УДК 519.85

О.С. ПИЧУГИНА, С.В. ЯКОВЛЕВ

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОДОЛЖЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Аннотация. Введены понятия функционального представления множества точек евклидового арифметического пространства и продолжения функций с данного множества в его надмножество. Показана связь функциональных представлений множеств и продолжений с них. Получены строгие функциональные представления булевого, общего перестановочного и полиперестановочного множеств. Продемонстрированы преимущества применения строгих представлений евклидовых комбинаторных множеств в построении функциональных продолжений с этих множеств и решении комбинаторных задач.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, евклидово комбинаторное множество, непрерывное функциональное представление множества, продолжение функций, общее множество перестановок, булево множество.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья посвящена разработке новых подходов к представлению евклидовых комбинаторных множеств [1], их классификации и исследованию свойств функций, заданных на этих множествах. Указанные направления исследований тесно связаны с работами [2, 3], посвященными общей классификации комбинаторных объектов и методов комбинаторной оптимизации.

Понятие евклидовых комбинаторных множеств как наборов числовых комбинаторных конфигураций, отличающихся составом или порядком следования элементов, при их отображении в арифметическое евклидово пространство впервые было введено Ю.Г. Стояном [1]. Дальнейшее развитие этого направления получило название «евклидова комбинаторная оптимизация» [4–6].

Фундаментальные исследования в этой области условно можно разделить на три взаимосвязанных направления:

• изучение тополого-метрических свойств евклидовых комбинаторных множеств и их подмножеств;

• исследование свойств функций, заданных на евклидовых комбинаторных множествах, включая выпуклые и сильновыпуклые продолжения этих функций на выпуклые оболочки указанных множеств;

• разработка новых методов евклидовой комбинаторной оптимизации.

Свойства евклидовых комбинаторных множеств и их выпуклых оболочек описаны в работах [4, 5, 7–12]. Заметим, что широкий класс евклидовых комбинаторных множеств обладает свойством, согласно которому точки множества и только они являются вершинами своих выпуклых оболочек — комбинаторных многогранников. Такие множества назовем вершинно расположенными. Вершинно расположенные множества, принадлежащие одновременно описанной гиперсфере, назовем полиэдрально-сферическими.

Теория выпуклых продолжений функций, заданных на вершинно расположенных множествах, подробно изложена в [13, 14] и получила развитие, в том числе для полиэдрально-сферических множеств, в работах [15–19]. Основные алгоритмы и методы евклидовой комбинаторной оптимизации освещены в [4, 5, 20–27].

Практические задачи оптимизации часто имеют различные формулировки — в виде задач на графах, целочисленных, комбинаторных или непрерывных задач [7–9], представляя допустимую область графом, целочисленной решеткой с дополнительными ограничениями, комбинаторным множеством или пересечением непрерывных областей евклидового арифметического пространства соответственно. Каждая из таких постановок порождает свои методы оптимизации, среди которых последние формулировки, использующие непрерывные представления дискретных множеств, занимают особое место, поскольку дают возможность использовать весь арсенал математического программирования.

Евклидовы комбинаторные множества представляют особый интерес относительно возможности непрерывных представлений, поскольку позволяют погружение в пространство точек R^n, исследование их геометрических образов и соответствующих комбинаторных многогранников. Так, например, многогранник аналитически задается системой линейных ограничений, и эта система является его непрерывным представлением. В данной статье исследуется возможность аналитического задания произвольного геометрического места точек, в том числе евклидового комбинаторного множества, и применение этих аналитических представлений множеств в евклидовой комбинаторной оптимизации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу оптимизации вида

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

$$x \in E \subset R^n, \tag{2}$$

полагая, что функция (1) определена на множестве E.

Множеством E может быть произвольное множество точек R^n: дискретное или континуальное, односвязное или многосвязное множество с компонентами связности и т.д.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МНОЖЕСТВ

2.1. Основные определения. Функциональным назовем представление множества $E \subseteq R^n$ с помощью функциональных зависимостей вида

$$f_j(x) = 0, \ j \in J_{m'} = \{1, \ldots, m'\}, \tag{3}$$

$$f_j(x) \le 0, \ j \in J_m \setminus J_{m'}. \tag{4}$$

В зависимости от типа функций (3), (4) функциональные представления могут быть линейными и нелинейными, непрерывными, дифференцируемыми, гладкими, выпуклыми и т.п.

В обозначениях

$$M_j = \left\{ x \in R^n : \begin{cases} f_j(x) = 0, \ j \in J_{m'}, \\ f_j(x) \le 0, \ j \in J_m \setminus J_{m'}, \end{cases} \right. \tag{5}$$

функциональное представление (3), (4) приобретает форму

$$E = \bigcap_{j \in J_m} M_j. \tag{6}$$

Введем несколько типов таких представлений. Так, система (3), (4) называется:

а) строгим представлением E, если

$$m = m', \tag{7}$$

в противном случае — нестрогим;

б) неизбыточным представлением E, если извлечение любого из ограничений (3), (4) приводит к нарушению (6):

$$\forall i \in J_m \bigcap_{j \neq i} M_j \neq E; \tag{8}$$

в) ограниченным представлением E, если в (5) есть ограниченные множества: $\exists j \in J_m$, $r_j > 0$, $a_j \in R^n : M_j \subseteq C_{r_j}(a_j)$ ($C_{r_j}(a_j)$ — шар радиуса r_j с центром в точке a_j).

Для неизбыточных представлений введем также классификацию по числу функций в строгой части (3). Так, представление (3), (4), (8) назовем:

- однокомпонентным, если $m' = 1$;
- касательным, если $m' = 2$ и E — множество точек касания двух поверхностей;
- пересекающимся в случае, если

$$m' = n, \tag{9}$$

т.е. E образуется в пересечении n поверхностей;

- смешанным в случае $2 < m' < n$.

Замечание 1. Представление (3), (4) может обладать определенными свойствами в подобластях R^n, поэтому в случае необходимости указывается его тип и область.

Цель статьи — решение задач вида (1), (2), в первую очередь комбинаторных, с помощью функциональных представлений допустимой области.

2.2. Анализ литературных данных: функциональные представления и применения. Для евклидовых комбинаторных множеств перспектива функционального представления означает возможность непрерывной постановки дискретной задачи (1), (2) на конечном множестве точек

$$|E| < \infty \tag{10}$$

и применения нелинейной оптимизации к ее решению [28].

Рассмотрим известное множество булевых векторов [8, 21, 29–31]

$$E = B'_n = \{-1, 1\}^n. \tag{11}$$

Задача (1), (2), (11) имеет множество практических приложений [29] и является, как правило, NP-трудной. Поскольку она представляет интерес как с практической, так и с теоретической точек зрения, для ее решения разработано множество методов [21, 29–33] как комбинаторных, так и непрерывных. Непрерывные подходы к (1), (2), (11) основаны на ее непрерывных переформулировках и релаксациях [29, 30]. К последним относятся, например, полуопределенные релаксации [31]. Одним из методов трансформации этой дискретной задачи в непрерывную является применение следующего аналитического представления условия булевости (2), (11) [21, 30, 32, 33]:

$$E = B_n = \{x \in R^n : x_i^2 - x_i = 0,\ i \in J_n\} \quad (E = B'_n = \{x \in R^n : x_i^2 = 1,\ i \in J_n\}). \tag{12}$$

Как видим, (12) — строгое представление булевого множества вида (3), (7), где

$$B_n : f_i(x) = x_i^2 - x_i,\ i \in J_n \quad (B'_n : f_i(x) = x_i^2 - 1,\ i \in J_n). \tag{13}$$

Безусловная булевая задача (1), (2), (11) трансформируется в условную непрерывную (1), (2), (12), а последняя, в свою очередь, — в безусловную задачу с функцией Лагранжа:

$$\Phi(x, \bar{\lambda}) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x) \to \min, \tag{14}$$

где $\{f_j(x)\}_j$ задано с помощью (13), $\bar{\lambda} \in R^n$. В вычислительных схемах решения (1), (2), (12) рассматривается релаксация типа [30]

$$\Phi^1(x, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \to \min$$

вместо (14), которая для B_n, например, может быть представлена в виде

$$\Phi^1(x, \lambda) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} (x_i^2 - x_i) = f(x) + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{n}{4} \right) \to \min. \quad (15)$$

Как видим, в (15) ограничения (12) существенно ослаблены и выражают теперь свойство B_n быть вписанным в сферу с центром в $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ радиуса $\frac{\sqrt{n}}{2}$ [21].

Для перехода к эквивалентной переформулировке исходной задачи можно использовать следующий способ [30]: λ в (15) выбирается так, чтобы гарантировать вогнутость $\Phi^1(x, \lambda)$, и добавляется условие принадлежности единичному гиперкубу:

$$x \in PB_n = \operatorname{conv} B_n, \quad (16)$$

$$PB_n = \{x \in R^n : \bar{0} \le x \le \bar{1}\}. \quad (17)$$

Задача (15), (16) эквивалентна исходной (1), (2), (11), так как множество B_n — вершинно расположено, а минимум вогнутой функции на выпуклом многограннике достигается в его вершине.

Представление (12) также используется в различных схемах штрафных функций для решения булевых задач. Так, например, в [32] оно служит основой для построения квадратичной штрафной функции:

$$\Phi^2(x, \lambda) = \tilde{f}(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} (x_i^2 - x_i)^2 \to \min, \quad (18)$$

где $\tilde{f}(x)$ — сглаживание функции (1). Это позволяет свести исходную задачу к серии выпуклых задач вида (18) с параметром λ:

$$\lambda \in \{\lambda^j\}_j, \ \lambda^j \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty. \quad (19)$$

Заметим, что (15) может быть названа сферической релаксационной задачей, в то время как (1), (16) является полиэдральной релаксационной задачей [8, 29, 30] к исходной.

Итак, в булевой оптимизации наряду с функциональным представлением (12) находит применение представление B_n как пересечение гиперкуба (16) и гиперсферы:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{n}{4}. \quad (20)$$

В разд. 2.3 это наблюдение обобщается на произвольное множество, вписанное в сферу.

Известно множество других непрерывных постановок булевых задач. Так, например, в [30] представлено условие булевости $x_i + y_i = 1$, $x_i \cdot y_i = 0$, x_i, $y_i \ge 0$, $i \in J_n$, позволяющее переформулировать исходную задачу в виде непрерывной в пространстве R^{2n}.

Часто непрерывные формулировки привязываются к конкретному классу задач. Так, например, известна эквивалентная формулировка безусловной булевой квадратичной задачи (Unconstrained Binary Quadratic Problem) [21, 29–33]

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} A x + c^{\mathrm{T}} x \xrightarrow[x \in E]{} \min, \quad E = B_n, B'_n \tag{21}$$

в виде линейной задачи на многограннике conv ($y \in R^{n^2}$: $y = x^{\mathrm{T}} x$, $x \in B'_n$) с последующей ее релаксацией на множестве полуопределенных матриц порядка n [31].

В [33] задача (21) на $E = B'_n$ сведена к нелинейной в пространстве $R^{C^2_{n+1}}$ введением дополнительных переменных $y_{ij} = x_i x_j : y_{ij}^2 = 1$, $i < j$, $i, j \in J_n$.

Как видно, последние способы приводят к непрерывной формулировке булевых задач в пространстве большей размерности. Преимущество построения функциональных представлений (3), (4) состоит в возможности непрерывных постановок дискретных задач при неизменной размерности задачи.

2.3. Полиэдрально-сферические функциональные представления. Пусть E — множество вида (10), вписанное в сферу $S_r(a)$ радиуса r с центром $a \in R^n$:

$$E \subset S_r(a) . \tag{22}$$

Тогда оно образуется в пересечении $S_r(a)$ с многогранником $P = \operatorname{conv} E$:

$$E = P \cap S_r(a) . \tag{23}$$

Представление (23) называется полиэдрально-сферическим представлением E. Для его построения необходимо установить вписанность данного множества в сферу и решить традиционную в полиэдральной комбинаторике задачу аналитического описания многогранника P [8], в частности поиска его неприводимой системы ограничений.

Полиэдрально-сферическое представление E позволяет эквивалентно переформулировать (1), (2), (10) в виде непрерывной задачи $f(x) \to \min\limits_{x \in P \cap S_r(a)} E$, полиэдральная и сферическая релаксации которой имеют соответственно вид

$$f(x) \underset{P}{\to} \min , \quad f(x) \underset{S_r(a)}{\to} \min . \tag{24}$$

Как правило, в оптимизационных алгоритмах используется полиэдральная релаксация [8, 29, 30]. Примером совместного использования обеих задач (24) служит полиэдрально-сферический метод решения комбинаторных задач [24].

Отметим, что полиэдрально-сферическое представление невырожденного в точку дискретного множества ($|E| > 1$) является нестрогим нелинейным функциональным представлением вида (3), (4), $1 \le m' < m$. Для некоторых евклидовых комбинаторных множеств, вписанных в сферу, таких как общее множество перестановок, полиперестановок, отдельные классы размещений и сочетаний, это представление легко выписывается, поскольку аналитический вид соответствующих многогранников известен [4, 5, 7, 11, 12, 34]. Однако применение данного представления уже вызывает затруднение, так как число ограничений многогранника иногда сравнимо с мощностью комбинаторного множества.

Замечание 2. Для евклидовых комбинаторных множеств вида (22): $\dim P = n$, к которым относится общее множество размещений [5, 12, 21], сгенерированное из двух различных элементов, в частности булево множество, неизбыточное полиэдрально-сферическое представление определяется однозначно и формируется добавлением к неприводимой системе неравенств многогранника P уравнения описанной сферы, т.е. является однокомпонентным. В остальных случаях оно будет смешанным и неоднозначным. Так, например, для общего множества перестановок [4, 5, 7, 34] $E_{nk}(G)$ из мультимножества $G=\{g_i\}_{i\in J_n}$, в котором k элементов различны, в строгую часть (3) будут входить уравнение описанной сферы, например $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}g_i^2$, и уравнение гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}g_i$, на которой расположено $E_{nk}(G)$.

2.4. Строгие представления некоторых евклидовых комбинаторных множеств. Полиэдрально-сферическое нестрогое представление B_n содержит всего $m=2n+1$ ограничений, а строгое представление (12) содержит $m=n$ уравнений. Тем не менее, с учетом того, что практические задачи зачастую формулируются как булевые большой размерности [29], целесообразно сократить число m с помощью других строгих представлений данного множества. Представим касательное и однокомпонентное представления B_n.

Утверждение 1. Система

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=n, \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=n \tag{26}$$

задает касательное представление множества B_n', которое образуется в пересечении поверхности (25) модульного многогранника и гиперсферы (26).

Доказательство. В силу симметрии (25), (26) достаточно рассмотреть область $D=\{x\colon x\ge 0\}$ и показать, что точка $x^0=\bar{1}=B_n'\cap D$ образуется в касании (26) и плоскости:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n, \tag{27}$$

т.е. (27) — касательная к (26) в точке x^0.

Записав уравнение касательной плоскости к выпуклой поверхности (26) в x^0

$$\nabla\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\Bigg|_{x^0}\cdot(x-x^0)=\bar{2}\cdot(x-\bar{1})=0\Leftrightarrow\bar{1}\cdot x=(\bar{1})^2\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=n,$$

получаем искомое.

Следствие 1. Система $\sum_{i=1}^{n}|x_i-0.5|=\frac{n}{2}$, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-0.5)^2=\frac{n}{4}$ задает касательное представление множества B_n.

Проведем сравнение двух строгих представлений булевого множества B_n' — ранее известного (12) и полученного представления (25), (26). Оба представления строгие, нелинейные, непрерывные, дифференцируемые, выпуклые. Их неизбыточность очевидна, поскольку извлечение любого из условий (12) нарушает дискретность; это касается также любого из ограничений (25), (26). Отсюда согласно (9) следует, что (12) — пересекающееся, а (25), (26) — касательное представления B_n', которое в отличие от (12) является ограниченным. Ограниченность представления (25), (26) и число ограничений, не зависящее от размерности задачи, — основные его преимущества в сравнении с пересекающимся представлением (12). При этом оно порождает две непрерывные релаксационные задачи по отношению к исходной (1), (2), (11): сферическую (см. (24)) и задачу на поверхности модульного многогранника $M\colon f(x)\to\min_{x\in M}$, где для B_n задается $M=\left\{x\colon\sum_{i=1}^{n}|x_i-0.5|=\frac{n}{2}\right\}$, для B_n' задается (25).

Как и любое строгое представление дискретного множества однокомпонентное представление B_n определено неоднозначно. Одно из таких представлений формируется из штрафного слагаемого функции (18):

$$F_1(x)=\sum_{j=1}^{n}(x_i^2-x_i)^2=0\,. \tag{28}$$

Действительно, $F_1(x)=0 \Leftrightarrow (x_i^2-x_i)^2=0, i\in J_n \Leftrightarrow x_i\in\{0,1\}, i\in J_n \Leftrightarrow x\in B_n$. Кроме (28) представление (12) порождает множество однокомпонентных представлений:

$$F_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i^2(x),\ \lambda_i>0\,,\ i\in J_n, \tag{29}$$

где $f_i(x)$ определено в (13).

Как видим, строгие функциональные представления аккумулируются в других строгих представлениях, в том числе однокомпонентных, которые, в свою очередь, целесообразно применять в булевой оптимизации, поскольку $\lim\limits_{\lambda_i\to\infty}\arg\min F_1(x)=x^*\in B_n$.

На примере булевого множества показаны преимущества построения строгих представлений (3), (7) евклидовых комбинаторных множеств. Особый интерес они представляют для множеств, полиэдрально-сферические представления которых неизвестны либо содержат число ограничений, значительно превосходящее размерность пространства.

Так, известно [4, 7, 11], что неприводимая система общего перестановочного многогранника содержит от $n+1$ до 2^n-1 ограничений, соответственно его полиэдрально-сферическое представление включает до 2^n ограничений. Но согласно [35] множество $E_{nk}(G)$ позволяет также строгие функциональные представления вида

$$f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^j-\sum_{i=1}^{n}g_i^j=0,\ j\in J_n; \tag{30}$$

$$f_i(x)=\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}x_i-\sum_{\omega\subseteq J_n,|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}g_i=0,\ j\in J_n, \tag{31}$$

которые могут быть использованы для различных непрерывных релаксаций исходной задачи, а также аккумулированы в однокомпонентное представление вида (29) и применены подобно (18) в численных схемах решения (1), (2), например в штрафных методах.

Обобщим представления (30), (31) с общего множества перестановок на полиперестановочное множество [5] $E_{\bar{n}\bar{k}}(\bar{G})$ из мультимножества, разбитого на кортеж из L мультимножеств $\bar{G}=\{G^l\}_{l\in J_L}$, где $G^l=\{g_i^l\}_{i\in J_{n_l}}$ содержит k_l различных элементов ($l\in J_L, \bar{n}=(n_l)_{l\in J_L}, \bar{k}=(k_l)_{l\in J_L}$) (множество кортежей перестановок [10]). Это множество представимо декартовым произведением нескольких перестановочных множеств, каждое из которых имеет строгие представления вида (30), (31), в результате имеют место следующие строгие представления $E_{\bar{n}\bar{k}}(\bar{G})$:

$$\sum_{i=1}^{n_l}x_{il}^j=\sum_{i=1}^{n_l}(g_i^l)^j,\ l\in J_L, j\in J_n;$$

$$\sum_{\omega\subseteq J_{n_l},|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}x_{ij}=\sum_{\omega\subseteq J_{n_l},|\omega|=j}\ \prod_{i\in\omega}g_i^j,\ l\in J_L,\ j\in J_n.$$

3. ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С МНОЖЕСТВ НА НАДМНОЖЕСТВА

3.1. Основные понятия. Продолжением функции $f(x)$ с множества E на $E' \supset E$ является функция $F(x)$, определенная на E' и совпадающая с $f(x)$ на E:

$$F(x) \underset{E}{=} f(x). \tag{32}$$

Продолжение (32) функции $f(x)$ называется:

а) строгим продолжением с множества E, если выполнено условие

$$F(x) = f(x) \Leftrightarrow x \in E, \tag{33}$$

в противном случае — нестрогим;

б) мажорирующим продолжением с множества E на E', если $F(x) \geq f(x)$ $\forall x \in E$.

Замечание 3. Подобно классификации представлений множеств продолжения функций в зависимости от ее типа могут быть непрерывными, дифференцируемыми, гладкими, выпуклыми на компакте $E' \supseteq E$, строго и сильновыпуклыми на E' и т.п. Если область продолжения функции не указана, предполагается, что она совпадает с R^n.

3.2. Применение продолжений функций в комбинаторной оптимизации. Пусть E — евклидово комбинаторное множество (2), (10). По определению продолжений (32) задача оптимизации продолжения,

$$F(x) \to \min, \tag{34}$$

в области (2) и исходная задача (1), (2) эквивалентны.

Продемонстрируем, какие преимущества в решении задач оптимизации дает конструирование продолжений целевых функций со специальными свойствами. Так, вогнутые продолжения позволяют свести дискретную задачу (1), (2) к непрерывной: $F(x) \underset{P}{\to} \min$, где $F(x)$ — вогнутая (см., например, (15), (16) для B_n).

Выпуклые продолжения с множества E на компакт $E' \supseteq E$ позволяют оценить $z = \min_E f(x)$ с помощью решений выпуклых релаксационных задач: $z = \min_E f(x) \geq \min_P F(x) \geq \min_{E'} F(x) \geq \min_{R^n} F(x)$, где $F(x)$ — выпуклое продолжение $f(x)$ с E на E'. Однако существуют классы выпуклых функций, для которых известны экстремумы на некоторых выпуклых поверхностях. Примером служат выпуклые квадратичные функции на эллипсоиде [36] и, в частности, на сфере. Это позволяет успешно применять полиэдрально-сферический метод [24] к решению квадратичных задач на множествах типа (10), (22) после перехода к задаче (34) оптимизации квадратичного выпуклого продолжения, поскольку обе релаксационные задачи типа (24), $F(x) \underset{P}{\to} \min$ и $F(x) \underset{S_r(a)}{\to} \min$, решаются в данном случае эффективно.

Наконец, строгие мажорирующие продолжения (см. (33)) позволяют свести исходную задачу к серии непрерывных. Продемонстрируем это на примере булевого множества. В разд. 2.2 было показано применение строгого представления (12) множества B_n в оптимизации. Нетрудно видеть, что все приведенные целевые функции (14), (15), (18), построенные на его основе, являются продолжениями исходной или сглаженной функций с множества B_n в R^n. При этом (15) — нестрогое продолжение, поскольку является одновременно продолжением со всей описанной сферы (20) в R^n, в то время как (18) — строгое продолжение с B_n.

Остановимся более детально на продолжении (18). В терминах однокомпонентного представления (28) оно имеет вид $\Phi^2(x, \lambda) = \tilde{f}(x) + \lambda F_1(x)$. С учетом

$F_1(x) \geq 0$ имеем $\Phi^2(x, \lambda) \geq \tilde{f}(x)$ при $\lambda \geq 0$, т.е. $\Phi^2(x, \lambda)$ — мажорирующее строгое продолжение $\tilde{f}(x)$, которое обеспечивает не только получение точки множества B_n в пределе итерационного процесса (18), (19), но и эквивалентность комбинаторной задачи (1), (2) и непрерывной задачи $\Phi^2(x, \lambda) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \min$.

Замечание 4. Для произвольного множества E проблему непрерывной формулировки задачи (1), (2) в исходном пространстве R^n можно поставить следующим образом: построить строгое мажорирующее продолжение $F(x)$ с E: $\arg\min_E F(x) \in E$. Теперь задача (1), (2) эквивалентна непрерывной: $F(x) \to \min$. Например, последовательность решений задачи (18), (19) дает в пределе точку множества B_n, т.е. для булевых задач искомым строгим мажорирующим продолжением будет $F(x) = \lim_{k\to\infty} \Phi^2(x, \lambda^k)$.

3.3. **Построение продолжений функций с полиэдрально-сферических комбинаторных множеств.** Полиэдрально-сферические множества занимают важное место среди евклидовых комбинаторных множеств. К ним относятся общее перестановочное множество [4, 5, 7, 34], отдельные классы сочетаний и размещений [5, 12, 21], в том числе булево множество, а также их композиционные образы [10]. Покажем, что вышеперечисленные непрерывные подходы применимы к оптимизации на таких множествах после построения их строгих представлений.

Итак, рассмотрим задачу (1), (2) на множестве E вида (10), (22), для которого известно строгое представление (3), (7). Продемонстрируем, как для произвольной целевой функции задачи (1) построить вогнутые, выпуклые и строгие мажорирующие продолжения.

1. Множество E вершинно расположено, а для таких множеств в [13] обосновано существование выпуклых и вогнутых дифференцируемых продолжений и приведена техника их построения. Более того, если

$$f(x) \in C^2(R^n), \tag{35}$$

то существуют строго вогнутые и вогнутые продолжения с множества (22) вида $F(x) = f(x) + \lambda((x-a)^2 - r^2)$, причем выпуклость обеспечивается выбором достаточно большого $\lambda > 0$, вогнутость — достаточно малого $\lambda < 0$ [28, 30]. Теперь для использования вогнутых методов к задаче (1), (2) остается решить задачу аналитического описания P.

2. Строгое мажорирующее продолжение $F'(x)$ строим с помощью непрерывно дифференцируемого строгого представления E, объединяя (3) в однокомпонентное представление $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j^{2l}(x)$ при $\lambda_j > 0$ $(l \in N, j \in J_m)$ и дополняя его функцией $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) + \varphi(x). \tag{36}$$

Функции $F(x), F'(x)$ могут комбинироваться. Например, суммируя $\varphi(x)$ с $F(x)$, получаем продолжение $F''(x) = f(x) + \lambda((x-a)^2 - r^2) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j^{2l}(x)$, для которого $\exists \Lambda: \ \forall \lambda_j < \Lambda, j \in J_m$, функция $F''(x)$ — выпуклая. При этом $\arg\min F''(x) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} x^* \in E$. Выпуклые методы в применении к $F''(x) \to \min$ определяют в худшем случае локальный минимум $f(x)$ на E.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И НАПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Решение задачи поиска строгого представления комбинаторного множества означает возможность применения непрерывных методов к оптимизации (см. замечание 4) строгого мажорирующего продолжения (36).

Однако существует класс множеств, к которым применимы все приведенные в разд. 3.3 результаты. Это вершинно расположенные множества, поскольку, как было указано, выпуклые дифференцируемые продолжения с этих множеств существуют [13]. Если к тому же выполнено (35), то, решив задачу поиска описанной вокруг E гладкой выпуклой поверхности $S = \{x: f_1(x) = 0\}$ (отличной от гиперплоскости), будет найдена строго выпуклая функция $f_1(x)$, с помощью которой могут строиться как выпуклые, так и вогнутые продолжения вида $F(x) = f(x) + \lambda f_1(x)$ выбором соответствующего λ.

Итак, актуальными являются задачи: а) обоснование существования дважды непрерывно дифференцируемого продолжения произвольной функции с вершинно расположенного множества; б) построение как строгих, так и нестрогих представлений других евклидовых комбинаторных множеств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье известные непрерывные подходы к решению безусловных комбинаторных задач в пространстве исходной размерности обобщены и сформулированы в терминах функциональных представлений допустимых множеств и продолжений целевых функций с этих множеств. Для их применения необходимо решить задачи построения строгих функциональных представлений евклидовых комбинаторных множеств и систем ограничений соответствующих комбинаторных многогранников. В статье приведен ряд таких функциональных представлений булевого множества, а также общих перестановочного и полиперестановочного множеств.

Дальнейшее исследование этих представлений множеств и систем многогранников, в частности формирование неизбыточных функциональных представлений множеств и несводимых систем ограничений многогранников, целесообразно как с теоретической, так и с практической точек зрения, поскольку позволяет увеличить эффективность комбинаторных алгоритмов, построенных на их основе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стоян Ю.Г. Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. — Харьков, 1980. — 22 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения; 85).
2. Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В. Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 70–79.
3. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 5. — С. 71–83.
4. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1986. — 268 с.
5. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. — К. : Ін-т системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
6. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М., Аристова И.В. Элементы теории геометрического проектирования. — К.: Наук. думка, 1995. — 241 с.
7. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 344 с.

8. Balinski M.L., Hoffman A.J. Polyhedral combinatorics: Dedicated to the memory of D.R. Fulkerson. — New York: Elsevier Science Ltd, 1978. — 242 p.
9. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М. : Мир, 1984. — 512 с.
10. Гребенник И.В., Литвиненко А.С. Генерация комбинаторных множеств с заданными свойствами // Кибернетика и системный анализ. — 2012. — № 6. — С. 96–105.
11. Ємець О.О., Недобачій С.І. Загальний переставний многогранник: незвідна система лінійних обмежень та рівняння всіх гіперграней // Наукові вісті НТУУ «КПІ». — 1998. — № 1. — С. 100–106.
12. Пичугина О.С. Методы и алгоритмы решения некоторых задач оптимизации на множествах сочетаний и размещений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Харьков, 1996. — 169 с.
13. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1994. — **34**, № 7 — С. 1112–1119.
14. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике // ДАН УССР. Сер. А. — 1988. — № 5. — С. 66–68.
15. Грицик В.В., Кісельова О.М., Яковлев С.В., Стецюк П.І. та ін. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів // Ін-т проблем штучного інтелекту НАН України. — Донецьк: Наука і освіта, 2012. — 480 с.
16. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 27–37.
17. Валуйская О.А., Пичугина О.С., Яковлев С.В. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения // Радиоэлектроника и информатика. — 2001. — № 2. — С. 121–129.
18. Валуйская О.А., Емец О.А., Романова Н.Г. Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна–Яковлева // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 2002. — **42**, № 4. — С. 591–596.
19. Пічугіна О.С. Опукле продовження кубічних многочленів на переставленнях та його застосування у розв'язанні практичних задач оптимізації // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — **4.** — С. 176–189.
20. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Паршин О.В. Квадратичная оптимизация на комбинаторных множествах в R^n // Кибернетика и системный анализ. — 1991. — № 4. — С. 97—104.
21. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на множестве размещений и их свойствах // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 11. — С. 74–86.
22. Яковлев С.В., Гребенник И.В. Локализация решения некоторых задач нелинейной целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 5. — С. 116–124.
23. Ємець О.О., Валуйська О.О., Пічугіна О.С. До питання про нелінійну та параметричну оптимізацію на комбінаторних множинах // Вісник Львівського університету. Сек. прикладна математика і інформатика. — 2002. — № 4. — С. 94–101.
24. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Полиэдрально-сферический подход к решению некоторых классов комбинаторных задач // Праці VI Міжнародної школи-семінару «Теорія прийняття рішень». — Ужгород, 2012. — С. 152–153.
25. Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
26. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізація з дробово-лінійними функціями. — К.: Наук. думка, 2005. — 117 с.
27. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи їх дослідження та розв'язання. — К.: Наук. думка, 2009. — 266 с.
28. Bertsekas D.P. Nonlinear programming. — Belmont: Athena Scientific, 1995. — 378 p.
29. Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., Wang Y. The unconstrained binary quadratic programming problem: A survey // Journal of Combinatorial Optimization. — 2014. — **1.** — P. 58–81.

30. Hillier F.S., Appa G., Pitsoulis L., Williams H.P., Pardalos P.M., Prokopyev O.A., Busygin S. Continuous approaches for solving discrete optimization problems // Handbook on Modelling for Discrete Optimization, 2006. — P. 1–39.

31. Helmberg C., Rendl F. Solving quadratic (0,1)-problems by semidefinite programs and cutting planes // Mathematical Programming. — 1998. — **82**, N 3. — P. 291–315.

32. Murray W., Ng K.-M. An algorithm for nonlinear optimization problems with binary variables. Computational Optimization and Applications. — 2008. — **47**, N 2. — P. 257–288.

33. Стецюк П.И. О функционально избыточных ограничениях для булевых оптимизационных задач квадратичного типа // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 6. — С. 168–172.

34. Postnikov A. Permutohedra, associahedra, and beyond // IMRN: International Mathematics Research Notices. — 2009. — **2009**, Issue 6. — P. 1026–1106.

35. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Функционально-аналитические представления общего перестановочного множества // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2016. — **4**, № 1 — С. 27–38.

36. Dahl J. Convex problems in signal processing and communications // Ph.D. Thesis, Aalbort University, 2003. — 100 p.

Надійшла до редакції 08.02.2016

О.С. Пічугіна, С.В. Яковлев

ПРО НЕПЕРЕРВНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПРОДОВЖЕННЯ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Анотація. Введено поняття функціонального представлення множини точок евклідового арифметичного простору і продовження функцій з даної множини у її надмножину. Показано зв'язок функціональних представлень множин і продовжень з них. Отримано строгі функціональні представлення булевої, загальної перестановочної та поліперестановочної множин. Продемонстровано переваги застосування строгих представлень евклідових комбінаторних множин у побудові функціональних продовжень з цих множин і розв'язанні комбінаторних задач.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, евклідова комбінаторна множина, неперервне функціональне представлення множини, продовження функцій, загальна множина перестановок, булева множина.

O.S. Pichugina, S.V. Yakovlev

CONTINUOUS REPRESENTATIONS AND FUNCTIONAL EXTENSIONS IN COMBINATORIAL OPTIMIZATION

Abstract. The concepts of functional representation of a set of points of the Euclidean arithmetic space and an extension of functions from the set onto its superset are introduced. Functional representations of sets are related to their extensions. Strict functional representations of the Boolean set, general permutation, and polypermutation sets are derived. The advantages of applying strict representations of Euclidean combinatorial sets to construct functional extensions from them and to solve combinatorial problems are presented.

Keywords: combinatorial optimization, euclidean combinatorial set, continuous functional sets' prime representation, an extension of functions, the general permutation set, the boolean set.

Пичугина Ольга Сергеевна,
кандидат физ.-мат. наук, докторант Харьковского национального университета радиоэлектроники,
e-mail: pichugina@mail.ru.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Национального аэрокосмического университета
им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», e-mail: svsyak@mail.ru.