УДК 519.161

О.Б. МАЦИЙ, А.В. МОРОЗОВ, А.В. ПАНИШЕВ

РЕКУРРЕНТНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗВЕШЕННОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ

Аннотация. Известная задача о взвешенном паросочетании в произвольном графе H с n вершинами сводится к одной из задач о паросочетании для двудольного графа с $2n$ вершинами. Максимальное паросочетание графа H с минимальной суммой весов ребер, заданных матрицей $[c_{ij}]_n$, находится за время $O(n^3)$ после упорядочения по неубыванию значений c_{ij}, расположенных над главной диагональю.

Ключевые слова: паросочетание, задача о взвешенном паросочетании, двудольный граф, увеличивающий путь, задача о назначениях.

ВВЕДЕНИЕ

В приложениях теории графов широкую известность получила задача о паросочетании. Она состоит в нахождении в заданном графе паросочетания с наибольшим числом ребер — максимального паросочетания. В обобщении этой задачи заданы веса ребер — неотрицательные числа, и требуется определить максимальное паросочетание графа, содержащее ребра с минимальным (максимальным) суммарным весом. Сформулированное обобщение называется задачей о взвешенном паросочетании (ЗВП).

Известно, что ЗВП полиномиально разрешима [1]. Классический алгоритм Эдмондса для нахождения наибольшего взвешенного паросочетания в недвудольном графе $H=(V,U)$, изложенный в [1], характеризуется трудоемкостью $O(|V|^4)$. Основной причиной относительно невысокого быстродействия алгоритма Эдмондса является существование в графе H цветков — циклов, содержащих $2k+1$ вершин и k ребер некоторого фиксированного паросочетания M. Обнаруженный цветок не позволяет организовать быстрый поиск паросочетания мощности $|M|+1$ способом, применяемым для двудольных графов. Для работы с произвольными графами алгоритм Эдмондса содержит процедуру обнаружения цветка и операцию его замены одной вершиной, допустимую в процессе нахождения текущего паросочетания.

Наиболее эффективные алгоритмы нахождения максимальных паросочетаний в произвольных графах построены на развитии идей Эдмондса о сжатии нечетных циклов. В них включены способы хранения данных и организации процесса вычислений, понижающие сложность до $O(|V|^3)$ для графов с n вершинами [1, 2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПОДХОД К ЕЕ РЕШЕНИЮ

В условии рассматриваемой здесь ЗВП задан граф $H=(V,U)$, $|V|\in n$, где V — множество вершин, U — множество ребер (неупорядоченных пар вершин). В графе каждое ребро $\{i, j\}\in U$ имеет вес $c_{ij}\in R_0^+$, $i, j=\overline{1, n}$; R_0^+ — множество неотрицательных действительных чисел. В H недопустимы петли, т.е. ребра вида $\{v, v\}$, $v\in V$, и кратные или «параллельные» ребра. Паросочетанием в графе H называется подмножество ребер, в котором никакие два ребра не имеют общих вершин. Требуется найти в графе H максимальное паросочетание с минимальной суммой весов ребер.

В данной статье излагается метод решения поставленной ЗВП, корректно выполняющий действия по построению искомого паросочетания в двудольном графе, соответствующем графу H. Поэтому он не содержит непростых операций нахождения и срезания цветков, используемых в алгоритме Эдмондса и его модификациях.

Графу $H=(V, U)$ ЗВП соответствует симметричная матрица стоимостей (весов) ребер $C=[c_{ij}]_n$, где $c_{ij} \in R_0^+$, если $\{i, j\} \in U$, и $c_{ij}=\infty$ иначе. Эта же матрица определяет двудольный граф $D=(X, Y, E)$, где X, Y — множество вершин, $|X|=|Y|=|V|=n$; $E=\{(i, j) \mid i \in X, j \in Y\}$ — множество ребер с весами $c_{ij} \in R_0^+$, $|E|=2|V|$. Отсюда следует, что для решения поставленной задачи применимы идеи поиска в ширину в двудольных графах [1].

Ребро паросочетания M, связывающее вершины v и u, обозначим $[v, u]$, где u является напарником v. Ребра, не входящие в паросочетание M, называются свободными. Вершина, принадлежащая ребру паросочетания, определяется как насыщенная. Остальные вершины графа называются ненасыщенными, т.е. свободными. Мощность максимального паросочетания графа H с n вершинами не может быть больше $\lfloor n/2 \rfloor$. Если она равна $\lfloor n/2 \rfloor$, то паросочетание считается полным. При четном n полное паросочетание насыщает все вершины графа H и называется совершенным.

Пусть M — паросочетание в H. Простой путь называется чередующимся относительно M, если ребра пути чередуются через одно в M [2]. Чередующийся путь, который начинается и заканчивается ребрами, не принадлежащими паросочетанию M, называется увеличивающим относительно паросочетания M.

Если $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{2k-2}, v_{2k-1}, v_{2k})$ — увеличивающий путь относительно паросочетания M в графе H, то $P=(i_1, j_2, i_3, \ldots, j_{2k-2}, i_{2k-1}, j_{2k})$ — увеличивающий путь в двудольном графе $D=(X, Y, E)$ относительно паросочетания с тем же количеством ребер, что и M. Путь P начинается в ненасыщенной вершине $i_1 \in X$, заканчивается в ненасыщенной вершине $j_{2k} \in Y$ и содержит k свободных ребер $(i_1, j_2), (i_3, j_4), \ldots, (i_{2k-1}, j_{2k})$. Остальные k ребер пути P образуют паросочетание $\{[i_3, j_2], [i_5, j_4], \ldots, [i_{2k-1}, j_{2k-2}]\}$. На рис. 1, *а* изображен увеличивающий путь в графе $H=(V, U)$ относительно паросочетания $\{[v_2, v_3], [v_4, v_5]\}$, а на рис. 1, *б* — соответствующий ему увеличивающий путь P в графе $D=(X, Y, U)$ относительно паросочетания $\{[i_3, j_2], [i_5, j_4]\}$. Здесь $k=3$. Ребра паросочетаний представлены утолщенными линиями. Тонкими линиями изображены ребра графа D, не принадлежащие P.

Процедура нахождения увеличивающего пути является вариантом поиска в ширину, базирующемся на следующем известном факте: если P — множество ребер увеличивающего пути относительно паросочетания M в графе H, то $M \oplus P$ — паросочетание мощности $|M|+1$. Например, из увеличивающего пути относительно паросочетания $\{[v_2, v_3], [v_4, v_5]\}$ (см. рис. 1, *а*) следует паросочетание $\{[v_1, v_2], [v_3, v_4], [v_5, v_6]\}$. Множество ребер $\{[i_1, j_2], [i_3, j_2], [i_3, j_4], [i_5, j_4], [i_5, j_6]\}$ образует увеличивающий путь $P=(i_1, j_2, i_3, j_4, i_5, j_6)$ относительно паросочетания $M=\{[i_3, j_2], [i_5, j_4]\}$, при этом определяется паросочетание $M \oplus P=\{[i_1, j_2], [i_3, j_4], [i_5, j_6]\}$.

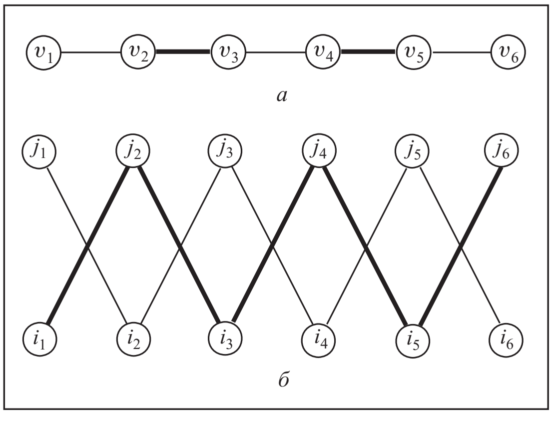

Рис. 1

Путь $P=(i_1, j_2, \ldots, i_{2k-1}, j_{2k})$ в графе D является простой цепью, изоморфной в графе H цепи $(v_1, v_2, \ldots, v_{2k})$ при соответствии $(v_s, v_{s+1}) \Leftrightarrow (i_s, j_{s+1})$, $s=1, 3, \ldots, 2k-1$, и $[v_{2s}, v_{2s+1}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [j_{2s+1}, i_{2s}]$, $s = 1, 2, \ldots, k-1$ (см. рис. 1) [3]. Паросочетание M и путь P образуют паросочетание $M \oplus P = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], \ldots, [i_{2k-1}, j_{2k}]\}$.

Допустимое решение ЗВП — это максимальное паросочетание взвешенного графа H. Поиск максимального паросочетания в H любым методом завершается выполнением условия теоремы в следующей формулировке. Паросочетание M в графе H максимально тогда и только тогда, когда в H не существует увеличивающего пути относительно M [1]. Увеличивающий путь относительно паросочетания M графа H называется кратчайшим, если его стоимость не больше стоимости любого увеличивающего пути относительно M. Решением ЗВП является максимальное паросочетание M_{opt} минимальной стоимости в графе H.

Пусть $M_{k-1} = \{[i_1, j_2], [i_3, j_4], \ldots, [i_{2k-3}, j_{2k-2}]\}$ — паросочетание с наименьшей суммой $C(M_{k-1})$ весов $k-1$ ребер на множестве всех паросочетаний мощности $k-1$ в двудольном графе D, $k \ge 2$. В графе H паросочетанию взаимно-однозначно соответствует паросочетание $\{[v_1, v_2], [v_3, v_4], \ldots, [v_{2k-3}, v_{2k-2}]\}$. Положим $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]], [i_2, j[i_2]], \ldots, [i_l, j[i_l]], \ldots, [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$, $i_l \ne j[i_l]$, где i_l — номер вершины множества X; $j[i_l]$ — номер вершины множества Y. В M_{k-1} все $2k-2$ вершин пронумерованы разными числами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $k \le \lfloor n/2 \rfloor$.

Обозначим $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$ паросочетание, содержащее ребро $[i_k, j[i_k]]$ с наименьшим весом среди всех ребер, которые можно присоединить к M_{k-1}; P_k — кратчайший увеличивающий путь относительно паросочетания M_{k-1}; $M_k^2 = M_{k-1} \oplus P_k$; $C(M_k^1)$ и $C(M_k^2)$ — стоимости паросочетаний M_k^1 и M_k^2.

Справедливо следующее утверждение, доказательство которого отличается от доказательства утверждения в [4] только обозначениями.

Лемма 1. Если $C(M_k^2) \le C(M_k^1)$, то $C(M_k) = C(M_k^2)$, иначе $C(M_k) = C(M_k^1)$; M_k — паросочетание с минимальной суммой весов k ребер в графе D.

Очевидно, для некоторого k паросочетание M_k максимально. Тогда $M_{\text{opt}} = M_k$ в графе $H = (V, U)$. Представленный метод решения ЗВП состоит в пошаговом нахождении в графе H паросочетаний M_k, $k = \overline{1, M_{\text{opt}}}$, путем построения в двудольном графе D каждого кратчайшего увеличивающего пути P_k относительно M_k, нахождения паросочетаний M_{k+1}^1 и $M_{k+1}^2 = M_k \oplus P_k$ и выбора из них M_{k+1}.

ОСНОВНАЯ ИДЕЯ АЛГОРИТМА

Паросочетание M_1 включает одно ребро, вес которого равен минимальному значению в матрице C. Если матрица C содержит несколько элементов минимального веса, то $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$, $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\}$, i_1 — номер первой по порядку строки, которой принадлежит $c_{i_1 j[i_1]}$.

В матрице C паросочетание M_2 с минимальной суммой весов двух ребер $C(M_2) \ne \infty$ определяется соотношением

$$C(M_2) = \min\{C(M_2^1), C(M_2^2)\}. \quad (1)$$

Паросочетание M_2^1 включает ребро $[i_1, j[i_1]]$ весом $c_{i_1 j[i_1]}$ и ребро $[i_1^1, j[i_1^1]]$ минимального веса $c_{i_1^1 j[i_1^1]}$ в подматрице, полученной удалением из матрицы C строк и столбцов с номерами i_1, $j[i_1]$: $c_{i_1^1 j[i_1^1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j \notin \{i_1, j[i_1]\}\}$. В паросочетание M_2^2 входит ребро $[i_1, s]$ весом $c_{i_1 s} = \min\{c_{i_1 j} \mid j \ne j[i_1]\}$ и ребро $[r, j[i_1]]$ весом $c_{r j[i_1]} = \min\{c_{i j[i_1]} \mid i \ne i_1\}$:

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{i_1} & \multicolumn{1}{c}{s} & \multicolumn{1}{c}{j[i_1]} & \multicolumn{1}{c}{j[i_1^1]} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
 & \infty & & & & & \\
\hline
i_1 & & \infty & c_{i_1 s} & c_{i_1 j[i_1]} & & \\
\hline
i_1 = s & & & \infty & & c_{i_1^1 j[i_1^1]} & \\
\hline
 & & c_{j[i_1] i_1} & & \infty & & \\
\hline
r = j[i_1^1] & & & & c_{rj[i_1]} & \infty & \\
\hline
 & & & & & & \infty \\
\hline
\end{array}
\qquad (2)
$$

Когда матрица C содержит не меньше двух элементов минимального веса, выбор элемента с наименьшим номером строки устраняет единственный случай потери оптимального решения M_2. Значение (1) может не достичь минимума, если

$$c_{l,l+1} = c_{l+1,l+2} = \min \{c_{ij} \mid i,\, j = \overline{1,\, n}\},\ 1 \le l \le n-3,$$

$$c_{l+2,l+3} < c_{rs} = \min \{c_{ij} \mid i,\, j \ne l+1,\, l+2\}.$$

Действительно, при $c_{i_1 j[i_1]} = c_{l+1,l+2}$ паросочетание $M_2' = \{[l+1,\, l+2],\, [r,\, s]\}$ получит вес $C(M_2') = c_{l+1,l+2} + c_{r,s}$. Этот вес больше веса паросочетания $M_2^1 =$ $= \{[l,\, l+1],\, [l+2,\, l+3]\}$:

$$
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{l+1} & \multicolumn{1}{c}{l+2} & \multicolumn{1}{c}{l+3} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\hline
 & \infty & c_{rs} & & & & \\
\hline
l & & \infty & c_{l,l+1} & & & \\
\hline
l+1 & & & \infty & c_{l+1,\, l+2} & & \\
\hline
l+2 & & & & \infty & c_{l+2,\, l+3} & \\
\hline
 & & & & & \infty & \\
\hline
 & & & & & & \infty \\
\hline
\end{array}
\qquad (3)
$$

На рис. 2, *а* изображено паросочетание M_2^1 в двудольном графе D, на рис. 2, *б* — подграф графа D, включающий паросочетание $M_2^2 = M_1 \oplus P_1$, где $P_1 = ((r,\, j[i_1]),\, [i_1,\, j[i_1]],\, (i_1,\, s))$ — множество ребер кратчайшего увеличивающего пути относительно M_1.

Таким образом, в двудольном графе D $M_2 = M_2^1$, если $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} +$ $+ c_{i_1^1 j[i_1^1]} < C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$, и в случае невыполнения условия $M_2 = M_2^2$.

По матрице C и паросочетаниям M_2^1, M_2^2 найдем паросочетание M_3 с минимальной суммой $C(M_3)$ весов трех ребер. Аналогично (1) представим

$$C(M_3) = \min \{C(M_3^1), C(M_3^2)\}.$$

Чтобы получить M_3 и $C(M_3)$, найдем $c_{i_2 j[i_2]} = \min \{c_{ij} | i,\, j \notin \{i_1,\, j[i_1],\, i_1^1,\, j[i_1^1]\}\}$. Пусть $C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]} < C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]}$. Тогда для паросочетаний $M_3^1 = M_2^1 \cup \{[i_2,\, j[i_2]]\}$ и $M_3' = M_2^2 \cup \{[i_2,\, j[i_2]]\}$ справедливо неравенство

$$C(M_3^1) = C(M_2^1) + c_{i_2 j[i_2]} \le C(M_3') = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} + c_{i_2 j[i_2]}.$$

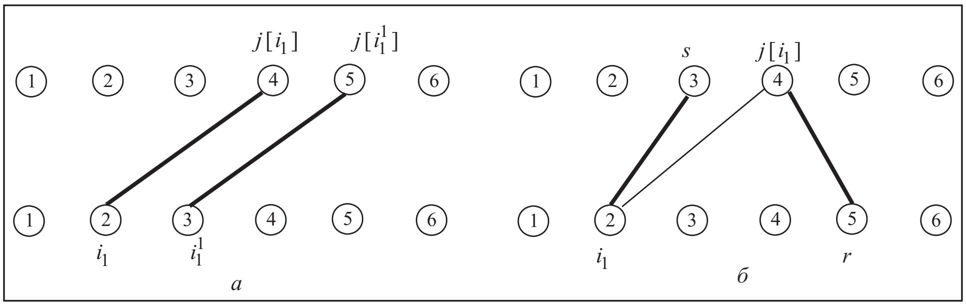

Рис. 2

Для выбора более точной верхней границы $C(M_3^1)$ стоимости $C(M_3)$ оптимального текущего решения M_3, чем $C(M'_3)$, построим кратчайший увеличивающий путь P_2 относительно M_2^1, найдем $M_3^2 = M_2^1 \oplus P_2$ и $C(M_3^2)$. Очевидно, $M_3 = M_3^1$, если $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, в случае невыполнения условия $M_3 = M_3^2$.

Предположим, что

$$C(M_2^2) = c_{i_1 s} + c_{rj[i_1]} \le C(M_2^1) = c_{i_1 j[i_1]} + c_{i_1^1 j[i_1^1]}.$$

Так как $c_{i_1^1 j[i_1^1]} \le c_{i_2 j[i_2]}$, то стоимости паросочетаний $M_3^1 = M_2^2 \cup \{[i_1^1, j[i_1^1]]\}$ и $M'_3 = M_2^1 \cup \{[i_2, j[i_2]]\}$ удовлетворяют неравенству $C(M_3^1) \le C(M'_3)$. Поэтому величина $C(M_3^1)$ является более точной оценкой сверху $C(M_3)$, чем $C(M'_3)$. Для нахождения M_3 построим кратчайший увеличивающий путь P_2 относительно M_2^2, определим паросочетание $M_3^2 = M_2^2 \oplus P_2$ и его стоимость $C(M_3^2)$. Следовательно, $M_3 = M_3^1$, если $C(M_3^1) < C(M_3^2)$, и в случае невыполнения условия $M_3 = M_3^2$.

Изложенный способ нахождения M_3 и $C(M_3)$ укладывается в схему решения ЗВП с помощью равенства

$$C(M_k) = \min\{C(M_k^1), C(M_k^2)\},\ 2 \le k \le |M_{\text{opt}}|. \tag{4}$$

При $k = |M_{\text{opt}}|$ хотя бы одно из значений $C(M_k^1)$ или $C(M_k^2)$ достигает минимума; $M_k = M_{\text{opt}}$, если при некотором k $C(M_k) \ne \infty$, а при $k+1$ $C(M_{k+1}^1) = C(M_{k+1}^2) = \infty$.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Назовем вершину $j_l \in Y$ отображением в графе D начала i_l ребра $[i_l[j[i_l]]]$ паросочетания $M_{k-1} = \{[i_1, j[i_1]], [i_2, j[i_2]], \ldots, [i_l, j[i_l]], \ldots, [i_{k-1}, j[i_{k-1}]]\}$ и обозначим ее j'_l. Вершину $i_m \in X$ назовем отображением конца вершины $j[i_l]$ этого ребра и обозначим ее i'_m.

Пусть $I_{k-1} = \{i_l \mid l = \overline{1, k-1}\}$, $J_{k-1} = \{j[i_l] \mid l = \overline{1, k-1}\}$ — множества вершин паросочетания M_{k-1}, а I'_{k-1}, J'_{k-1} — множества их отображений, $I_{k-1}, I'_{k-1} \subset X$, $J_{k-1}, J'_{k-1} \subset Y$. Построение M_{opt} начинается с нахождения $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$ и удаления ребер, инцидентных отображениям j'_1 и i'_1 вершин i_1 и $j[i_1]$ соответственно. В матрице C удаленные ребра принимают вес, равный бесконечности.

Чтобы из (4) определить M_k, сначала находится $M_k^1 = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$, где

$$c_{i_k j[i_k]} = \min\{c_{ij} \mid i \notin I_{k-1} \cup I'_{k-1}, j \notin J_{k-1} \cup J'_{k-1}\}, \tag{5}$$

где c_{ij} — элементы матрицы C. В подграфе графа D удаляются ребра, инцидентные отображениям j'_k, i'_k вершин i_k и $j[i_k]$ соответственно. Каждое удаляемое ребро получает в матрице C вес, равный бесконечности.

Чтобы найти M_k^2, для каждой вершины $i_k \notin I_{k-1} \cup I'_{k-1}$ формируется подграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ графа D. Он включает подмножество $E_{i_k}^1$ свободных ребер $(i_k, j[i_l])$, $l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, подмножество $E_{i_k}^2$ всех ребер, соединяющих вершины множества I_{k-1} с вершинами множества J_{k-1}, и подмножество $E_{i_k}^3$ свободных ребер (i_l, j_s), $j_s \neq j_k$, $j_s \in \{Y - \{J_{k-1} \cup J'_{k-1} - \{j_k\}\}\}$, $l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, с весами

$$c_{i_l j_s} = \min \{c_{i_l j} \mid j \in Y - \{J_{k-1} \cup J'_{k-1}\} - \{j_k\}\}, \tag{6}$$

образующих множество вершин $Y_{i_k}^1$. Следовательно, подграф $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ включает множества вершин $X_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup J_{k-1}$ и подмножества ребер $E_{i_k}^1 \cup E_{i_k}^2 \cup E_{i_k}^3$.

Подграф D_{i_k} представлен на рис. 3, *а*. Свободные ребра $(i_k, j[i_1])$, $(i_k, j[i_l])$, $(i_k, j[i_{k-1}])$ образуют подмножество $E_{i_k}^1$. Ребра $(i_1, j[i_l])$, $(i_1, [j_{k-1}])$, $(i_l, j[i_1])$, $(i_l, j[i_{k-1}])$, $(i_{k-1}, j[i_1])$ и все ребра паросочетания M_{k-1} входят в подмножество $E_{i_k}^2$. Подмножество $E_{i_k}^3$ включает ребра (i_1, j_s), (i_l, j_r), (i_{k-1}, j_r). В подграфе $D_{i_k} = (X_{i_k}, Y_{i_k}, E_{i_k})$ имеем $X_{i_k} = \{i_k, i_1, i_l, i_{k-1}\}$, $Y_{i_k}^1 = \{j_s, j_r\}$, $Y_{i_k} = Y_{i_k}^1 \cup \{j[i_1], j[i_l], j[i_{k-1}]\}$.

Подграф D_{i_k} строится для нахождения в нем пути P_{i_k}, кратчайшего среди всех увеличивающих путей относительно паросочетания M_{k-1}. Этот путь должен начинаться в вершине i_k и заканчиваться в некоторой вершине $j_s \in Y_{i_k}^1$, $j_s \neq j_k$. Если существует путь P_{i_k}, то согласно лемме 1 $M_{i_k} = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ — паросочетание, доставляющее минимальную сумму весов k ребер в подграфе D_{i_k}. В исходном графе H пути P_{i_k} соответствует паросочетание той же мощности и с такими же весами ребер, что и в D_{i_k}. Построение подграфа D_{i_k} и поиск в нем пути P_{i_k} повторяется для каждой вершины $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$ и завершается выбором паросочетания M_k^2 стоимостью

$$C(M_k^2) = \min \{C(M_{i_k}^2) \mid i_k \notin I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}. \tag{7}$$

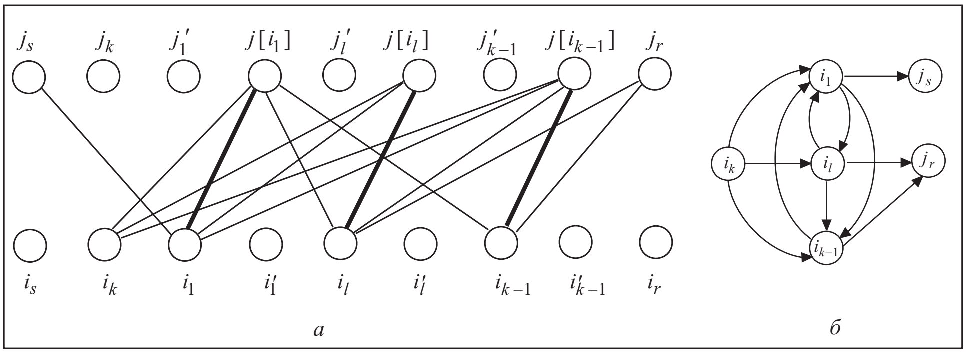

Рис. 3

Поиск пути P_{i_k} упрощается во вспомогательном орграфе (Z_{i_k}, A_{i_k}), полученном в результате преобразования D_{i_k}. Орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}) включает множество вершин $Z_{i_k} = \{i_k\} \cup I_{k-1} \cup Y^1_{i_k}$ и множества дуг $A_{i_k} = A^1_{i_k} \cup A^2_{i_k} \cup A^3_{i_k}$. В подмножество $A^1_{i_k}$ входит дуга (i_k, i_l), $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$, $i_l \in I_{k-1}$, тогда и только тогда, когда вершина $j[i_l]$ ребра $(i_k, j[i_l])$ является напарником вершины i_l. Дуге (i_k, i_l) присваивается вес $c(i_k, i_l) = c_{i_k j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Дуга (i_d, i_l), i_d, $i_l \in I_{k-1}$, входит в $A^2_{i_k}$, если и только если вершина $j[i_l]$ ребра $(i_d, j[i_l])$ является напарником вершины i_l. Дуга (i_d, i_l) получает вес $c(i_d, i_l) = c_{i_d j[i_l]} + c_{i_l j[i_l]}$. Подмножество A_{i_3} содержит все дуги (i_l, j_s), $i_l \in I_{k-1}$, $j_s \in Y^1_{i_k}$, если вершины i_l и j_s соединены ребром в D_{i_k}. Дуга (i_l, j_s) имеет вес $c(i_l, j_s) = c_{i_l j_s}$ (рис. 3, *б*). Нетрудно убедиться, что при неотрицательных весах ребер графа D путь P_{i_k} — кратчайший среди всех простых путей из вершины i_k в вершины множества $Y^1_{i_k}$ орграфа (Z_{i_k}, A_{i_k}). Поиск P_{i_k} выполняется алгоритмом Дейкстры.

Обозначим $\langle D_k \rangle$ подграф двудольного графа (X, Y, E), порожденный множествами вершин $I_k = \{i_l \mid l = \overline{1, k}\}$ и $J_k = \{j[i_l] \mid l = \overline{1, k}\}$ паросочетания $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid l = \overline{1, k}\}$.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Представим алгоритм нахождения во взвешенном графе $H = (V, U)$ максимального паросочетания M_{opt} с минимальной суммой весов его ребер; $C = [c_{ij}]_n$ — симметричная матрица весов ребер графа H, в которой $c_{ij} = c_{ji} \in R^+_0$, если $\{i, j\} \in U$, $i \neq j$, и $c_{ij} = c_{ji} = \infty$ в противном случае, R^+_0 — множество неотрицательных действительных чисел. Решение M_{opt} взаимно-однозначно соответствует максимальному паросочетанию $M_k = \{[i_l, j[i_l]] \mid i_l \neq j[i_l], l = \overline{1, k}\}$ двудольного взвешенного графа (X, Y, E), $|X| = |Y| = |V|$, $|E| = 2|U|$, $i_l \in X$, $j[i_l] \in Y$, построенного для матрицы C.

В матрице C найти $c_{i_1 j[i_1]} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, n}\}$, i_1 — номер первой по порядку строки, содержащей минимальный элемент; $M_1 = \{[i_1, j[i_1]]\}$, $I_1 = \{i_1\}$, $J_1 = \{j[i_1]\}$, $I'_1 = \{j[i_1]\} \subset X$, $J'_1 = \{i_1\} \subset Y$; удалить все ребра, инцидентные вершинам $j[i_1] \in I'_1$, $i_1 \in J'_1$; D_1 — подграф, содержащий ребро $[i_1, j[i_1]]$, $\langle D_1 \rangle = D_1$, $k = 1$.

Алгоритм решения ЗВП состоит из следующих шагов.

S1. $k = k + 1$; если $k > \lfloor n/2 \rfloor$, то $M_{\text{opt}} = M_{k-1}$.

S2. Найти $c_{i_k j[i_k]}$ по формуле (5); если $c_{i_k j[i_k]} = \infty$, то конец: $M_{\text{opt}} = M_{k-1}$; $M^1_k = M_{k-1} \cup \{[i_k, j[i_k]]\}$, вычислить $C(M^1_k)$.

S3. Для каждой вершины $i_k \in X - \{I_{k-1} \cup I'_{k-1}\}$ построить подграф D_{i_k} и после преобразования его во вспомогательный орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}) найти путь P_{i_k}, кратчайший из путей, соединяющих вершину i_k с вершинами $j_s \in Y - \{J_{k-1} \cup J'_{k-1}\} - \{j_k\}$. Каждая вершина j_s является концом ребра (i_l, j_s), $i_l \in I_{k-1}$, $l \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, весом $c_{i_l j_s}$, равным (6). Определить $M^2_{i_k} = P_{i_k} \oplus M_{k-1}$ и $C(M^2_{i_k})$. Если в графе D_{i_k} не существует пути P_{i_k}, то положить $M^2_{i_k} = \infty$. Из (7) найти M^2_k и $C(M^2_k)$; если для всех i_k $C(M^2_{i_k}) = \infty$, то $C(M^2_k) = \infty$, $M^2_k = \varnothing$.

S4. Если $C(M_k^1)=C(M_k^2)=\infty$, то конец: $M_{\text{opt}}=M_{k-1}$, иначе если $C(M_k^1)<C(M_k^2)$, то $M_k=M_k^1$, $I_k=I_{k-1}\cup\{i_k\}$, $J_k=J_{k-1}\cup\{j[i_k]\}$, $I'_k=$ $=I'_{k-1}\cup\{i'_k\}$, $J'_k=J'_{k-1}\cup\{j'_k\}$, где вершины $i'_k\in X$ и $j'_k\in Y$ — отображения соответственно конца $j[i_k]$ и начала i_k ребра $[i_k, j[i_k]]$; удалить ребра, инцидентные вершинам i'_k и j'_k; сформировать подграф $\langle D_k\rangle$, порожденный множеством вершин $I_k\cup J_k$, и перейти к шагу S1, иначе $M_k=M_k^2$; определить I_k, J_k, I'_k, J'_k; удалить все ребра, инцидентные вершинам множества $I'_k\cup J'_k$, и сформировать подграф $\langle D_k\rangle$, порожденный множеством вершин $I_k\cup J_k$; перейти к шагу S1.

Алгоритм представлен последовательностью итераций. Первая итерация алгоритма завершается на подготовительном этапе нахождением минимального элемента в C, образующего паросочетание M_1. Каждая следующая итерация включает шаги S2–S4 для построения паросочетания M_k, $k=\overline{2,|M_{\text{opt}}|}$, с минимальной суммой $C(M_k)$ весов k ребер.

Теорема 1. После упорядочения по неубыванию значений элементов, расположенных над главной диагональю матрицы стоимостей $C=[c_{ij}]_n$ графа H, ЗВП корректно решается за время $O(n^3)$.

Доказательство. Согласно лемме 1 нужно сначала показать, что $M_k=M_k^2$, если $C(M_k^2)\le C(M_k^1)$. Действительно, для каждой свободной вершины i_k алгоритм строит подграф D_{i_k}, включающий множество всех увеличивающих путей из i_k относительно паросочетания M_{k-1}, $k=\overline{2,|M_{\text{opt}}|}$, выбирает среди них кратчайший путь P_{i_k} и определяет $M_{i_k}^2$ и $C(M_{i_k}^2)$. Корректность однократного обращения к i_k следует из приведенного в [1] доказательства, согласно которому при отсутствии в графе увеличивающегося пути из свободной вершины не существует увеличивающего пути из этой вершины на всех последующих этапах построения паросочетания.

Алгоритм завершает работу на k-й итерации. Если $k=\lfloor n/2\rfloor$, то построенное паросочетание M_k максимально. В противном случае не существует пути из каждой свободной вершины i_k в соответствующем ей орграфе (Z_{i_k}, A_{i_k}), а в D не существует увеличивающих путей относительно текущего паросочетания M_{k-1}. Отсюда следует, что M_{k-1} максимально [1].

Решение M_{opt} ЗВП определяется из матрицы C, соответствующей как двудольному $D=(X,Y,E)$, так и произвольному $H=(V,U)$ графам.

Оценим сверху время работы алгоритма. Оно максимально, когда n-вершинный граф H полный и, следовательно, $|M_{\text{opt}}|=\lfloor n/2\rfloor$.

Если упорядочить по неубыванию значения элементов, расположенных над главной диагональю матрицы C, то для выполнения подготовительного этапа алгоритма, который определяет $c_{i_1 j[i_1]}$, потребуется время $O((n(n-1)/2)\log_2(n(n-1)/2))$.

Наибольшее число операций сравнения на шаге S2 k-й итерации, $k=\overline{2,\lfloor n/2\rfloor}$, равное $2(n-2(k-1))$, достигается на матрице C, в которой $c_{12}=c_{i_1 j[i_1]}$, $c_{34}=c_{i_2 j[i_2]},\ldots,c_{2k-1,2k}=c_{i_k j[i_k]}$. Чтобы определить $\lfloor n/2\rfloor-1$ элементов матрицы C, образующих вместе с элементом $[i_1, j[i_1]]$ паросочетание M_k^1, $k=\lfloor n/2\rfloor$, необходимо выполнить $t_1=2(n-2)+2(n-4)+\ldots+2(n-2(\lfloor n/2\rfloor-1))$ сравнений. Следовательно, $t_1=O(n^2)$.

Построение графа D_{i_k} на шаге S3 при $k=2$ требует $n-4$ сравнений для нахождения значений $c_{i_l j_s}$ и одну операцию сложения для вычисления $C(M_{i_k}^2)$. На этом шаге при $k=2$ нужно построить $n-2$ графов D_{i_k}, вычислить $n-2$ соответствующих им значений $C(M_{i_k}^2)$ и найти значение $C(M_k^2)$. Поэтому $C(M_2^2)$ определяется выполнением $(n-3)(n-2)+n-3=(n-2)^2-1$ операций. Для нахождения (1) на шаге S4 требуется одно сравнение. Таким образом, вычисление $C(M_2)$ и построение M_2 выполняется за время $t_2=O(n^2)$.

Для $k=\overline{3,\lfloor n/2 \rfloor}$ на шаге S3 нужно построить $n-2(k-1)$ графов D_{i_k}. Граф D_{i_k} строится в результате выполнения $n-2(k-1)-2$ сравнений по нахождению (6) для каждой из $k-1$ его вершин $i_l \in I_{k-1}$. Кроме того, на шаге S3 граф D_{i_k} за время $c_1(k-1)$ преобразуется в орграф (Z_{i_k}, A_{i_k}), в котором при трудоемкости $c_2(k-1)^2$ ищется путь P_{i_k}, его длина $C(P_{i_k})$ и паросочетание $M_{i_k}^2$ стоимостью $C(M_{i_k}^2)$, $c_1, c_2 < k-1$. Чтобы выбрать M_k, достаточно $n-2(k-1)-1$ сравнений для нахождения $C(M_k^2)$ и одну операцию сравнения $C(M_k^1)$ и $C(M_k^2)$, выполняемую на шаге S4. Шаг S4 завершается формированием графа $\langle D_k \rangle$ за время $c_3 k$, $c_3 < k$.

Определим число операций t_{k1}, выполняемых на шаге S3, и число операций t_{k2}, выполняемых на шаге S4, для $k=\overline{3,\lfloor n/2 \rfloor}$:

$$t_{k1}=[n-2(k-1)][(k-1)(n-2k)+c_1(k-1)]+n-2(k-1)+c_3 k,$$

$$t_{k2}=[n-2(k-1)]c_2(k-1)^2.$$

Так как для любого n и $k=\overline{3,\lfloor n/2 \rfloor}$

$$[n-2(k-1)](k-1)(n-2k) \le n^2,$$

$$[n-2(k-1)]c_1(k-1) \le [n-2(k-1)](k-1)^2 \le n^2,$$

$$n-2(k-1)+c_3 k \le n-2(k-1)+k^2 = c_{k1} n,\ c_{k1} < n,$$

$$[n-2(k-1)]c_2(k-1)^2 \le [n-2(k-1)](k-1)^3 = c_{k2} n^2,\ c_{k2} < n,$$

имеем

$$t_{k1} \le 2n^2 + c_{k1} n = O(n^2),\ t_{k2} = O(n^2).$$

Трудоемкость выполнения $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ итераций, начиная со второй, оценивается числом элементарных действий, равным сумме, состоящей из $2\lfloor n/2 \rfloor$ слагаемых, $t = t_1 + t_2 + \sum_{k=3}^{\lfloor n/2 \rfloor}(t_{k1}+t_{k2})$, в которой каждое слагаемое ограничено полиномом второй степени. Поэтому $t=O(n^3)$. □

Рассмотим пример.

Для демонстрации работы алгоритма выбран пример ЗВП из [1] с матрицей стоимостей полного графа

$$C = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & \infty & 19 & 8 & 8 & 18 & 18 & 25 & 29 \\ 2 & 19 & \infty & 0 & 8 & 10 & 4 & 15 & 18 \\ 3 & 8 & 0 & \infty & 4 & 8 & 2 & 15 & 18 \\ 4 & 8 & 8 & 4 & \infty & 2 & 10 & 15 & 16 \\ 5 & 18 & 10 & 8 & 2 & \infty & 10 & 22 & 25 \\ 6 & 18 & 4 & 2 & 10 & 10 & \infty & 19 & 19 \\ 7 & 25 & 15 & 15 & 15 & 22 & 19 & \infty & 37 \\ 8 & 29 & 18 & 18 & 16 & 25 & 19 & 37 & \infty \\ \hline \end{array}$$

Определим $c_{23} = \min\{c_{ij} \mid i, j = \overline{1, 8}\} = 0$, $M_1 = \{[2,3]\}$, $I_1 = \{2\}$, $J_1 = \{3\}$, $I_1' = \{3\}$, $J_1' = \{2\}$, $C(M_1) = c_{23} = 0$. В графе D удалим ребра, инцидентные вершинам $3 \in I_1'$ и $2 \in J_1'$, образуя подграф D_1.

S1. $k = 2$.

S2. $c_{45} = \min\{c_{ij} \mid i, j \neq 2, 3\} = 2$, $M_2^1 = M_1 \cup \{[4,5]\} = \{[2,3],[4,5]\}$, $C(M_2^1) = 2$.

S3. Для вершин 1, 4, 5, 6, 7, 8, образующих множество $X - (I_1 \cup I_1')$, строятся подграфы $D_1, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8$ и соответствующие им орграфы, в которых выполняется поиск кратчайших увеличивающих путей $P_1, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ относительно паросочетания M_1. Для каждого пути P_i, $i \in X - (I_1 \cup I_1')$, если он существует, определяется паросочетание M_i^2 и его стоимость $C(M_i^2)$.

S4. Так как $M_2^1 < M_2^2$, к подграфу D_1 добавляется ребро $[4,5]$, $I_2 = \{2,4\}$, $J_2 = \{3,5\}$, $I_2' = \{3,5\}$, $J_2' = \{2,4\}$, удаляются ребра, инцидентные вершинам $5 \in I_2'$, $4 \in J_2'$. В результате построен граф $\langle D_2 \rangle$, порожденный множеством вершин I_2 и J_2 (рис. 4, *а*).

Рассмотрим подграф D_4 и соответствующий ему вспомогательный орграф (Z_4, A_4). Единственное ребро $(2,6)$ в D_4 образует подмножество свободных ребер E_4^3. Его вес $c_{26} = 4$ определяется из (6), $Y_4^1 = \{6\}$. Множество ребер $\{(4,3),[2,3],(2,6)\}$ пути $P_4 = (4,2,6) \in (Z_4, A_4)$ и паросочетание $M_1 = \{[2,3]\}$ образуют паросочетание $M_4^2 = \{[4,3],[2,6]\}$ стоимостью $C(M_4^2)$, полученной из (7). Таким образом, $M_2^2 = M_4^2$, $C(M_2^2) = c_{43} + c_{16} = 4 + 4 = 8$.

Для $k = 3$ по формуле (4) находится $c_{16} = \min\{c_{ij} \mid i, j \neq 2, 3, 4, 5\} = 18$, $M_3^1 = M_2 \cup \{[1,6]\}$, $C(M_3^1) = c_{23} + c_{45} + c_{16} = 0 + 2 + 18 = 20$ (рис. 4, *б*).

Чтобы определить M_3^2, для вершин $i_k \in X - (I_3 \cup I_3') = \{1, 6, 7, 8\}$ формируются подграфы D_{i_k}, $\langle D_2 \rangle \subset D_{i_k}$, в которых с помощью орграфов (Z_{i_k}, A_{i_k}) находятся кратчайшие увеличивающие пути P_{i_k} относительно паросочетания M_2, паросочетания $M_{i_k}^2$ и их стоимости $C(M_{i_k}^2)$. Подграф D_1 содержит кратчайший увеличивающий путь относительно M_2, соответствующий пути $P_1 = (1,2,6)$ в орграфе (Z_1, A_1) и доставляющий стоимость паросочетания M_1^2, не большую стоимостей паросочетаний M_6^2, M_7^2, M_8^2. Так как $P_1 = \{(1,3),[2,3],(2,6)\}$, $M_2 = \{[2,3],[4,5]\}$, то $M_1^2 = \{[1,3],[4,5],[2,6]\}$, $C(M_1^2) = c_{13} + c_{45} + c_{26} = 8 + 2 + 4 = 14$, $C(M_3^2) = C(M_1^3)$. В этом случае $C(M_3^2) < C(M_3^1)$, $M_3 = M_3^2$, $I_3 = \{1,4,2\}$, $J_3 = \{3,5,6\}$, $I_3' = \{3,5,6\}$, $J_3' = \{1,2,4\}$. Удаляются ребра, инцидентные вершинам множества I_3' и J_3'. На рис. 5, *а* изображен подграф $\langle D_3 \rangle$, порожденный множеством вершин I_3 и J_3.

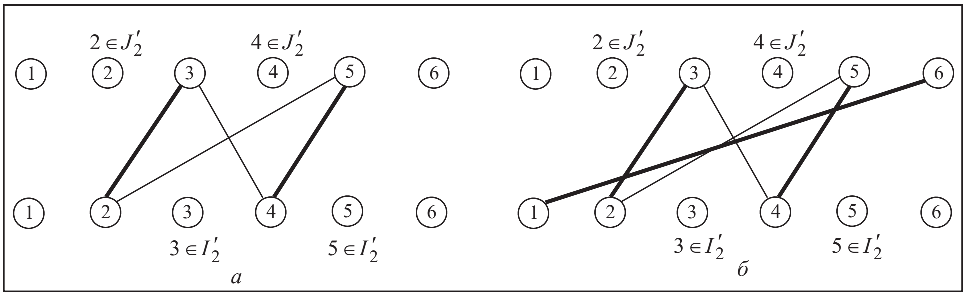

Рис. 4

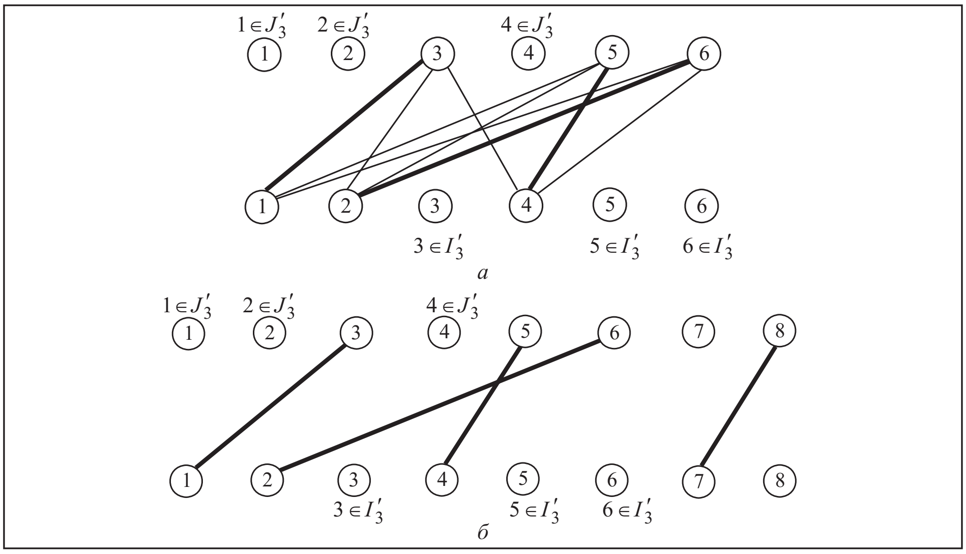

Рис. 5

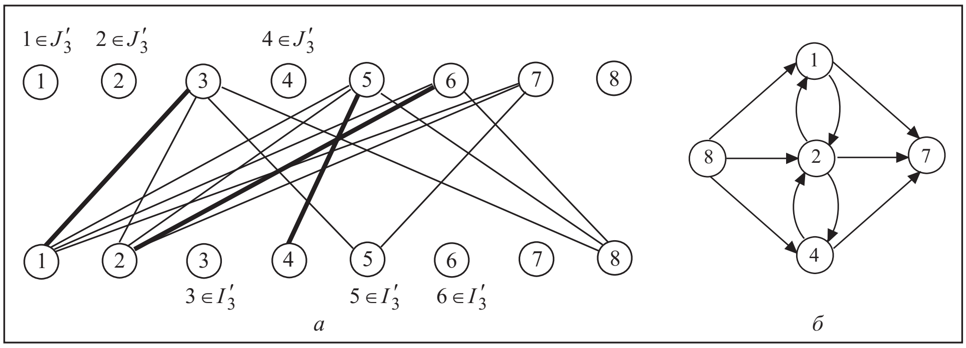

Рис. 6

Для $k = 4$ имеем $c_{78} = \min \{c_{ij} \mid i, j \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 37$, $M_4^1 = \{[1, 3], [2, 6], [4, 5], [7, 8]\}$, $C(M_4^1) = 3 + 4 + 2 + 37 = 51$ (рис. 5, *б*).

Нахождение паросочетания M_4^2 начинается с построения для вершин множества $X - (I_3 \cup I_3') = \{7, 8\}$ подграфов D_7, D_8 и соответствующих им орграфов (Z_7, A_7), (Z_8, A_8). На рис. 6, *а* изображен подграф D_8, а на рис. 6, *б* — орграф (Z_8, A_8).

Путь $P_8 = (8, 2, 7)$ в орграфе (Z_8, A_8) является кратчайшим. В подграфе D_8 он представлен как кратчайший увеличивающий путь $P_8 = ((8, 6), [2, 6], (2, 7))$ относительно паросочетания M_3. Из $M_8^2 = P_8 \oplus M_3 = \{[1, 3], [2, 7], [4, 5], [8, 6]\}$ следует $C(M_8^2) = c_{13} + c_{27} + c_{45} + c_{86} = 8 + 15 + 2 + 19 = 44$. После нахождения в графе D_7 пути P_7, паросочетания M_7^2 и его стоимости $C(M_7^2)$ выясняется, что $C(M_7^2) > C(M_8^2) = 44$. Отсюда следует, что $M_4^2 = M_8^2$, а так как $C(M_4^2) < C(M_4^1)$, то $M_4 = M_8^2$. Поскольку $k = \lfloor n/2 \rfloor = 4$, паросочетание $M_4 = \{[1, 3], [2, 7], [4, 5], [8, 6]\}$ максимально и, следовательно, является решением ЗВП. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод решения задачи о взвешенном паросочетании представлен последовательностью итераций, на каждой из которых строится паросочетание M_k, $k = \overline{1, |M_{\text{opt}}|}$, характеризующееся минимальной суммой весов k ребер. Доказана корректность предложенного метода и показано, что после упорядочения по неубыванию значений, расположенных над главной диагональю входной матрицы стоимости, метод корректно строит решение задачи за время $O(n^3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1985. — 510 с.
2. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. — М.: Мир, 1998. — 653 с.
3. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — 300 с.
4. Маций О.Б., Морозов А.В., Панишев А.В. Быстрый алгоритм нахождения 2-фактора минимального веса // Кибернетика и системный анализ. — 2016. — **52**, № 3. — С. 154–163.

Надійшла до редакції 28.11.2015

О.Б. Маций, А.В. Морозов, А.В. Панішев

РЕКУРЕНТНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ЗВАЖЕНУ ПАРОСПОЛУКУ

Анотація. Відома задача про зважену паросполуку в довільному графі H з n вершинами зводиться до однієї із задач про паросполуку для двочасткового графа з $2n$ вершинами. Максимальна паросполука графа H з мінімальною сумою ваг ребер, заданих матрицею $[c_{ij}]_n$, знаходиться за час $O(n^3)$ після впорядкування за неспаданням значень c_{ij}, розташованих над головною діагоналлю.

Ключові слова: паросполука, задача про зважену паросполуку, двочастковий граф, збільшуючий шлях, задача про призначення.

O.B. Matsiy, A.V. Morozov, A.V. Panishev

A RECURRENT ALGORITHM TO SOLVE WEIGHTED MATCHING PROBLEM

Abstract. The well-known problem of weighted matching in an arbitrary graph H with n vertices is reduced to a of matching problem for a bipartite graph with $2n$ vertices. The maximum matching of graph H with the minimum sum of weights of edges specified by matrix $[c_{ij}]_n$ is found in time $O(n^3)$ after ordering the values c_{ij} above the main diagonal in non-decreasing order.

Keywords: matching, the problem of the weighted matching, bipartite graph, increasing path, the assignment problem.

Маций Ольга Борисовна,
ассистентка Харьковского национального автомобильно-дорожного университета, e-mail: om21@mail.ru.

Морозов Андрей Васильевич,
кандидат техн. наук, доцент, декан Житомирского государственного технологического университета, e-mail: morozov.andriy@gmail.com.

Панишев Анатолий Васильевич,
доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Житомирского государственного технологического университета, e-mail: pzs.ztu@gmail.com.