УДК 519.21

П.С. КНОПОВ, Т.В. ПЕПЕЛЯЕВА, И.Ю. ДЕМЧЕНКО

ОБ ОДНОЙ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Аннотация. Рассмотрены управляемые полумарковские процессы для исследования многономенклатурной модели теории управления запасами. Для данной модели при убывающих функциях общих издержек найдены условия существования оптимальной стратегии, а также доказано существование оптимальной (s, S)-стратегии управления запасами.

Ключевые слова: полумарковские процессы, управление запасами, (s, S)-стратегия, критерий оптимальности, оптимальная стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

При решении многих задач оптимизации систем массового обслуживания и управления запасами, а также при исследовании надежности сложных технических систем часто используются управляемые полумарковские процессы. В настоящей статье эти процессы рассмотрены для исследования задачи оптимизации многономенклатурной модели теории управления запасами. Известно, что запасы каждого продукта можно пополнять непрерывно, поэтому уровни этих запасов и заказов ограничены сверху и принимают значения в R_+.

Целью настоящей статьи является определение оптимальной (s, S)-стратегии для многономенклатурной модели управления запасами при убывающих функциях общих издержек.

В работе [1] найдены условия оптимальности (s, S)-стратегии для многономенклатурной модели управления запасами с функцией стоимости, определяемой издержками хранения запасов и стоимостью заказа продукции, а также с издержками, вызванными дефицитом продукции.

В работах [2–5] дан общий обзор теории запасов, а в [6–9] впервые представлена теория динамического полумарковского программирования, получившая развитие в [10–20]. Для полумарковской одиономенклатурной системы теории управления запасами проблема нахождения условий оптимальности (s, S)-стратегии рассматривалась в [21].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ

Приведем некоторые основные положения из теории управления полумарковскими процессами, которые используются в настоящей статье. Рассматривается система со случайными воздействиями в случайные моменты времени, управляемая некоторым образом с целью минимизировать издержки, связанные с системой управления. Обозначим X пространство состояний (фазовое) стохастического процесса $X = (X_n : n \in N)$, описывающее развитие системы во времени, и A — пространство управляющих воздействий (решений или действий). Пусть X, A — некоторые полные сепарабельные метрические пространства с борелевыми σ-алгебрами $\aleph$ и $\Im$ соответственно, а также задано измеримое отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ некоторое непустое замкнутое множество $A_x \subseteq A$, т. е. отображение F связывает данное состояние системы с допустимым набором действий (решений). При этом множество $\Delta = \{(x, a) : x \in X, a \in A_x\}$ измеримо по Борелю в произведении пространств $X \times A$ [6].

Если в состоянии $x \in X$ принято решение $a \in A_x$, то следующее состояние системы выбирается с помощью переходной вероятности $P(\cdot / x, a)$, а при условии, что следующее состояние системы есть $y \in X$, время пребывания в x является случайной величиной с функцией распределения $\Phi(\cdot / x, a, y)$.

Предположим, что $P(\cdot / x, a)$ и $\Phi(\cdot / x, a, y)$ — борелевы функции на Δ и $\Delta \times X$ соответственно.

Обозначим x_n состояние системы после n-го перехода, a_n — принятое решение, а τ_n — время пребывания в этом состоянии ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Допустимая стратегия δ для управляемой системы определяется как последовательность $\delta = \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots\}$ ядер перехода такая, что вероятностная мера $\delta_n(\cdot / h_n)$ на $(A, \Im)$, сосредоточенная на A_{X_n} и измеримо зависящая от $h_n = (x_0, a_0, \tau_0, \ldots, x_{n-1}, a_{n-1}, \tau_{n-1}, x_n)$, является историей управляемой системы к моменту n-го перехода. Стратегия δ называется марковской, если $\delta_n(\cdot / h_n) = \delta_n(\cdot / x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Марковская стратегия δ называется стационарной, если $\delta_n(\cdot / x_n) = \delta(\cdot / x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и стационарной нерандомизированной (детерминированной), если мера $\delta(\cdot / x_n)$ вырождена и сосредоточена в точке для любого $x \in X$. В этом случае обозначим $\delta(x)$ точку сосредоточения массы $\delta(\cdot / x)$, $\Re$ — класс всех допустимых стратегий, $\Re_1$ — класс стационарных марковских нерандомизированных (детерминированных) стратегий.

Выбором стратегии δ определяется случайный процесс, который назовем процессом, управляемым стратегией δ. Если стратегия δ марковская стационарная, то управляемый процесс является полумарковским.

Введем понятие издержек, связанных с управляемым процессом. Если в состоянии $x \in X$ принято решение $a \in A_x$ и время, проведенное в состоянии x, равно t, то ожидаемые издержки за время $s\,(s \le t)$ равны $r(s / x, a)$. Функция $r(s / x, a)$ предполагается измеримой по Борелю на $[0; +\infty) \times \Delta$.

Рассмотрим критерий оптимальности выбранной стратегии.

Средняя ожидаемая стоимость стратегии δ имеет вид

$$\varphi(x, \delta) = \limsup_{n \to \infty} \frac{E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r(\tau_k / x_k, a_k)}{E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} \tau_k},$$

где $\xi_0 = x$, а E_x^δ — математическое ожидание, соответствующее процессу, управляемому стратегией δ при условии, что $\xi_0 = x$.

Стратегия δ^* оптимальна относительно данного критерия, если $\varphi(x, \delta^*) = \inf_{\delta \in R} \varphi(x, \delta)$, $x \in X$.

Обозначим

$$\tau(x, a) = \int_X \int_0^\infty t \, d\Phi(t / x, a, y) P(dy / x, a),$$

$$r(x, a) = \int_X \int_0^\infty r(t / x, a) \, d\Phi(t, a, y) P(dy / x, a).$$

Предположим, что $\tau(x, a)$ и $r(x, a)$ существуют и конечны для всех $(x, a) \in \Delta$ и $|r(x, a)| \le C < \infty$, $(x, a) \in \Delta$. Поскольку первый критерий зависит только от $P(\cdot / x, a)$ и усредненных характеристик $\tau(x, a)$ и $r(x, a)$, ограничимся рассмотрением управляемых процессов, для которых

$$\Phi(t / x, a, y) = \begin{cases} 1, & t \ge \tau(x, a), \\ 0, & t < \tau(x, a), \end{cases} \qquad r(t / x, a) = \begin{cases} 0, & t < \tau(x, a), \\ r(x, a), & t \ge \tau(x, a). \end{cases}$$

Обозначим $\Xi(X)$ банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на X с нормой $\|u\| = \sup_{x \in X} |u(x)|$. Далее используются следующие результаты [6].

Теорема 1. Пусть пространство A управляющих воздействий компактно, отображение $F: X \to (2)^A_{set}$, $x \to A_x$, полунепрерывно сверху. Кроме того, пусть выполняются следующие предположения: $0 < l < \tau(x, a) \le L < \infty$, $(x, a) \in \Delta$ и существует неотрицательная мера μ на $(X, \aleph)$ такая, что $\mu(B) \le P(B / x, a)$, $(x, a) \in \Delta$, $B \in \aleph$ и $\mu(X) > 0$.

Тогда, если функция $r(x, a)$ полунепрерывна сверху, а $\tau(x, a)$ непрерывна по x, a, $(x, a) \in \Delta$, а также переходная вероятность $P(\cdot / x, a)$ слабо непрерывна по x, a, $(x, a) \in \Delta$, то в классе $\Re_1$ существует стационарная марковская детерминированная оптимальная стратегия δ^* с минимальной стоимостью

$$W = \frac{1}{L} \int\limits_X v(x)\, \mu(dx) .$$

Здесь функция $v(x)$ единственная в пространстве $\Xi(X)$ и определяется решением уравнения оптимальности

$$v(x) = \inf_{a \in A_x} \{ r(x, a) + \int\limits_X v(y)\, P'(dy / x, a) \} , \quad x \in X,$$

где

$$P'(B / x, a) = P(B / x, a) - \frac{1}{L} \mu(B) \tau(x, a), \quad B \in X .$$

Замечание 1. Данная теорема имеет место для функции издержек со значениями в $[0;\ +\infty)$, которые необходимо минимизировать. В [6] приведены условия максимизации вознаграждения (дохода) $r(x, a)$ за один период, если система находится в состоянии x и принято решение $a \in A_x$.

В настоящей статье теорема 1 переформулирована с использованием отрицательной функции $r_1(x, a) = -r(x, a)$.

Рассмотрим модель управления системой, у которой пространство состояний является декартовым произведением m множеств, т.е. $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$. Пространство принимаемых решений $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Обозначим x_i^k состояние i-й подсистемы после k-го перехода, a_i^k — принятое решение, τ_i^k — время пребывания i-й подсистемы в этом состоянии, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Если в состоянии $x_i \in X_i$ принято решение $a_i \in A_{x_i}$ и время, проведенное в состоянии x_i равно t_i, то ожидаемые издержки i-й подсистемы за время s_i $(s_i \le t_i)$ равны $r_i(s_i / x_i, a_i)$. Функции $r_i(s_i / x_i, a_i)$ предполагаются измеримыми по Борелю на $[0;\ +\infty) \times \Delta$.

Пусть ожидаемые издержки всей системы за время s определяются функцией $r(s / x, a)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, которая является сепарабельной, т.е. имеет вид $r(s / x, a) = \sum\limits_{i=1}^m r_i(s_i / x_i, a_i)$.

Далее будем считать, что пространства X_i, A_i и функции $r_i(s_i / x_i, a_i)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют соответствующим условиям.

Для описанной ранее стратегии рассмотрим следующий критерий оптимальности.

Средняя ожидаемая стоимость стратегии δ определяется величиной

$$\varphi(x, \delta) = \sum_{i=1}^m \limsup_{n \to \infty} \frac{E_x^\delta \sum\limits_{k=0}^n r_i(\tau_i^k / x_i^k, a_i^k)}{E_x^\delta \sum\limits_{k=0}^n \tau_i^k} .$$

Стратегия δ^* оптимальна относительно этого критерия, если $\varphi(x, \delta^*) = \inf\limits_{\delta \in R} \varphi(x, \delta)$, $x \in X$.

Обозначим

$$\tau_i(x_i, a_i) = \int_{X_i} \int_0^{\infty} t\, d\,\Phi_i(t / x_i, a_i, y)\, P(dy / x_i, a_i),$$

$$r_i(x_i, a_i) = \int_{X_i} \int_0^{\infty} r_i(t / x_i, a_i)\, d\,\Phi_i(t, a_i, y)\, P(dy / x_i, a_i),$$

$$\Phi_i(t / x_i, a_i, y) = \begin{cases} 1, & t \ge \tau_i(x_i, a_i), \\ 0, & t < \tau_i(x_i, a_i), \end{cases} \qquad r_i(t / x_i, a_i) = \begin{cases} 0, & t < \tau_i(x_i, a_i), \\ r_i(x_i, a_i), & t \ge \tau_i(x_i, a_i), \end{cases}$$

$$r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i),$$

а также $\Xi_1(X)$ банахово пространство ограниченных измеримых по Борелю функций на X с нормой $v(x) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x_i \in X_i} | v_i(x_i) |$.

Теорема 2 [1]. Пусть A — компактное пространство и отображение $F: X \to (2)_{set}^{A}$, $x \to A_x$, полунепрерывно сверху. Кроме того, пусть выполняются следующие предположения: $0 < l < \tau_i(x_i, a_i) \le L < \infty$, $(x_i, a_i) \in \Delta_i$, $i = \overline{1, m}$, и для каждого $i = \overline{1, m}$ существует неотрицательная мера μ_i на $(X_i, \aleph_i)$ такая, что $\mu_i(X_i) \le Q_i(B_i / x_i, a_i)$, $B_i \in \aleph_i$, $i = \overline{1, m}$, и $\mu_i(X_i) > 0$.

Пусть также выполнены следующие условия: функции $r_i(x_i, a_i)$ полунепрерывны сверху на (x_i, a_i), а $\tau_i(x_i, a_i)$ непрерывны по x_i, a_i, $(x_i, a_i) \in \Delta_i$, и переходные вероятности $Q_i(B_i / x_i, a_i)$ слабо непрерывны по (x_i, a_i).

Тогда в классе стационарных марковских детерминированных стратегий $\Re_0$ существует оптимальная стратегия δ^* с минимальной стоимостью

$$W = \frac{1}{L} \int V(x) \mu(dx),$$

где

$$V = \inf_{a \in A} \left\{ r(x, a) + \int_X V(y) Q'(dy / x, a) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \inf_{a_i \in A_i} \left\{ r_i(x_i, a_i) + \int_{X_i} V_i(y_i) \left[Q_i(dy_i / x_i, a_i) - \frac{1}{L} \mu_i(dy_i) \tau_i(x_i, a_i) \prod_{j=1, j \ne i}^{m} \mu_j(X_j) \right] \right\}.$$

МНОГОНОМЕНКЛАТУРНЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ УБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ ОБЩИХ ИЗДЕРЖЕК

Рассмотрим систему управления запасами m продуктов, каждый из которых может непрерывно пополняться. Предположим, что Q_i — максимальный уровень запаса i-го продукта, тогда его запас принимает значение на $[0, Q_i]$.

В дискретные моменты времени N проверяется состояние запасов каждого продукта и принимаются соответствующие решения о пополнении складов следующим образом.

Если уровень запасов i-го продукта в момент времени $n \in N$ определяется $X_i^n = x_i \in [0, Q_i]$, то осуществляется заказ этого продукта $D_i^n \in A_i^x$, $A_i^x := [0, Q_i - x_i]$.

Таким образом, обозначим $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$, $X_i = [0, Q_i]$, $X = (X^n : n \in N)$, пространство состояний системы, описывающее развитие системы во времени, и $A = A_1^x \times A_2^x \times \ldots \times A_m^x$ — пространство принимаемых решений.

Предположим, что стоимость заказа (которая может включать издержки производства) состоит из фиксированной стоимости и линейной функции. Так, заказ $x_i > 0$ товаров приводит к ожидаемым издержкам $C_i^2(x_i) = A_i + c_i \cdot x_i$, $A_i \geq 0$, $c_i \geq 0$. Кроме того, общие издержки хранения и дефицита за период времени $f_i(x_i, d^{a_i})$ зависят от уровня запасов $x_i \geq 0$ и заказа $a_i \in [0, Q_i - x_i]$ в начале периода, где $f_i(\cdot, \cdot)$ полунепрерывны снизу по совокупности переменных.

Рассмотрим систему со средними издержками (φ-критерием). Для системы, находящейся в состоянии x в начале периода, при принятии решения $a \in A$ ожидаемые издержки за один период составляют $r(x, a) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x_i, a_i)$, где $r_i(x_i, a_i)$ — ожидаемые издержки по i-му продукту за один период времени, если состояние данного продукта равно x_i и принято решение d^{a_i}:

$$r_i(x_i, d^0) = f_i(x_i, d^0), \quad i = \overline{1, m},$$

для $a_i > 0$ выполнено

$$r_i(x_i, d^{a_i}) = f_i(x_i + a_i, d^{a_i}) + C_i^2(a_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Вероятности перехода на X_i для любого борелевого подмножества $[0, Q_i]$ задаются следующим образом:

$$P([y_i^1, y_i^2] / x_i, d^{a_i}) = G_i(x_i + a_i - y_i^1) - G_i(x_i + a_i - y_i^2),$$

$$a_i \in [0, Q_i - x_i], \quad 0 \leq y_i^1 \leq y_i^2 \leq x_i + a_i,$$

$$P(\{0\} / x_i, d^{a_i}) = 1 - G_i(x_i + a_i -), \quad x_i \in [0, Q_i].$$

Вероятности перехода системы $P(B / x, d^a) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i / x_i, d^{a_i})$, где B_i — борелевы подмножества $[0, Q_i]$, будем считать $G(Q) < 1$.-

Следующая теорема дает условия существования оптимальной стратегии многономенклатурной модели управления запасами.

Теорема 3. Для рассматриваемой полумарковской модели управления в классе $\Re_1$ существует φ-оптимальная стратегия с минимальной стоимостью $W = \frac{1}{L} \int V(x) \mu(dx)$.

Здесь $\mu(\cdot) = \mu_1(\cdot) \ldots \mu_m(\cdot)$, $\mu_i(\cdot)$ — мера, сконцентрированная в точке 0 с весом $\overline{G_i} = 1 - G(x)$, $i = \overline{1, m}$, $\overline{G} = \overline{G_1} \ldots \overline{G_m}$, а $V(x)$ удовлетворяет уравнению оптимальности:

$$V(x) = LV(x) = \sum_{i=1}^{m} \min_{a \in A} \left\{ f_i(x_i + a_i, d^{a_i}) + C_i^2(a_i) \cdot 1_{a_i > 0} + \right.$$

$$\left. + \int_{X_i} V_i(y_i) \left[P(dy_i / x_i, a_i) - \frac{1}{L} \mu_i(dy_i) \tau_i(x_i, a_i) \prod_{j=1,\, j \neq i}^{m} \mu_j(x_j) \right] \right\}.$$

Доказательство. Применим теорему 2 о существовании φ-оптимальной стратегии, принадлежащей классу детерминированных (марковских) стратегий, для которых достигается минимальное значение издержек $W = \int V(x) \mu(dx)$. Проверим выполнение следующих предположений этой теоремы:

— пусть $F: [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m] \to (2)_{set}^{A}$, $x \to A_x$, — отображение, которое связывает с каждым состоянием x набор допустимых решений A_x, тогда F полунепрерывно сверху. Действительно, если для x, $x^n \in X = [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$,

$$a^n = (a_1^n, \ldots, a_m^n) \in A^{x^n} = [0, Q_1 - x_1^n] \times \ldots \times [0, Q_m - x_m^n],$$

$$\lim_{x \to \infty} x^n = x = (x_1, \ldots, x_m), \ \lim_{a \to \infty} a^n = a = (a_1, \ldots, a_m),$$

то в пределе $(0, \ldots, 0) \le (a_1, \ldots, a_m) \le (Q_1 - x_1, \ldots, Q_m - x_m)$, т.е. $a \in A^x$. Поэтому A полунепрерывна сверху;

— докажем, что функции $r_i(x_i, d^{a_i})$ полунепрерывны снизу. В соответствии с видом ожидаемых издержек по i-му продукту за один период времени, а также с предположением о полунепрерывности снизу функций f_i, C_i^2, $i = \overline{1, m}$, можно сделать вывод, что функции $r_i(x_i, a_i)$, $i = \overline{1, m}$, полунепрерывны снизу;

— слабая непрерывность вероятностей перехода $P_i(B_i / x_i, d^{a_i})$ следует из их определения;

— ограниченность выигрыша $r_i(x_i, a_i)$ следует из ограниченности f_i, C_i^2, $i = \overline{1, m}$.

Далее используем следующий результат, полученный в [21] для однономенклатурной задачи теории запасов и приведенный в обозначениях настоящей статьи с учетом того, что в данной модели вероятность выполнения заказа для каждого продукта равна 1.

Теорема 4. Пусть $c_i \cdot x_i + f_i(x_i, d^{a_i})$, $i = \overline{1, m}$, монотонно убывает по $x_i \in [0, Q_i]$ и $a_i \in (0; Q_i - x_i]$. Кроме того, пусть функция $\tau_i(x_i, d^{a_i})$ монотонно возрастает по $x_i \in [0; Q_i]$ и $a_i \in (0; Q_i - x_i]$.

Оптимальная стратегия $\delta_i^* \in \Re_i^1$ ($\Re_i^1$ — класс стационарных марковских детерминированных стратегий для i-го продукта) для задачи управления запасами имеет вид: существует порог $x_i^* \in [0, Q_i)$ такой, что

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0, & x_i \ge x_i^*. \end{cases}$$

Следующая теорема позволяет определить форму оптимальной стратегии для многономенклатурной системы запасов.

Теорема 5. Пусть $c_i \cdot x_i + f_i(x_i, d^{a_i})$, $i = \overline{1, m}$, монотонно убывает по $x_i \in [0, Q_i]$ и $a_i \in (0; Q_i - x_i]$. Кроме того, пусть функция $\tau_i(x_i, d^{a_i})$ монотонно возрастает по $x_i \in [0, Q_i]$ и $a_i \in (0; Q_i - x_i]$.

Для задачи управления запасами φ-оптимальная стратегия $\delta^* \in \Re_1$ имеет вид: существует порог $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*) \in [0, Q_1] \times \ldots \times [0, Q_m]$ такой, что $\delta^* = (\delta_1^*, \ldots, \delta_m^*)$ и для $i = \overline{1, m}$

$$\delta_i^* = \begin{cases} d_{Q_i - x_i}, & x_i < x_i^*; \\ d_0, & x_i \ge x_i^*. \end{cases}$$

Доказательство. Условия данной теоремы обеспечивают выполнение условий теоремы 4, которая задает структуру оптимальной стратегии δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, по каждому i-му товару, т.е. $\varphi_i(x_i, \delta_i^*) = \inf_{\delta_i \in \Re_i} \varphi_i(x_i, \delta_i)$, $\varphi_i(x_i, \delta_i) =$

$$= \limsup_{n \to \infty} \frac{E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} r_i(\tau_i^k / x_i^k, d_i^k)}{E_x^\delta \sum_{k=0}^{n} \tau_i^k},$$ где φ_i — средняя ожидаемая стоимость стратегии δ_i, а $\Re_i$ — класс допустимых стратегий для i-го товара, $i = \overline{1, m}$.

Поскольку $\varphi(x,\delta)=\sum_{i=1}^{m}\limsup_{n\to\infty}\frac{E_x^{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_i(\tau_i^k / x_i^k, d_i^k)}{E_x^{\delta}\sum_{k=0}^{n}\tau_i^k}=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i,\delta_i)$, т.е.

$$\varphi(x,\delta^*)=\inf_{\delta\in\Re}\varphi_i(x,\delta)=\inf_{\delta\in\Re}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i,\delta_i)=\sum_{i=1}^{m}\inf_{\delta_i\in\Re_i}\varphi_i(x_i,\delta_i)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x_i,\delta_i^*),$$

утверждение теоремы выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, рассмотрена полумарковская многономенклатурная модель управления запасами при убывающих функциях общих издержек. Для данной модели найдены условия существования оптимальной стратегии, а также определена структура оптимальной стратегии при выполненных условиях оптимальности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пепеляева Т.В., Демченко И.Ю. Об одной многономенклатурной модели для полумарковской системы запасов // Компьютерная математика. — 2015. — № 2. — С. 150–162.
2. Porteus E.L. Stochastic inventory theory / D. P. Heyman, M. J. Sobel (eds.) // Stochastic Models: Handbooks Oper. Res. and Manag. Sci. — Amsterdam: North Holland, 1990. — **2**, chap. 12. — P. 605–652.
3. Губенко Л.Г., Штатланд Э.С. Об управляемых марковских процессах с дискретным временем // Теория вероятностей и математическая статистика. — 1972. — № 7. — С. 51–64.
4. Дадуна Г., Кнопов П.С., Тур Л.П. Оптимальные стратегии для системы запасов с функциями стоимости общего вида // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 4. — С. 106–123.
5. Демченко С.С., Кнопов А.П., Пепеляев В.А. Оптимальные стратегии для систем управления запасами с выпуклой функцией издержек // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 113–120
6. Губенко Л.Г., Штатланд Э.С. Об управляемых полумарковских процессах // Кибернетика. — 1972. — № 2. — С. 26–29.
7. Губенко Л.Г., Штатланд Э.С. Управляемые марковские и полумарковские модели и некоторые конкретные задачи оптимизации стохастических систем // Управляемые случайные процессы и системы: Сб. тр. Первой школы-семинара по управляемым случайным процессам и системам (Киев, Институт кибернетики АН УССР, Институт математики АН УССР, 1971). — Киев, 1973. — С. 87–119.
8. Lippman S.A. Maximal average-reward policies for semi-Markov decision processes with arbitrary state and action space // Ann. Math. Stat. — 1971. — **42**, N 5. — P. 1717–1726.
9. Federgruen A., Tijms H. S. The optimality equation in average cost denumerable state semi-Markov decision problems, recurrency conditions and algorithms // J. Appl. Probab. — 1978. — **15**, N 2. — P. 356–373.
10. Kitaev M. Elimination of randomization in semi-Markov decision models with average cost criterion // Optimization. — 1987. — **18**, N 3. — P. 439–446.
11. Kurano M. Semi-Markov decision processes and their applications in replacement models // J. Oper. Res. Soc. Jap. — 1985. — **28**, N 1. — P. 18–30
12. Ksir B. Controle optimal des processus semi-Markoviens sur des espaces compacts metriques et solution au probleme de replacement d'un systeme soumis a des chocs aleatoires semi-Markoviens // Cah. Rech. — 1982. — **17.** — P. 23–52.
13. Wakuta K. Arbitrary state semi-Markov decision processes with unbounded rewards // Optimization. — 1987. — **18**, N 3. — P. 447–454.
14. Юшкевич А.А. О полумарковских управляемых моделях с критерием среднего дохода // Теория вероятностей и ее применения. — 1981. — **26**, № 4. — С. 808–815.
15. Китаев М.Ю. Полумарковские и скачкообразные марковские управляемые модели. Критерий средней цены // Теория вероятностей и ее применения. — 1985. — **30**, № 2. — С. 252–268.

16. Юшкевич А.А. О полумарковских управляемых моделях с критерием среднего дохода // Теория вероятностей и ее применения. — 1981. — **26**, № 4. — С. 808–815.

17. Виноградская Т.М., Генинсон Б.А., Рубчинский А.А. Полумарковские процессы принятия решений с векторными доходами // Теория вероятностей и ее применения. — 1983. — **28**, № 1. — С. 182–184.

18. Maitra A.P., Sudderth W.D. Discrete gambling and stochastic games. — New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, Inc., 1996. — 248 p.

19. Vega-Amaya O. Average optimality in semi-Markov control models on Borel spaces: Unbounded cost and controls // Bol. Soc. Math. Mex. — 1993. — **38**, N 1–2. — P. 47–60.

20. Guonueng X., Xianping G., Qingping L. The optimizing condition for semi-Markov decision programming with average criterion // Hunan Ann. Math. — 1995. — **15**, N 1. — P. 6–13.

21. Демченко С.С., Кнопов П.С., Чорней Р.К. Оптимальные стратегии для полумарковской системы запасов // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 1. — С. 146–160.

Надішла до редакції 25.04.2016

П.С. Кнопов, Т.В. Пепеляєва, І.Ю. Демченко

ПРО ОДНУ НАПІВМАРКОВСЬКУ МОДЕЛЬ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ

Анотація. Розглянуто керовані напівмарковські процеси для досліджень багатономенклатурної моделі теорії керування запасами. Для такої моделі при спадних функціях загальних витрат знайдено умови існування оптимальної стратегії, а також доведено існування оптимальної (s, S)-стратегії керування запасами.

Ключові слова: напівмарковські процеси, управління запасами, (s, S)-стратегія, критерій оптимальності, оптимальна стратегія.

P.S. Knopov, T.V. Pepelyaeva, I.Yu. Demchenko

A SEMI-MARKOV MODEL OF INVENTORY CONTROL

Abstract. We consider controlled semi-Markov processes as applied to the analysis of a multi-task model in inventory control theory. The existence conditions for the optimal strategy are found for this model, with decreasing functions of common costs and the existence of optimal (s, S)-strategy in inventory control is proved.

Keywords: semi-Markov processes, inventory control, (s, S)-strategy, optimality criterion, the optimal strategy.

Кнопов Павел Соломонович,
доктор физ.-мат. наук, чл.-кор. НАН Украины, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: knopov1@yahoo.com.

Пепеляева Татьяна Владимировна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: pepelaev@yahoo.com.

Демченко Ирина Юрьевна,
аспирантка Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: irishka8891@ukr.net.