УДК 519.6

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ, А.Н. ХИМИЧ

СРАВНЕНИЕ ПО ЭНЕРГИИ СХОДИМОСТИ ОДНОШАГОВОГО И ДВУХШАГОВОГО ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Аннотация. Установлен точный коэффициент сжатия энергии погрешности на каждом шаге двухшагового метода с оптимальными постоянными параметрами, который показывает на каждом шаге лучшую скорость сходимости по сравнению с одношаговым методом с оптимальным постоянным параметром. Рекомендован двухшаговый метод с параметрами, использующими золотое сечение.

Ключевые слова: итерационные методы, оценка скорости сходимости, энергетическая норма, характеристическое уравнение, константы энергетической эквивалентности.

ВВЕДЕНИЕ

В [1, с. 285, 324] получены оценки скорости сходимости одношагового и двухшагового итерационных методов с постоянными параметрами в энергетической норме для решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве. В [2, с. 519] получена оценка сходимости двухшагового метода в специальной норме с меньшим, чем в [1] параметром сжатия.

В настоящей статье, используя спектральное разложение, как и при исследовании спектральной устойчивости, получены оценки сходимости обоих методов в энергетической норме, связанной с оператором исходной задачи. Оценка для одношагового метода совпадает с оценкой, полученной другим способом в [1]. Оценка для двухшагового метода совпадает с оценкой в [2], полученной в другой норме. Полученная оценка в энергетической норме не следует из оценки в [2], и она более точная, чем в [1] с той же нормой.

ОДНОШАГОВЫЙ МЕТОД

Рассмотрим операторные уравнения в гильбертовом пространстве

$$Au = f,\ A\colon H \to H,$$
$$A \neq A(t),\ A = A^* > 0. \qquad (1)$$

Одношаговый итерационный метод решения (1) запишем в виде

$$Bv_t + Av = f, \quad v(0) = v_0, \quad B\colon H \to H,$$
$$B \neq B(t),\ B = B^* > 0, \qquad (2)$$

где

$$v_t = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} \equiv \frac{\hat{v} - v}{\tau} \equiv \frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau}.$$

Для погрешности $z = u - v$ имеем уравнение

$$Bz_t + Az = 0. \qquad (3)$$

Пусть $\{\lambda_k, \varphi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, — собственные пары в задаче $A\varphi = \lambda B\varphi$. В силу свойств операторов A и B система собственных элементов $\{\varphi_k\}$ — ортонормальная, т.е. $(B\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$.

Решение (3) представим в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\varphi_k,\ z(t+\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t+\tau)\varphi_k.$$

После подстановки в (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\hat{\beta}_k-\beta_k}{\tau}+\lambda_k\beta_k\right)B\varphi_k=0\,.$$

Отсюда в силу базисности φ_k получим

$$\hat{\beta}_k=(1-\lambda_k\tau)\beta_k\,,\ k=1,2,\ \ldots,\ N.$$

Для значения энергии $(A\hat{z},\hat{z})$ и (Az,z) получим $(A\hat{z},\hat{z})=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k^2\lambda_k=$ $=\sum_{k=1}^{\infty}(1-\lambda_k\tau)^2\beta_k^2\lambda_k$. Здесь используется ортонормальность $\{\varphi_k\}$.

Аналогично имеем $(Az,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k^2\lambda_k$.

В результате получим $(A\hat{z},\hat{z})\le\max\limits_{\lambda_k}(1-\lambda_k\tau)^2(Az,z)$ при $\forall\tau>0$.

Известно [2, с. 456], что

$$\min_{\tau}\max_{\lambda_k}|1-\lambda_k\tau|=\min_{\tau}\max\{|1-\tau\delta|,\ |1-\tau\Delta|\}=|1-\tau_0\Delta|=\frac{1-\xi}{1+\xi}\,,$$

где $\xi=\dfrac{\delta}{\Delta}$, $0<\delta<\lambda_k<\Delta$, $\tau_0=\dfrac{2}{\delta+\Delta}$.

Следовательно, справедливы неравенства

$$(A\hat{z},\hat{z})\le\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^2,\ (Az,z)\le\ \ldots\ \le\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{2n}(Az_0,z_0)\,. \tag{4}$$

ДВУХШАГОВЫЙ МЕТОД

Двухшаговый итерационный метод решения (1) запишем в виде

$$Bv_{n+1}=\alpha Bv_n+(1-\alpha)Bv_{n-1}-\tau\alpha(Av_n-f)\,, \tag{5}$$

$$v(0)=v_0,\ v(\tau)=v_0-\tau B^{-1}Av_0.$$

В терминах разностных производных выражение (5) имеет вид

$$B\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}v_{t^0}+\frac{\tau}{2}v_{\bar{t}t}\right)+Av=f,$$

где $v_{t^0}=\dfrac{\hat{v}-\check{v}}{2\tau}=\dfrac{v_{n+1}-v_{n-1}}{2\tau}$, $v_{tt}=\dfrac{v_{n+1}-2v_n+v_{n-1}}{\tau^2}$.

Для погрешности $z=u-v$ имеем однородное уравнение

$$B\left(\frac{2-\alpha}{\alpha}z_{t^0}+\frac{\tau}{2}z_{\bar{t}t}\right)+Az=0\,. \tag{6}$$

Перепишем (6) в виде

$$B\hat{z}+\alpha\,(\tau A-B)\,z+(\alpha-1)B\,\check{z}=0. \tag{7}$$

Использовав базис $\{\varphi_k\}$, представим погрешности в виде

$$\hat{z}=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k\varphi_k,\ z=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\varphi_k,\ \check{z}=\sum_{k=1}^{\infty}\check{\beta}_k\,\varphi_k. \tag{8}$$

После подстановки (8) в (7) установим связь между коэффициентами Фурье

$$\hat{\beta}_k+\alpha(\tau\lambda_k-1)\beta_k+(\alpha-1)\check{\beta}_k=0\ \ \forall k. \tag{9}$$

Решение (9) ищем в виде степени искомого числа ρ, т.е. $\hat{\beta} = \rho^{n+1}$, $\beta = \rho^{n}$, $\check{\beta} = \rho^{n-1}$.

Из (9) следует характеристическое уравнение

$$\rho_k^2 + \alpha(\tau\lambda_k - 1)\rho_k + (\alpha - 1) = 0 \quad \forall k. \tag{10}$$

Корни уравнения (10) имеют вид

$$\rho_{1,2} = \frac{(1-\tau\lambda_k)\alpha}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(1-\tau\lambda_k)\alpha}{2}\right]^2 - (\alpha-1)}.$$

Пусть $2 > \alpha > 1$. Потребуем для всех λ_k выполнения неравенства

$$\left|\frac{(1-\tau\lambda_k)\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}}\right| < 1. \tag{11}$$

Тогда корни (10) запишем в виде

$$\rho_{1,2} = \sqrt{\alpha-1}\left[\frac{(1-\tau\lambda_k)\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}} \pm \sqrt{\left[\frac{(1-\tau\lambda_k)\alpha}{2\sqrt{\alpha-1}}\right]^2 - 1}\right] = \sqrt{\alpha-1}(\cos\gamma \pm i\sin\gamma) =$$

$$= \sqrt{(\alpha-1)}e^{\pm i\gamma}.$$

Перепишем неравенство (11):

$$\frac{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha\tau} < \lambda_k < \frac{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha\tau}. \tag{12}$$

Если известны границы спектра или постоянные энергетической эквивалентности, т.е.

$$\delta(B\varphi,\varphi) < (A\varphi,\varphi) < \Delta(B\varphi,\varphi), \ 0 < \delta < \lambda_k < \Delta, \tag{13}$$

то для выбора итерационных параметров из (12) получим соотношения

$$\frac{\alpha + 2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha\tau} = \Delta, \ \frac{\alpha - 2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha\tau} = \delta. \tag{14}$$

В результате перемножения (14) получим

$$\left(\frac{2-\alpha}{\alpha\tau}\right)^2 = \delta\Delta \ \text{ или } \ \frac{2-\alpha}{\alpha} = \tau\sqrt{\delta\Delta}. \tag{15}$$

После сложения выражений из (14) найдем

$$\frac{2}{\tau_0} = \Delta + \delta \ \text{ или } \ \tau_0 = \frac{2}{\delta + \Delta}.$$

Заметим, что τ_0 является оптимальным в одношаговом методе. Из (15) следует

$$\alpha = \frac{2}{1+\tau\sqrt{\delta\Delta}}, \ \alpha - 1 = \left(\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right)^2, \ \text{где } \xi = \frac{\delta}{\Delta}.$$

Очевидно, что $1 < \alpha < 2$, как и предполагалось выше.

Принимая во внимание выражения для коэффициентов

$$\hat{\beta}_k = (\sqrt{\alpha-1})^{n+1} e^{\pm i(n+1)\gamma_k}, \ \beta_k = (\sqrt{\alpha-1})^n e^{\pm in\gamma_k}, \ \ \check{\beta}_k = (\sqrt{\alpha-1})^{n-1} e^{\pm i(n-1)\gamma_k}$$

и в силу ортонормированности $\{\varphi_k\}$, имеем

$$(A\hat{z},\hat{z}^*)=\left(A\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k\varphi_k,\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k^*\varphi_k\right)=\left(B\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k\lambda_k\varphi_k,\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k^*\varphi_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\hat{\beta}_k\hat{\beta}_k^*\lambda_k=\sum\lambda_k(\sqrt{\alpha-1})^{2n+2}|e^{\pm i\gamma_k}|^{2n+2}=(\alpha-1)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\sqrt{\alpha-1})^{2n}|e^{\pm i\gamma_k}|^{2n}=$$

$$=(\alpha-1)(Az,z^*)=\left(\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}\right)^2(Az,z^*)\,, \qquad (16)$$

где z^* — сопряженные к z. Следовательно, получаем точную оценку скорости сходимости для двухшагового метода.

Так как

$$\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}}<\frac{1-\xi}{1+\xi},$$

то из (4) и (16) следует, что двухшаговый метод по сравнению с одношаговым более быстрый на каждом шаге итерации в энергетической норме.

На основании изложенного отметим следующее.

— Практически в одношаговом методе использовать $\tau_0=\dfrac{2}{\delta+\Delta}$ не всегда возможно, так как оценку δ трудно получить. Поэтому можно воспользоваться любым значением τ из неравенства $0<\tau<\dfrac{2}{\Delta}$. Это следует из неравенства $|1-\tau\lambda_k|<1$. Такое же неравенство выполняется и в рассматриваемом методе, так как

$$|1-\tau\lambda_k|<\frac{2\sqrt{\alpha-1}}{\alpha}<1.$$

— Уравнение (6) является разностным аналогом процесса колебания с демпфированием, поэтому с физической точки зрения коэффициенты затухания и массы $\dfrac{2-\alpha}{\alpha}$, $\dfrac{\tau}{2}$ положительны.

— Уравнения колебания тока I замкнутой цепи имеет вид

$$2R\frac{dI}{dt}+L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=E,$$

где L — индуктивность, R — активность, C — емкость, E — электродвижущая сила.

Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\overset{0}{I}(t)=e^{-\frac{L}{R}t}\sin t\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

при $\dfrac{R}{L}<\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

Параметр $\dfrac{R}{L}$ характеризирует затухание колебаний. Для рассматриваемого двухшагового метода характеристика затухания

$$\frac{R}{L}=\frac{2-\alpha}{\alpha\tau}=\sqrt{\delta\Delta}.$$

— Метод сопряженных градиентов в конечномерном пространстве дает решение (1) теоретически за конечное число шагов, не превышающих размерности пространства. Однако в силу ошибок округления в компьютерах он становится итерационным. В нем для вычисления параметров τ и α используется шесть скалярных произведений [1, с. 355], которые приводят к вычислительным погрешностям. Поэтому предлагается двухшаговый метод решения (1) с переменным параметром α и двумя скалярными произведениями:

$$v_{n+1} = v_{n+1} v_n + (1-\alpha_{n+1}) v_{n-1} - \tau \alpha_{n+1} r_n, \quad v(0) = v_0, v_1 = v_0 - \tau r_0.$$

Здесь $\tau < \dfrac{2}{\Delta}$, $\Delta = \| A \|$, $r_n = Av_n - f$, $\alpha_{n-1} = \left(1 - \dfrac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})} \dfrac{1}{\alpha_b} \right)^{-1}$, $\alpha_1 = 1.$

Этот метод хорошо зарекомендовал себя при вычислениях минимального собственного значения оператора A в [3]. Метод Чебышева [1, стр. 355] с переменным параметром α требует знания оценки снизу в неравенстве энергетической эквивалентности (13).

— Оценка скорости сходимости (16) точная.

— Условия сходимости удовлетворяют параметрам из золотого сечения:

$$\frac{2-\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{2}, \alpha = \sqrt{5} - 1, \ 1 < \alpha < 2, \ \tau = \frac{\alpha}{\Delta} < \frac{2}{\Delta}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая статья имеет теоретический интерес ввиду простого доказательства оценок скорости сходимости и практический интерес, поскольку предложены простые для вычисления параметры итерационных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. Москва: Наука, 1978. 592 с.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. Москва: Наука, 1971. 552 с.
3. Приказчиков В.Г., Гаращук И.Н. Трехслойная итерационная схема для вычисления минимального собственного значения.*Численный анализ.* Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1978. С. 49–53.

Надійшла до редакції 25.07.2016

В.Г. Приказчиков, О.М. Хіміч

ПОРІВНЯННЯ ПО ЕНЕРГІЇ ЗБІЖНОСТІ ОДНОКРОКОВОГО І ДВОКРОКОВОГО ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ

Анотація. Встановлено точний коефіцієнт стиснення енергії похибки на кожному кроці двокрокового методу з оптимальними сталими параметрами, який на кожному кроці показує кращу швидкість збіжності в порівнянні з однокроковим методом з оптимальним сталим параметром. Рекомендовано двокроковий метод з параметрами, що використовують золотий переріз.

Ключові слова: ітераційні методи, оцінка швидкості збіжності, енергетична норма, характеристичне рівняння, константи енергетичної еквівлентності.

V.G. Prikazchikov, A.N. Khimich

COMPARING ONE-STEP AND TWO-STEP ITERATIVE METHODS IN CONVERGENCE ENERGY

Abstract. The paper establishes the exact error energy compression ratio on each step of the two-step method, which shows a better convergence rate compared with the one-step method with optimal parameter.

Keywords: iterative methods, convergence rate, energy norm, characteristic equation, energy equivalence constants.

Приказчиков Виктор Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: viktorprikazchikov@gmail.com.

Химич Александр Николаевич,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: khimich505@gmail.com.