УДК 517.958

Д.А. НОМИРОВСКИЙ, А.И. ВОСТРИКОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ПОСТАНОВКИ И СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ОБЛАСТЯХ С РАЗРЕЗАМИ

Аннотация. Изучается линейное параболическое уравнение в области с тонким слабопроницаемым включением. Для такой задачи получена новая модель с неизвестными (u, ω). В рамках этой модели основное параболическое уравнение второго порядка трансформируется в систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами из классов обобщенных функций. Изучена связь этого подхода с классической и слабой постановками задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, разрывные решения, условия переноса, обобщенные функции.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих актуальных прикладных задачах изучается тепло- и массоперенос, протекающий в средах, которые содержат инородные зоны и включения. Внутри области или на ее границе могут находиться тонкие слои краски, огнеупорные слои, окислы и другие пленки, трещины и разломы, тонкие прослойки жидкостей, газовые зазоры, различные мембраны и т.д.

Обычно при моделировании таких процессов включения, ввиду их малого характерного размера, удаляют из области протекания процесса, определяя на поверхностях удаленных включений некоторые граничные условия сопряжения, учитывающие физические свойства и интегрально описывающие процесс переноса в этой части пространства. Таким образом, получают гранично-краевую задачу в области с разрезами, обычно не являющуюся односвязной. В рамках таких постановок процесс переноса изучался во многих публикациях (см., например, [1–4] и соответствующую библиографию).

Другой подход к моделированию процессов переноса в областях с инородными включениями был предложен В.Ф. Демченко и описан в работе [5]. Вместо одного уравнения второго порядка, описывающего динамику процесса, предлагалось рассматривать систему дифференциальных уравнений первого порядка в естественных переменных («новыми» переменными являются компоненты вектора потока переносимой субстанции). При этом удаленную прослойку (разрез) возвращают в область протекания процесса, а эффект инородных включений, выраженный условиями сопряжения, удается учитывать через коэффициенты уравнений [6–10].

Такой подход концептуально содержит ряд преимуществ. Например, полученные уравнения системы имеют простую физическую интерпретацию — выражают основные физические законы, описывающие изучаемый процесс. Одно из этих уравнений (скалярное) выражает закон сохранения субстанции, второе (векторное) — феноменологический закон переноса этой субстанции по определенному механизму. Наличие нескольких уравнений системы дает значительно больше возможностей для доказательства необходимых свойств изучаемых операторов, чем традиционная постановка. Например, так называемый смешанный метод конечных элементов по своей сути соответствует этому подходу [11, 12]. Кроме того, при данном способе моделирования область протекания процесса является односвязной, что представляется существенным на этапе численного расчета модели. Характерной негативной особенностью предложенного подхода является присутствие обобщенных функций в коэффициентах уравнений.

В настоящей статье на основе подхода В.Ф. Демченко строится единая математическая модель процессов переноса для параболических систем с разнообразными условиями сопряжения, в частности идеального контакта, неидеального контакта, сосредоточенного собственного источника. Кроме того, изучается связь построенной модели с классической и слабой постановками.

КЛАССИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА В СЛОИСТО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Пусть состояние системы описывается функцией $u(t,\xi_1,\dots,\xi_m)$, которая определена в цилиндрической области $Q=(0;T)\times\Omega$, где $\Omega\subset R^m$ — ограниченная односвязная область изменения пространственных переменных $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)$ с регулярной границей $\partial\Omega$. Область Ω разбивается достаточно гладкой гиперповерхностью Ω_0 на две односвязные области: Ω_+ и Ω_- с регулярными границами, т.е. множество Ω можно представить в виде дизъюнктного объединения $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_0\cup\Omega_-$ и $\overline{\Omega}_0=\overline{\Omega}_+\cap\overline{\Omega}_-$, где $\overline{\Omega}_+$, $\overline{\Omega}_-$ и $\overline{\Omega}_0$ — замыкания множеств Ω_+, Ω_- и Ω_0 в R^m соответственно. Обозначим $Q_+=(0;T)\times\Omega_+$, $Q_-=(0;T)\times\Omega_-$, $Q_0=(0;T)\times\Omega_0$.

Пусть $C^k(\overline{Q}_+,\overline{Q}_-)$, где $k\in N\cup 0$, — множество функций, принадлежащих пространству $C^k(Q_+\cup Q_-)$ и допускающих продолжение с сохранением гладкости из множества Q_+ в $\overline{Q}_+$ и из множества Q_- в $\overline{Q}_-$. Множество функций $C^k(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$ определяется аналогичным образом.

Рассмотрим параболическое уравнение, описывающее процесс переноса, протекающий в двух разнородных областях: Ω_+ и Ω_-, разделенных включением Ω_0:

$$Lu\equiv\frac{\partial u}{\partial t}+d(\xi)u-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(k_{ij}(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_j}\right)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v_i(\xi)u)=f(t,\xi),\qquad(1)$$

где $(t,\xi)\in Q_+\cup Q_-$. Функция $u(t,\xi)$ удовлетворяет однородным начальным и граничным условиям

$$u\big|_{t=0}=0,\ u\big|_{\xi\in\partial\Omega}=0.\qquad(2)$$

На гиперповерхности Q_0 заданы условия сопряжения, описывающие поведение изучаемого процесса на этом включении:

$$[u]+a_1(\xi)(\omega,n)^+ +a_2(\xi)(\omega,n)^- =f_a(t,\xi),\ (t,\xi)\in Q_0,\qquad(3)$$

$$[(\omega,n)]+b_1(\xi)u^+ +b_2(\xi)u^- =f_b(t,\xi),\ (t,\xi)\in Q_0,\qquad(4)$$

где $\omega=-K\,\mathrm{grad}\,u+vu$ в $Q_+\cup Q_-$, $K=\{k_{ij}\}_{i,j=1}^{m}$ — невырожденная матрица коэффициентов k_{ij}, $v=(v_1,\dots,v_m)$, (ω,n) — скалярное произведение векторов ω и n в R^m, $n=(n_{\xi_1},\dots,n_{\xi_m})$ — вектор нормали к поверхности Ω_0, внешний относительно Ω_-; $\mathrm{grad}\,u=(u_{\xi_1},\dots,u_{\xi_m})$; $[u]$ — скачок функции $u(t,\xi)$ на гиперповерхности Q_0, т.е.

$$[u](t,\xi_0)=u^+(t,\xi_0)-u^-(t,\xi_0),\ \xi_0\in\Omega_0,$$

$$u^+(t,\xi_0)=\lim_{\xi_+\to\xi_0}u(t,\xi_+),\ u^-(t,\xi_0)=\lim_{\xi_-\to\xi_0}u(t,\xi_-),\ \xi_+\in\Omega_+,\ \xi_-\in\Omega_-.$$

Функции $[(\omega,n)]$, $(\omega,n)^+$ и $(\omega,n)^-$ определяются аналогичным образом, $a_i(\xi)$ и $b_i(\xi)$ — непрерывные на $\overline{\Omega}_0$ функции, характеризующие физические параметры инородного включения, $d(\xi)\in C^0(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$, $k_{ij}(\xi)\in C^1(\overline{\Omega}_+,\overline{\Omega}_-)$,

$v_i(\xi) \in C^1(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$ — коэффициенты уравнения переноса, $f \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, $f_a \in C^0(\overline{Q}_0)$, $f_b \in C^0(\overline{Q}_0)$ — функции, описывающие внешние воздействия на систему.

Отметим, что в виде (3), (4) можно представить условия сопряжения, описывающие различные механизмы переноса через инородное включение, например [5], важные с прикладной точки зрения условия типа

— идеального контакта

$$[u]=0\,,\ [(\omega, n)]=0,$$

— неидеального контакта

$$[u]+a(\omega, n)^{\pm}=0\,,\ [(\omega, n)]=0,$$

— неидеального контакта через трехслойное включение

$$[u]+R_+(\omega, n)^+ + R_-(\omega, n)^- = 0\,,\ [(\omega, n)]=f_0,$$

— сосредоточенного собственного источника

$$[u]=0\,,\ [(\omega, n)]=\alpha u^{\pm}\,,$$

— сосредоточенного внешнего источника

$$[u]=0\,,\ [(\omega, n)]=f_0\,.$$

ОСНОВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОСТАНОВОК ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА В СЛОИСТО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Пусть W_0 — пополнение множества функций $u \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, удовлетворяющих условиям (2), по норме

$$\| u\|_{W_0}^2 = \int\limits_{Q_+ \cup Q_-} \left(u_t^2 + \sum_{i=1}^m u_{\xi_i}^2 \right) dQ\,. \tag{5}$$

Введем также гильбертово пространство H как пополнение множества функций $u \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, удовлетворяющих условию $u\big|_{\xi \in \partial\Omega}=0$, по норме

$$\| u\|_H^2 = \int\limits_{Q_+ \cup Q_-} \left(u^2 + \sum_{i=1}^m u_{\xi_i}^2 \right) dQ\,.$$

Обозначим W_0^* и H^* соответствующие негативные к W_0 и H пространства относительно пространства $L_2(Q)$.

Несложно установить, что имеют место следующие плотные вложения:

$$W_0 \subset H \subset L_2(Q) \subset H^* \subset W_0^*\,.$$

В силу теоремы о следах функции класса $u \in H$ оставляют следы $(u^+,\ u^-) \in L_2(Q_0) \times L_2(Q_0)$ на поверхности Q_0, причем оператор взятия следа является непрерывным, т.е. для всех $u \in H$ выполняются неравенства

$$\int\limits_{Q_0} (u^+)^2\, dQ_0 \le c\| u\|_H^2, \quad \int\limits_{Q_0} (u^-)^2\, dQ_0 \le c\| u\|_H^2,$$

где c — здесь и далее некоторая положительная константа, не зависящая от функций $u \in H$.

На множестве $u \in H$ определим линейные функционалы $\delta^+(Q_0)$ и $\delta^-(Q_0)$, действующие по следующим правилам:

$$\delta^+(Q_0)(u) = \int\limits_{Q_0} u^+(t,\xi)\,dQ_0\ , \quad \delta^-(Q_0)(u) = \int\limits_{Q_0} u^-(t,\xi)\,dQ_0\ .$$

Очевидно, что эти функционалы являются непрерывными в пространстве H, т.е. $\delta^+(Q_0) \in H^*$ и $\delta^-(Q_0) \in H^*$.

Если $g \in L_2(Q_0)$, то произведение $g\delta^+(Q_0)$ будем понимать как линейный и непрерывный функционал над H, действующий по правилу

$$g\delta^+(Q_0)(u) = \int\limits_{Q_0} g(t,\xi)u^+(t,\xi)\,dQ_0, \quad u \in H\ .$$

Произведение $g\delta^-(Q_0)$ определяется аналогично.

Кроме того, для непрерывных на $\overline{Q}_0$ функций g_i и h_i определим произведение некоторых обобщенных функций как оператор

$$l = (g_1\delta^+(Q_0) + g_2\delta^-(Q_0)) \times (h_1\delta^+(Q_0) + h_2\delta^-(Q_0)):\ H \to H^*.$$

Если $u \in H$, то значением функционала $lu \in H^*$ на элементе $q \in H$ является число

$$\int\limits_{Q_0} (g_1u^+ + g_2u^-)(h_1q^+ + h_2q^-)\,dQ_0\ .$$

Очевидно, что $|(lu)(q)| \le c\|u\| \cdot \|q\|$.

В векторном случае обозначения трактуются подобным образом. Так, введем в рассмотрение пространство $L_2^m(Q, Q_0^\pm)$ как пополнение множества вектор-функций $\omega \in (C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ по норме

$$\|\omega\|^2 = \sum_{i=1}^m \int\limits_{Q_+ \cup Q_-} \omega_i^2\,dQ + \int\limits_{Q_0} ((\omega,n)^+)^2\,dQ_0 + \int\limits_{Q_0} ((\omega,n)^-)^2\,dQ_0\ .$$

Если $\omega \in L_2^m(Q, Q_0^\pm)$, то существуют следы $(\omega,n)^+$, $(\omega,n)^-$, являющиеся элементами пространства $L_2(Q_0)$. Тогда, например, можно определить произведение

$$l_n = n(g_1\delta^+(Q_0) + g_2\delta^-(Q_0)) \times n(h_1\delta^+(Q_0) + h_2\delta^-(Q_0)):$$

$$L_2^m(Q, Q_0^\pm) \to (L_2^m(Q, Q_0^\pm))^*\ .$$

Если $\omega \in L_2^m(Q, Q_0^\pm)$, то значением функционала $l_n\omega \in (L_2^m(Q, Q_0^\pm))^*$ на элементе $\eta \in L_2^m(Q, Q_0^\pm)$ является число

$$\int\limits_{Q_0} (g_1(\omega,n)^+ + g_2(\omega,n)^-)(h_1(\eta,n)^+ + h_2(\eta,n)^-)\,dQ_0\ .$$

МОДЕЛЬ ТИПА ДЕМЧЕНКО ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА В СЛОИСТО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим пару функций (u,ω), где u принадлежит пространству $C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, а вектор-функция ω — пространству $(C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$. Перепишем уравнение переноса (1) в виде системы двух уравнений относительно пары

(u, ω) в соответствии с формой записи физических законов (закона сохранения данной субстанции и закона переноса этой субстанции), описывающих изучаемый процесс:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + du + \mathrm{div}\omega = f, \tag{6}$$

$$\omega = -\mathrm{K}\,\mathrm{grad}\, u + \upsilon u, \tag{7}$$

где $(t, \xi) \in Q_+ \cup Q_-$.

Учитывая, что матрица K является невырожденной, запишем уравнение (7) в виде

$$\mathrm{grad}\, u - \mathrm{K}^{-1}\upsilon u = -\mathrm{K}^{-1}\omega. \tag{8}$$

Рассмотрим задачу поиска пары функций (u, ω), удовлетворяющих системе уравнений (6), (8), (2)–(4). Обозначим (u_*, ω_*), где $u_* \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ и $\omega_* \in (C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$, произвольную пару функций, являющуюся классическим решением этой задачи.

В пространстве $C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ определим обобщенные односторонние производные. Под обобщенной положительной (отрицательной) производной функции $f \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$ будем понимать функционал, определенный на функциях $q \in H$ и действующий по правилу

$$\frac{\partial_+ f}{\partial \xi_i} = \bar{f}_{\xi_i} + [f]\, n_{\xi_i} \delta^+(Q_0), \ \left(\frac{\partial_- f}{\partial \xi_i} = \bar{f}_{\xi_i} + [f]\, n_{\xi_i} \delta^-(Q_0) \right), \tag{9}$$

где $\bar{f}_{\xi_i}$ — классическая производная функции f в $Q_+ \cup Q_-$.

Следует отметить, что если функция f является непрерывно дифференцируемой в области $\overline{Q}$, то обобщенные положительная и отрицательная производные равны и совпадают со стандартной производной теории обобщенных функций.

Далее естественным образом определим обобщенную положительную div_+ и отрицательную div_- дивергенции вектора $\omega \in (C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ относительно пространственных переменных. Имеем

$$\mathrm{div}_+ \omega = \mathrm{div}\, \omega + [(\omega, n)]\delta^+(Q_0), \quad \mathrm{div}_- \omega = \mathrm{div}\, \omega + [(\omega, n)]\delta^-(Q_0).$$

Отметим, что имеет место равенство $[(\omega, n)] = ([\omega], n)$.

Умножая первое из полученных равенств на непрерывную в $\overline{Q}_0$ функцию $p_1(t, \xi)$, второе — на $p_2(t, \xi)$, где функции p_1 и p_2 обладают свойством $p_1 + p_2 = 1$, и суммируя эти равенства, получаем

$$p_1 \mathrm{div}_+ \omega_* + p_2 \mathrm{div}_- \omega_* = \mathrm{div}\, \omega_* + [(\omega_*, n)](p_1 \delta^+(Q_0) + p_2 \delta^-(Q_0)).$$

Используя условие (4), перепишем последнее равенство в виде

$$\mathrm{div}\, \omega_* = p_1 \mathrm{div}_+ \omega_* + p_2 \mathrm{div}_- \omega_* +$$
$$+ (b_1 u_*^+ + b_2 u_*^-)(p_1 \delta^+(Q_0) + p_2 \delta^-(Q_0)) - f_b (p_1 \delta^+(Q_0) + p_2 \delta^-(Q_0)).$$

Подставляя полученное выражение в (6), получаем

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} + du_* + p_1 \mathrm{div}_+ \omega_* + p_2 \mathrm{div}_- \omega_* +$$
$$+ (b_1 u_*^+ + b_2 u_*^-)(p_1 \delta^+(Q_0) + p_2 \delta^-(Q_0)) = f + f_b (p_1 \delta^+(Q_0) + p_2 \delta^-(Q_0)).$$

Запишем последнее уравнение в операторной форме.

Пусть оператор $N\colon W_0 \to H^*$ определяется символическим равенством

$$N = \frac{\partial}{\partial t} + d + (b_1\delta^+(Q_0) + b_2\delta^-(Q_0)) \times (p_1\delta^+(Q_0) + p_2\delta^-(Q_0)).$$

Тогда для всех $u \in W_0$ и $q \in H$ имеем

$$\langle Nu, q\rangle_{H^*\times H} = \int\limits_{Q_+\cup Q_-} (u_t q + duq)\, dQ + \int\limits_{Q_0} (b_1 u^+ + b_2 u^-)(p_1 q^+ + p_2 q^-) dQ_0.$$

Определим оператор Div равенством

$$\mathrm{Div} = p_1 \mathrm{div}_+ + p_2 \mathrm{div}_-.$$

Если $\omega \in (C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-))^m$ и $q \in H$, то интегрируя по частям, получаем

$$\langle \mathrm{Div}\, \omega, q\rangle_{H^*\times H} = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q_+\cup Q_-} (\omega_i)_{\xi_i} q dQ + \int\limits_{Q_0} [(\omega, n)](p_1 q^+ + p_2 q^-)\, dQ_0 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{Q_+\cup Q_-} \omega_i q_{\xi_i} dQ + \int\limits_{Q_0} ([(\omega, n)](p_1 q^+ + p_2 q^-) - (\omega, n)^+ q^+ + (\omega, n)^- q^-) dQ_0.$$

Отметим, что правую часть последнего равенства можно использовать как определение оператора Div на всем пространстве $L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$. Поэтому будем считать, что $\mathrm{Div}\colon L_2^m(Q, Q_0^{\pm}) \to H^*$. Таким образом, получаем аналог уравнения (6) в терминах обобщенных функций

$$Nu_* + \mathrm{Div}\, \omega_* = f + f_b(p_1\delta^+(Q_0) + p_2\delta^-(Q_0)). \tag{10}$$

Следуя работе [5], целесообразно считать, что уравнение (10) выражает обобщенный закон сохранения данной субстанции в области Ω, включая инородную прослойку Ω_0.

Сформулируем обобщенный аналог уравнения (8).

Аналогично на основании формулы (9) определим обобщенный положительный $\mathrm{grad}_+\colon H \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ и отрицательный $\mathrm{grad}_-\colon H \to (L_2^m(Q, Q_0^{\pm}))^*$ градиенты функции $f \in H$ как функционалы, определенные на функциях $\eta \in L_2^m(Q, Q_0^{\pm})$ и действующие по правилам

$$\mathrm{grad}_+ f = \mathrm{grad}\, f + [f] n\delta^+(Q_0), \quad \mathrm{grad}_- f = \mathrm{grad}\, f + [f] n\delta^-(Q_0).$$

Используя эти операторы и условие (3), записываем следующие равенства:

$$\mathrm{grad}_+ u_* - \mathrm{K}^{-1} \upsilon u_* = \mathrm{grad}\, u_* - \mathrm{K}^{-1}\upsilon u_* + [u_*] n\delta^+(Q_0) =$$

$$= -\mathrm{K}^{-1}\omega_* - (a_1(\omega_*, n)^+ + a_2(\omega_*, n)^-) n\delta^+(Q_0) + f_a n\delta^+(Q_0).$$

Аналогично

$$\mathrm{grad}_- u_* - \mathrm{K}^{-1}\upsilon u_* = -\mathrm{K}^{-1}\omega_* - (a_1(\omega_*, n)^+ + a_2(\omega_*, n)^-) n\delta^-(Q_0) + f_a n\delta^-(Q_0).$$

Умножая первое из полученных равенств на непрерывную в $\overline{Q}_0$ функцию $s_1(t, \xi)$, второе — на $s_2(t, \xi)$, где функции s_1 и s_2 обладают свойством $s_1 + s_2 = 1$, и суммируя эти равенства, получаем

$$s_1 \operatorname{grad}_+ u_* + s_2 \operatorname{grad}_- u_* - \mathrm{K}^{-1} \upsilon u_* = -\mathrm{K}^{-1} \omega_* -$$

$$-(a_1 (\omega_*, n)^+ + a_2 (\omega_*, n)^-) n (s_1 \delta^+ (Q_0) + s_2 \delta^- (Q_0)) + f_a n (s_1 \delta^+ (Q_0) + s_2 \delta^- (Q_0)).$$

Запишем последнее равенство в операторной форме. Пусть операторы Grad и M определены равенствами

$$\mathrm{Grad} = s_1 \operatorname{grad}_+ + s_2 \operatorname{grad}_- - \mathrm{K}^{-1} \upsilon,$$

$$M = \mathrm{K}^{-1} + n (a_1 \delta^+ (Q_0) + a_2 \delta^+ (Q_0)) \times n (s_1 \delta^+ (Q_0) + s_2 \delta^- (Q_0)).$$

Отметим, что Grad: $W_0 \to (L_2^m (Q, Q_0^\pm))^*$ и для всех $u \in W_0$ и $\eta \in L_2^m (Q, Q_0^\pm)$ выполняется равенство

$$\langle \mathrm{Grad}\, u, \eta \rangle = \sum_{i=1}^m \int_{Q_+ \cup Q_-} (u_{\xi_i} \eta_i - \bar{k}_i u \eta_i) dQ + \int_{Q_0} [u] (s_1 (\eta, n)^+ + s_2 (\eta, n)^-) dQ_0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — билинейная форма над $(L_2^m (Q, Q_0^\pm))^* \times L_2^m (Q, Q_0^\pm)$, а $\bar{k}_i$ — координаты вектора $\mathrm{K}^{-1} \upsilon$.

Оператор M действует в следующих пространствах: M: $L_2^m (Q, Q_0^\pm) \to$ $\to (L_2^m (Q, Q_0^\pm))^*$ и для всех $\omega \in L_2^m (Q, Q_0^\pm)$ и $\eta \in L_2^m (Q, Q_0^\pm)$ выполняется равенство

$$\langle M \omega, \eta \rangle =$$

$$= \sum_{i, j=1}^m \int_{Q_+ \cup Q_-} k_{ij}^{-1} \omega_j \eta_i dQ + \int_{Q_0} (a_1 (\omega, n)^+ + a_2 (\omega, n)^-) (s_1 (\eta, n)^+ + s_2 (\eta, n)^-) dQ_0,$$

где k_{ij}^{-1} — элементы матрицы K^{-1}.

Далее запишем аналог уравнения (8) в терминах обобщенных функций

$$\mathrm{Grad}\, u_* + M \omega_* = f_a n (s_1 \delta^+ (Q_0) + s_2 \delta^- (Q_0)). \tag{11}$$

Если физическая сущность коэффициентов k_{ij} матрицы K выражает удельную проводимость среды, то целесообразно считать [5], что оператор M выражает обобщенное удельное сопротивление среды, а уравнение (11) задает обобщенный закон переноса данной субстанции в области Ω, включая инородную прослойку Ω_0.

Введем в рассмотрение пространства $X = W_0 \times L_2^m (Q, Q_0^\pm)$, $Y = H \times L_2^m (Q, Q_0^\pm)$.

Пусть оператор A: $X \to Y^*$ определен символической матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} N & \mathrm{Div} \\ \mathrm{Grad} & M \end{pmatrix}$$

на элементах $x = (u, \omega) \in X$. Кроме того, положим $F = (F_1, F_2) \in Y^*$, где

$$F_1 = f + f_b (p_1 \delta^+ (Q_0) + p_2 \delta^- (Q_0)) \in H^*, \tag{12}$$

$$F_2 = f_a n (s_1 \delta^+ (Q_0) + s_2 \delta^- (Q_0)) \in (L_2^m (Q, Q_0^\pm))^*. \tag{13}$$

Таким образом, установлено, что если пара функций $x = (u_*, \omega_*)$ является классическим решением задачи (6), (8), (2)–(4), то выполняется равенство $Ax = F$.

Элемент $x \in X$, удовлетворяющий равенству $Ax = F$ в пространстве Y^*, будем называть обобщенным решением задачи (1)–(4). Если $x = (u, \omega) \in X$ — такое решение, то для всех $y = (q, \eta) \in Y$ выполняется равенство

$$\langle Nu + \operatorname{Div} \omega, q \rangle_{H^* \times H} + \langle \operatorname{Grad} u + M\omega, \eta \rangle = \langle f, q \rangle_{H^* \times H} +$$
$$+ \int_{Q_0} f_b (p_1 q^+ + p_2 q^-) dQ_0 + \int_{Q_0} f_a (s_1 (\eta, n)^+ + s_2 (\eta, n)^-) dQ_0 .$$

МОДЕЛЬ ТИПА ДЕМЧЕНКО И КЛАССИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА

Теорема 1. Пусть пара функций $x = (u, \omega) \in X$ удовлетворяет уравнению $Ax = F$, где правая часть $F \in Y^*$ определяется равенствами (12), (13) для функций $\bar{f} \in H^*$, $\bar{f}_a \in L_2(Q_0)$, $\bar{f}_b \in L_2(Q_0)$. Функции $u(t, \xi)$, $\omega(t, \xi)$ и коэффициенты уравнений имеют гладкость, необходимую для классического понимания задачи (6), (8), (2)–(4), т.е.

1) $u,\ u_t,\ u_{\xi_i},\ \omega_i,\ (\omega_i)_{\xi_i} \in C^0(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$;

2) $k_{ij},\ v_i \in C^1(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$, $d \in C^0(\overline{\Omega}_+, \overline{\Omega}_-)$, $a_i,\ b_i \in C^0(\overline{\Omega}_0)$.

Тогда существуют такие $f \in C(Q_+ \cup Q_-)$, $f_a \in C(Q_0)$ и $f_b \in C(Q_0)$, что функция $u(t, \xi)$ удовлетворяет задаче (6), (8), (2)–(4) в поточечном смысле и $f = \bar{f}$ в H^*, а $f_a = \bar{f}_a$, $f_b = \bar{f}_b$ в $L_2(Q_0)$.

Доказательство. По условию теоремы 1 равенство $\langle Ax, y \rangle_{Y^* \times Y} = \langle F, y \rangle_{Y^* \times Y}$ выполняется для всех $y = (q, \eta) \in Y$. Рассмотрим такие пары $y = (q, \eta) \in Y$, что $\eta = 0$. Тогда равенство $\langle Ax, y \rangle_{Y^* \times Y} = \langle F, y \rangle_{Y^* \times Y}$ можно переписать в виде

$$\langle Nu, q \rangle_{H^* \times H} + \langle \operatorname{Div} \omega, q \rangle_{H^* \times H} =$$
$$= \langle \bar{f}, q \rangle_{H^* \times H} + \langle \bar{f}_b (p_1 \delta^+ (Q_0) + p_2 \delta^- (Q_0)), q \rangle_{H^* \times H} .$$

Пусть функция $q \in C^1(\overline{Q})$ удовлетворяет условиям $q \big|_{\xi \in \partial \Omega} = 0$ и $q \big|_{\xi \in \partial \Omega_0} = 0$. Тогда получаем

$$\int_{Q_+ \cup Q_-} \left(u_t + du + \sum_{i=1}^{m} (\omega_i)_{\xi_i} \right) q dQ = \langle \bar{f}, q \rangle_{H^* \times H} .$$

С учетом плотности множества рассматриваемых функций q в пространстве H получаем, что в H^* справедливо равенство

$$u_t + du + \operatorname{div} \omega = \bar{f} . \tag{14}$$

Поскольку функция в левой части равенства (14) является непрерывной на множестве $Q_+ \cup Q_-$, ее можно взять в качестве функции f, т.е. равенство (6) установлено.

Рассмотрим теперь такие пары $y = (q, \eta) \in Y$, что $q = 0$ и $\eta \in (C^0(\overline{Q}))^m$, $\eta(t, \xi) = 0$ на Q_0. Тогда равенство $\langle Ax, y \rangle_{Y^* \times Y} = \langle F, y \rangle_{Y^* \times Y}$ можно переписать в виде

$$\langle \operatorname{Grad} u + M\omega, \eta \rangle = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{Q_+ \cup Q_-} \left(u_{\xi_i} - \bar{k}_i u + \sum_{j=1}^{m} k_{ij}^{-1} \omega_j \right) \eta_i dQ = 0.$$

С учетом плотности множества рассматриваемых функций η в пространстве $L_2(Q_+ \cup Q_-)$ почти всюду выполняется равенство

$$\operatorname{grad} u - \mathrm{K}^{-1} v u + \mathrm{K}^{-1} \omega = 0. \tag{15}$$

Поскольку функция в левой части является непрерывной, то равенство (8) верно и в поточечном смысле.

Условия (2) выполняются, поскольку норма пространства W_0 удерживает предельные значения $u\big|_{t=0}=0$ и $u\big|_{\xi\in\partial\Omega}=0$.

Рассмотрим произвольную функцию $q\in C^1(\overline{Q})$, удовлетворяющую условию $q\big|_{\xi\in\partial\Omega}=0.$ Пусть $q_+=q\chi_{\overline{Q}_+}$ и $q_-=q\chi_{\overline{Q}_-}$, где χ_A — характеристическая функция множества A. Отметим, что на поверхности $\overline{Q}_0$ выполняются равенства $q=q_+^+=q_-^-$.

Подставим в $\langle Ax, y\rangle_{Y^*\times Y}=\langle F, y\rangle_{Y^*\times Y}$ такие пары $y=(q_+,\eta)\in Y$, что $\eta=0$ в $Q_+\cup Q_-$. Тогда получим

$$\langle Nu, q_+\rangle_{H^*\times H}=\int_{Q_+}(u_t+du)q_+\,dQ+\int_{Q_0}(b_1u^++b_2u^-)p_1q\,dQ_0,$$

$$\langle \operatorname{Div}\omega, q_+\rangle_{H^*\times H}=\sum_{i=1}^{m}\int_{Q_+}(\omega_i)_{\xi_i}q_+\,dQ+\int_{Q_0}[(\omega,n)]p_1q\,dQ_0,$$

$$\langle F_1, q_+\rangle_{H^*\times H}=\langle \bar f, q_+\rangle_{H^*\times H}+\int_{Q_0}\bar f_b\,p_1q\,dQ_0\,.$$

Отсюда с учетом равенства $Nu+\operatorname{Div}\omega=F_1$ и (14) имеем

$$\int_{Q_0}([(\omega,n)]+b_1u^++b_2u^-)p_1q\,dQ_0=\int_{Q_0}\bar f_b\,p_1q\,dQ_0.$$

Рассматривая пары $y=(q_-,\eta)\in Y$, где $\eta=0$ в $Q_+\cup Q_-$, и рассуждая аналогично, несложно установить, что

$$\int_{Q_0}([(\omega,n)]+b_1u^++b_2u^-)p_2q\,dQ_0=\int_{Q_0}\bar f_b\,p_2q\,dQ_0.$$

Суммируя полученные равенства, учитывая соотношение $p_1+p_2=1$, а также плотность множества рассматриваемых функций q в пространстве $L_2(Q_0)$, получаем равенство

$$[(\omega,n)]+b_1u^++b_2u^-=\bar f_b,$$

справедливое почти всюду на Q_0. Это означает, что в качестве f_b можно взять левую часть последнего равенства.

Рассмотрим произвольную функцию $\eta\in(C^0(\overline{Q}))^m$ и $\eta_+=\eta\chi_{\overline{Q}_+}$, $\eta_-=\eta\chi_{\overline{Q}_-}$. Подставим в $\langle Ax, y\rangle_{Y^*\times Y}=\langle F, y\rangle_{Y^*\times Y}$ такие пары $y=(q,\eta_+)\in Y$, что $q=0$ в $Q_+\cup Q_-$. Получаем

$$\langle \operatorname{Grad}u, \eta_+\rangle=\sum_{i=1}^{m}\int_{Q_+}(u_{\xi_i}-\bar k_iu)(\eta_+)_i\,dQ+\int_{Q_0}[u]s_1(\eta,n)\,dQ_0,$$

$$\langle M\omega, \eta_+\rangle=\sum_{i,\,j=1}^{m}\int_{Q_+}k_{ij}^{-1}\omega_j(\eta_+)_i\,dQ+\int_{Q_0}(a_1(\omega,n)^++a_2(\omega,n)^-)s_1(\eta,n)\,dQ_0,$$

$$\langle F_2, \eta_+\rangle=\int_{Q_0}\bar f_a s_1(\eta,n)\,dQ_0.$$

Отсюда с учетом равенств $\operatorname{Grad}u+M\omega=F_2$ и (15) имеем

$$\int_{Q_0}([u]+a_1(\omega,n)^++a_2(\omega,n)^-)s_1(\eta,n)\,dQ_0=\int_{Q_0}\bar f_a s_1(\eta,n)\,dQ_0.$$

Аналогично доказываем, что

$$\int_{Q_0} ([u]+a_1(\omega,n)^+ + a_2(\omega,n)^-)\, s_2(\eta,n)\, dQ_0 = \int_{Q_0} \bar{f}_a s_2(\eta,n) dQ_0 .$$

Суммируя полученные равенства, учитывая соотношение $s_1+s_2=1$, а также плотность множества рассматриваемых функций (η, n) в пространстве $L_2(Q_0)$, получаем $[u]+a_1(\omega,n)^+ + a_2(\omega,n)^- = \bar{f}_a$, справедливое почти всюду на Q_0. Это означает, что в качестве f_a можно принять левую часть последнего равенства.

Теорема доказана.

МОДЕЛЬ ТИПА ДЕМЧЕНКО И СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА

Рассмотрим функцию $u \in C^2(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, удовлетворяющую равенствам (1)–(4), и пробную функцию $q \in C^1(\overline{Q}_+, \overline{Q}_-)$, удовлетворяющую условию $q\big|_{\xi\in\partial\Omega}=0$. Всюду далее будем предполагать, что $a_1+a_2 \neq 0$ во всех точках множества $\overline{\Omega}_0$.

Используя формулу интегрирования по частям и формулу Остроградского–Гаусса, получаем следующие равенства:

$$(Lu,q)_{L_2(Q_+\cup Q_-)} = \int_{Q_+\cup Q_-} \left(u_t q + duq + \sum_{i,j=1}^{m} k_{ij} u_{\xi_j} q_{\xi_i} - \sum_{i=1}^{m} v_i u q_{\xi_i} \right) dQ -$$

$$- \int_{Q_0} ((\omega,n)^+ q^+ - (\omega,n)^- q^-) dQ_0 .$$

Рассмотрим последнее слагаемое. Раскрывая в выражении $(a_1+a_2)((\omega,n)^+ q^+ - -(\omega,n)^- q^-)$скобки и учитывая равенства $a_1(\omega,n)^+ = f_a - [u] - a_2(\omega,n)^-$ и $a_2(\omega,n)^- = f_a - [u] - a_1(\omega,n)^+$, получаем, что на поверхности Q_0 выполняется соотношение

$$(a_1+a_2)((\omega,n)^+ q^+ - (\omega,n)^- q^-) = -[u][q] + a_1[(\omega,n)]q^- + a_2[(\omega,n)]q^+ + f_a[q] .$$

Учитывая равенство $[(\omega,n)] + b_1 u^+ + b_2 u^- = f_b$, получаем

$$(a_1+a_2)((\omega,n)^+ q^+ - (\omega,n)^- q^-) =$$

$$= -[u][q] - (b_1 u^+ + b_2 u^-)(a_1 q^- + a_2 q^+) + f_a[q] + f_b(a_1 q^- + a_2 q^+) .$$

Таким образом, установлено, что если для рассматриваемых функций u и q выполняется равенство $(Lu,q)_{L_2(Q_+\cup Q_-)} = (f,q)_{L_2(Q_+\cup Q_-)}$, то

$$\int_{Q_+\cup Q_-} \left(u_t q + duq + \sum_{i,j=1}^{m} k_{ij} u_{\xi_j} q_{\xi_i} - \sum_{i=1}^{m} v_i u q_{\xi_i} \right) dQ +$$

$$+ \int_{Q_0} \frac{[u][q] + (b_1 u^+ + b_2 u^-)(a_1 q^- + a_2 q^+)}{a_1+a_2} dQ_0 =$$

$$= \int_{Q_+\cup Q_-} fq dQ + \int_{Q_0} \frac{f_a[q] + f_b(a_1 q^- + a_2 q^+)}{a_1+a_2} dQ_0 . \qquad (16)$$

Равенство (16) используют для определения слабых решений исходной задачи, т.е. будем использовать левую часть равенства (16) как определение значения $\langle \bar{L}u, q\rangle_{H^*\times H}$ для всех $u \in W_0$ и $q \in H$. Таким образом, определен оператор $\bar{L}: W_0 \to H^*$, очевидно являющийся линейным и непрерывным.

Правая часть равенства (16) определяет функционал $F \in H^*$:

$$F = f + \frac{1}{a_1 + a_2}(f_a(\delta^+(Q_0) - \delta^-(Q_0)) + f_b(a_2\delta^+(Q_0) + a_1\delta^-(Q_0))). \quad (17)$$

Таким образом установлено, что если функция u является классическим решением задачи (1)–(4), то в пространстве H^* выполняется равенство $\bar{L}u = F$.

Функцию $u \in W_0$, удовлетворяющую равенству $\bar{L}u = F$ в пространстве H^*, будем называть слабым решением задачи (1)–(4). Подобное определение решения использовано также в [3].

Относительно слабого решения выполняются следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть функция $u \in W_0$ удовлетворяет уравнению $\bar{L}u = \bar{F}$, где правая часть $\bar{F} \in H^*$ определяется равенством (17) для функций $\bar{f} \in H^*$, $\bar{f}_a \in L_2(Q_0)$, $\bar{f}_b \in L_2(Q_0)$. Функция $u(t, \xi)$ и коэффициенты уравнения имеют гладкость, необходимую для классического понимания задачи (1)–(4), т.е.

1) u, u_t, u_{ξ_i}, $u_{\xi_i \xi_j} \in C^0(\bar{Q}_+, \bar{Q}_-)$;

2) $k_{ij}, v_i \in C^1(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-)$, $d \in C^0(\bar{\Omega}_+, \bar{\Omega}_-)$, $a_i, b_i \in C^0(\bar{\Omega}_0)$, $a_1 + a_2 \neq 0$ в $\bar{\Omega}_0$.

Тогда существуют такие $f \in C(Q_+ \cup Q_-)$, $f_a \in C(Q_0)$ и $f_b \in C(Q_0)$, что функция $u(t, \xi)$ удовлетворяет задаче (1)–(4) в поточечном смысле и $f = \bar{f}$ в H^*, а $f_a = \bar{f}_a$, $f_b = \bar{f}_b$ в $L_2(Q_0)$.

Доказательство. Если рассмотреть такие функции $q \in C^1(\bar{Q})$, что $q\big|_{\xi \in \partial\Omega} = 0$ и $q\big|_{\xi \in \partial\Omega_0} = 0$, то, учитывая формулу интегрирования по частям и плотность множества рассматриваемых функций q в пространстве H, из равенства $\langle \bar{L}u, q \rangle_{H^* \times H} = \langle \bar{F}, q \rangle_{H^* \times H}$ получаем, что в H^* справедливо равенство

$$u_t + du - \sum_{i,j=1}^{m} (k_{ij} u_{\xi_j})_{\xi_i} + \sum_{i=1}^{m} (v_i u)_{\xi_i} = \bar{f}. \quad (18)$$

Условия (2) выполняются, поскольку в силу теоремы о следах норма пространства W_0 удерживает предельные значения $u\big|_{t=0} = 0$, $u\big|_{\xi \in \partial\Omega} = 0$.

Подставим в $\langle \bar{L}u, q \rangle_{H^* \times H} = \langle \bar{F}, q \rangle_{H^* \times H}$ такие функции $q \in C^1(\bar{Q}_+, \bar{Q}_-)$, что $q\big|_{\xi \in \partial\Omega} = 0$ и $q\big|_{\xi \in \partial\Omega_-} = 0$. Тогда, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int_{Q_+} \left(\sum_{i,j=1}^{m} k_{ij} u_{\xi_j} q_{\xi_i} - \sum_{i=1}^{m} v_i u q_{\xi_i} \right) dQ =$$

$$= -\int_{Q_+ \cup Q_-} \left(\sum_{i,j=1}^{m} (k_{ij} u_{\xi_j})_{\xi_i} - \sum_{i=1}^{m} (v_i u)_{\xi_i} \right) q dQ + \int_{Q_0} (\omega, n)^+ q^+ dQ_0.$$

С учетом этого равенства можно записать

$$\langle \bar{L}u, q \rangle_{H^* \times H} = \int_{Q_+ \cup Q_-} \left(u_t + du - \sum_{i,j=1}^{m} (k_{ij} u_{\xi_j})_{\xi_i} + \sum_{i=1}^{m} (v_i u)_{\xi_i} \right) q dQ +$$

$$+ \int_{Q_0} \frac{[u] q^+ + (b_1 u^+ + b_2 u^-) a_2 q^+}{a_1 + a_2} dQ_0 + \int_{Q_0} (\omega, n)^+ q^+ dQ_0.$$

Принимая во внимание равенство (18), получаем

$$\langle \bar{L}u - \bar{f}, q \rangle_{H^* \times H} = \int_{Q_0} \frac{[u] q^+ + (b_1 u^+ + b_2 u^-) a_2 q^+}{a_1 + a_2} dQ_0 + \int_{Q_0} (\omega, n)^+ q^+ dQ_0.$$

С другой стороны, имеем

$$\langle \bar{F} - \bar{f}, q \rangle_{H^* \times H} = \int_{Q_0} \frac{\bar{f}_a q^+ + \bar{f}_b a_2 q^+}{a_1 + a_2} dQ_0 .$$

Учитывая плотность множества рассматриваемых функций q^+ в пространстве $L_2(Q_0)$, получаем равенство

$$[u] + a_2(b_1 u^+ + b_2 u^-) + (a_1 + a_2)(\omega, n)^+ = \bar{f}_a + a_2 \bar{f}_b \,. \tag{19}$$

Рассуждая аналогично, можно доказать, что в пространстве $L_2(Q_0)$ выполняется равенство

$$-[u] + a_1(b_1 u^+ + b_2 u^-) - (a_1 + a_2)(\omega, n)^- = -\bar{f}_a + a_1 \bar{f}_b \,. \tag{20}$$

Суммируя равенства (19) и (20) и сокращая на $(a_1 + a_2)$, получаем следующее равенство в постранстве $L_2(Q_0)$:

$$[(\omega, n)] + b_1 u^+ + b_2 u^- = \bar{f}_b . \tag{21}$$

Также несложно установить, что следствием системы уравнений (19) и (20) является равенство

$$[u] + a_1(\omega, n)^+ + a_2(\omega, n)^- = \bar{f}_a \,. \tag{22}$$

Учитывая гладкость левых частей равенств (21), (22), их можно принять в качестве f_a и f_b соответственно.

Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между моделью типа Демченко и слабым решением.

Теорема 3. Если $p_1 = \dfrac{a_2}{a_1 + a_2}$, $p_2 = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}$ и пара $y = (q, \eta) \in Y$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \eta = \mathrm{K}\,\mathrm{grad}\, q, \ (t, \xi) \in Q_+ \cup Q_-, \\ \dfrac{[q]}{a_1 + a_2} = s_1(\eta, n)^+ + s_2(\eta, n)^-, \ (t, \xi) \in Q_0, \end{cases} \tag{23}$$

то пара $x = (u, \omega) \in X$ удовлетворяет уравнению $\langle Ax, y \rangle_{Y^* \times Y} = \langle F, y \rangle_{Y^* \times Y}$ тогда и только тогда, когда $\langle \bar{L} u, q \rangle_{H^* \times H} = \langle \bar{F}, q \rangle_{H^* \times H}$.

Доказательство. Подставим произвольное решение $y = (q, \eta) \in Y$ системы (23) в равенство $\langle Ax, y \rangle_{Y^* \times Y} = \langle F, y \rangle_{Y^* \times Y}$. Если теперь в интегралах по области $Q_+ \cup Q_-$ функцию η заменить на $\mathrm{K}\,\mathrm{grad}\, q$, а в интегралах по Q_0 выражение $s_1(\eta, n)^+ + s_2(\eta, n)^-$ заменить на $\dfrac{[q]}{a_1 + a_2}$, то несложными равносильными преобразованиями можно получить равенство $\langle \bar{L} u, q \rangle_{H^* \times H} = \langle \bar{F}, q \rangle_{H^* \times H}$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложена единая математическая модель процессов переноса для параболических систем с разнообразными условиями сопряжения, изучены свойства этой модели, а также установлены теоремы связывающие такой подход с альтернативными постановками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Системный анализ многокомпонентных распределенных систем. — К.: Наук. думка, 2009. — 640 с.
2. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. — К.: Наук. думка, 1998. — 616 с.

3. Семенов В.В. Разрешимость параболической задачи сопряжения с условием обобщенного собственного сосредоточенного источника // Дифференциальные уравнения. — 2005. — **41**, № 6. — С. 836–843.
4. Номировский Д.А. Приближенный метод решения краевой задачи для параболического уравнения с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — **46**, № 6. — С. 1045–1057.
5. Ляшко И.И., Демченко В.Ф. Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах / Препринт АН УССР. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова. — Киев, 1987. — 27 с.
6. Demchenko V.F., Krivtsun I.V., Pavlyk V.O., Dilthey U., Lisnyi O.B., Nakvasyuk V.V. Problems of heat, mass and charge transfer with discontinuous solutions // European Journal of Applied Mathematics. — 2011. — **22**, N 4. — P. 365–380.
7. Номировский Д.А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференциальные уравнения. — 2004. — **40**, № 10. — С. 1390–1399.
8. Nomirovskii D. Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // Journal of Differential Equations. — 2007. — **233**, N 1. — P. 1–21.
9. Ляшко С.И., Номировский Д.А., Петунин Ю.И., Семенов В.В. Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2009. — 192 с.
10. Klyushin D.A., Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Petunin Yu.I., Semenov V.V. Generalized solutions of operator equations and extreme elements. — New York: Springer, 2012. — 202 p.
11. Fumio Kikuchi. Numerical analysis of a mixed finite element method for plate buckling problems // Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo Report. — 1980. — N 584, September. — P. 165–190.
12. Mercier B., Osborn J., Rappaz J., Raviart P.A. Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods // Mathematics of Computation. — 1981. — **36**, N 154. — P. 427–453.

Надійшла до редакції 04.04.2016

Д.А. Номіровський, О.І. Востріков

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОСТАНОВКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ В ОБЛАСТЯХ З РОЗРІЗАМИ

Анотація. Вивчається лінійне параболічне рівняння в області з тонким слабопроникним включенням. Для цієї задачі отримано нову модель з невідомими (u, ω). В межах цієї моделі основне параболічне рівняння другого порядку трансформується в систему двох диференціальних рівнянь першого порядку з коефіцієнтами з класів узагальнених функцій. Досліджено зв'язок цього підходу з класичною та слабкою постановками задачі.

Ключові слова: параболічне рівняння, розривні розв'язки, умови перенесення, узагальнені функції.

D.A. Nomirovskii, O.I. Vostrikov

GENERALIZED FORMULATIONS AND PROPERTIES OF MODELS OF TRANSMISSION PROCESSES IN DOMAINS WITH CUTS

Abstract. We study a linear parabolic system in a domain with a thin low-permeable insertion. A new formulation of the problem is obtained with the unknowns (u, ω). Under this approach, the main second-order parabolic equation is converted to a set of first-order partial differential equations with distributional coefficients. The relations of the approach to the classical and weak formulations of the problem are analyzed.

Keywords: parabolic equation, discontinuous solution, transmission conditions, generalized functions.

Номировский Дмитрий Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: kashpir@mail.ru.

Востриков Алексей Игоревич, магистр, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, e-mail: alexvost93@yandex.ua.