

## БІГАУСІВСЬКА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИГНАЛІВ ДЖЕРЕЛ РАДІОВИПРОМІНЮВАНЬ В ІНФОРМАЦІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ

**Анотація.** Проаналізовано причини непридатності одновимірної гаусівської моделі для аналізу та синтезу вимірювань параметрів складних сигналів. Описано бігаусівську математичну модель сигналів джерел радіовипромінювань.

**Ключові слова:** одновимірна гаусівська математична модель сигналів джерел радіовипромінювань, бігаусівська математична модель, закон Райса.

### ВСТУП

Як зазначено у [1], під час пошуку радіосигналів в інформаційному середовищі телекомунікаційних систем моніторингові структури виявляють і вимірюють велику кількість сигналів джерел радіовипромінювань, а саме: установлюють факт наявності сигналу на заданому інтервалі й у заданій смузі частот та визначають параметри і характеристики виявленого сигналу. Для розв'язання таких задач на цей час використовують класичну одновимірну гаусівську математичну модель сигналів джерел радіовипромінювань, яка має низку суттєвих недоліків і тому стає неадекватною у складному інформаційному середовищі.

Наведені у [1] вирази, що описують гаусівську математичну модель детермінованих та випадкових сигналів, достатньо відомі. Однак на практиці ними нехтують, що призводить до помилкових розв'язків, якщо обробляються широкосмугові, а особливо надширокосмугові сигнали. Ця обставина не є випадковою, оскільки використання аналітичного сигналу потребує застосування перетворення Гільберта (прямого та оберненого), яке у навчальній літературі висвітлено недостатньо. В умовах, коли завадовими є широкосмугові шумоподібні сигнали засобів зв'язку, одновимірна гаусівська модель непридатна для аналізу і синтезу вимірювачів параметрів сигналів. У зв'язку з цим виникає потреба у розробленні бігаусівської (полігаусівської) моделі, для якої необхідно отримати функцію щільності розподілу білого бігаусівського шуму та вирази для спільного розподілу амплітуди та фази, фіксованих у довільний момент часу.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою роботи є опис бігаусівської математичної моделі сигналів джерел радіовипромінювань.

У логічному зв'язку розглянемо такі основні питання:

- загальні властивості бігаусівського (полігаусівського) розподілу;
- одновимірні характеристики обвідної і фази вузькосмугового бігаусівського шуму;
- загальні властивості білого бігаусівського шуму і функція його щільності ймовірності.

У відомих джерелах з математичної статистики [1–6], довідковій літературі та прикладних роботах полігаусівський розподіл вивчений мало і практично не використовується. Що стосується полігаусівського процесу як вузькосмугового сигналу завади для аналізу обвідної, фази і частоти, то у літературі з теорії сигналів і випадкових процесів посилянь на такі праці небагато.

### ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ БІГАУСІВСЬКОГО (ПОЛІГАУСІВСЬКОГО) РОЗПОДІЛУ

Для вивчення й аналізу загальних властивостей бігаусівського (полігаусівського) розподілу будемо вважати, що є  $m$ -вимірна випадкова величина, яка має

полігаусівську щільність розподілу ймовірності такого вигляду:

$$f_{PN}(z) = \sum_{k=1}^n q_k N_m(\mu_k + s, G_k), \quad (1)$$

де  $N_m$  — закон розподілу випадкової величини,  $G_k$  — невідроджена матриця параметрів,  $q_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^n q_k = 1$  — вагові коефіцієнти,  $s, \mu_k$  — вектори параметрів корисного і невідомого сигналів.

Далі обмежимося двома випадками:  $\mu_1 = -\mu_2 = \mu$ ,  $G_1 = G_2 = G$  і  $\mu_1 = -\mu_2 = 0$ ,  $G_k = \sigma_k^2 G_0$ , якщо  $k = 1, 2$ ,  $q_1 = q_2 = 0.5$ .

У першому випадку розподіл (1) є бігаусівським і має вигляд

$$f_{PN}(z) = \frac{1}{2(2\pi)^2 \frac{1}{2} |G|^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2}(z-\mu-s)^T G^{-1}(z-\mu-s)\right] + \exp\left[-\frac{1}{2}(z+\mu-s)^T G^{-1}(z+\mu-s)\right] \right\} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^2 \frac{1}{2} |G|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z-s)^T G^{-1}(z-s) - \frac{1}{2}\mu^T G^{-1}\mu\right] \text{ch}(z-s)^T G^{-1}\mu. \quad (2)$$

Математичне сподівання і кореляційна матриця випадкового вектора з таким розподілом будуть дорівнювати [2, 3]

$$E(\mu) = s, \quad D(\zeta) = G + \mu\mu^T.$$

Якщо  $\mu \rightarrow 0$ , розподіл (2) стає гаусівським, в іншому випадку він може помітно відрізнятись від нього, що добре видно з наведеної сім'ї одновимірних бігаусівських щільностей розподілу для різних умов (рис. 1).

У другому випадку розподіл (1) запишемо у вигляді

$$f_{PN}(z) = \frac{1}{2(2\pi)^2 \frac{1}{2} |G_0|^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sigma_1^m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_1^m}(z-s)^T G_0^{-1}(z-s)\right] + \frac{1}{\sigma_2^m} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_2^m}(z-s)^T G_0^{-1}(z-s)\right] \right\}. \quad (3)$$

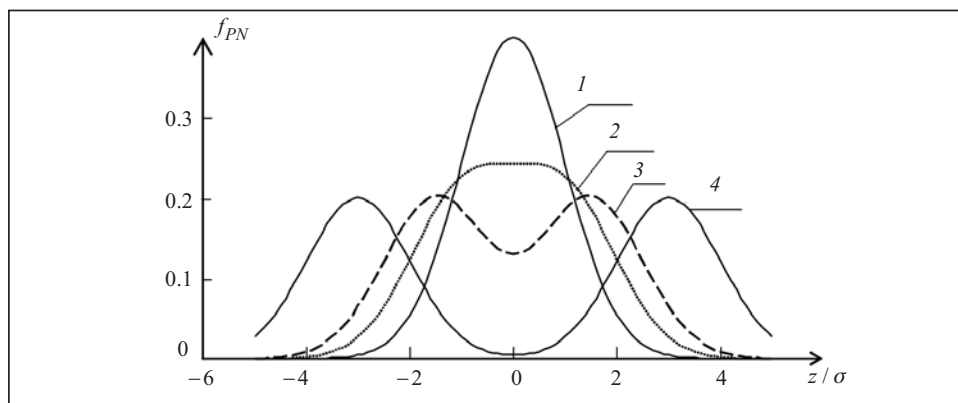


Рис. 1. Графіки полігаусівської щільності розподілу випадкової величини:  $\mu = 0$  (гаусівська щільність розподілу) (1);  $\mu = 1$  (унімодальна бігаусівська щільність розподілу) (2);  $\mu = 1.5$  (полігаусівська щільність розподілу з мало вираженими двома модами) (3);  $\mu = 3$  (полігаусівська щільність розподілу із сильно вираженими двома модами) (4)

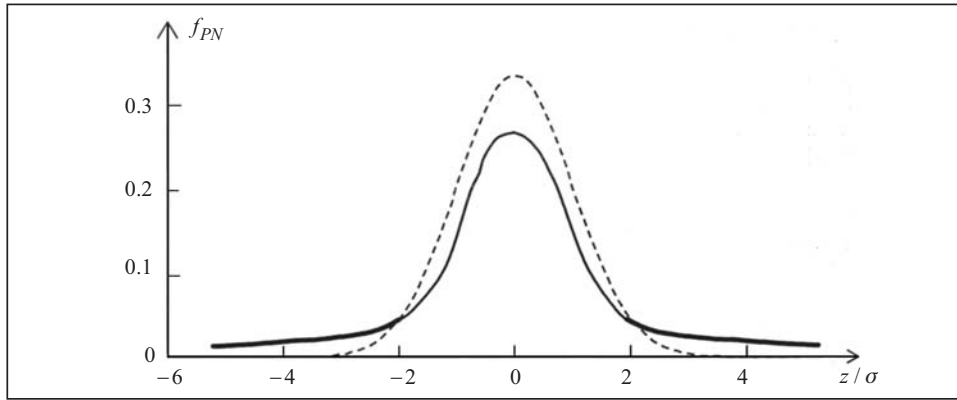


Рис. 2. Графіки бігаусівського розподілу з «товстими хвостами»

Математичне сподівання й кореляційна матриця випадкового вектора з таким розподілом будуть дорівнювати [2, 3]

$$E(\xi) = s, \quad D(\xi) = \frac{1}{2}(G_1 + G_2) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} G_0.$$

При виконанні умов  $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$  «хвости» розподілу (4) виявляються «товстими», що відрізняє його від гаусівського. Існування таких «хвостів» дає можливість установити факт наявності випромінювань аномального характеру. На рис. 2 для якісного порівняння наведено одновимірний гаусівський розподіл  $f_N(z)$  та одновимірний бігаусівський розподіл  $f_{PN}(z)$ . «Хвости» останнього розподілу позначено жирнішими кривими (класичний гаусівський розподіл — штриховими).

Отриманий вираз для розподілу (2) наведемо у вигляді

$$f_{PN}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{PN}(z/\gamma) f(\gamma) d\gamma,$$

$$\text{де } f_{PN}(z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}m} |G|^{1/2}} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2} (z - \gamma\mu - s)^T G^{-1} (z - \gamma\mu - s) \right] \right\},$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} \delta(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \delta(\gamma + 1).$$

Тобто фактично від одного інтервалу спостережень до іншого середнє значення процесу  $z(t) = s(t)$  зазнає рівномірних перегонів величиною  $\pm\mu = \text{const}$ . Усреднення гаусівського розподілу за цими випадковими стрибками і призводить до бігаусівського розподілу.

Наведемо інші аргументи на користь переходу до бігаусівської щільності розподілу спостережень. Нехай  $\epsilon$  сигнал

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

де  $X_0, \omega_0$  — постійні величини,  $\varphi$  — випадкова величина, що розподілена рівномірно на інтервалі  $[0, 2\pi]$ .

При фіксованому  $t$  випадкова величина  $x$  має щільність розподілу [4]

$$f(x) = \begin{cases} [\pi \sqrt{X_0^2 - x^2}]^{-1}, & -X_0 < x < X_0, \\ 0, & |x| > X_0, \end{cases} \quad (4)$$

і може бути зображена графічно (рис. 3).

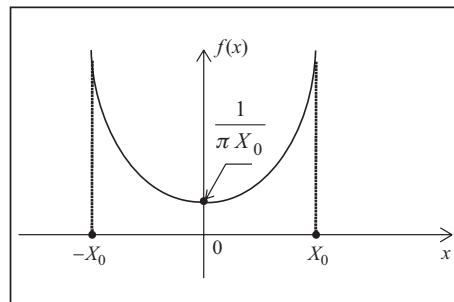


Рис. 3. Графік щільності розподілу випадкової величини при фіксованому  $t$

Аналіз формули (4) і рис. 3 показують, що коли  $|x| \rightarrow X_0$ , функція необмежено зростає, тобто має два явно виражених максимуми. Якщо фаза має інший розподіл та амплітуда сигналу, що є випадковою, розподілена в деякому інтервалі, то двогорбий характер щільності  $f(x)$  не змінюється, сплески щільності розвиваються і стають обмеженими. Саме такими властивостями характеризується шумоподібний зв'язковий сигнал із частотною або фазовою модуляцією і постійною амплітудою, яка у каналі зв'язку випадково змінюється в деяких межах.

Незважаючи на слушність цих тверджень, вони переконливо свідчать про неадекватність гаусівської моделі шумоподібного зв'язкового сигналу й більшу перевагу бігаусівської моделі.

#### ОДНОВИМІРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОБВІДНОЇ Й ФАЗИ У ВУЗЬКОСМУГОВОМУ БІГАУСІВСЬКОМУ ШУМІ

Як і для гаусівських процесів, теоретичний і практичний інтерес становлять одновимірні характеристики обвідної й фази вузькосмугового бігаусівського сигналу. Для їхнього вивчення та аналізу розглянемо стаціонарний вузькосмуговий гаусівський сигнал [1]

$$\xi(t) = E(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)] = E_c(t) \cos \omega_0 t + E_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Цей сигнал при відомій величині  $\omega_0$  повністю визначається квадратурними складовими  $E_c(t)$  і  $E_s(t)$ . Якщо ці функції розглядають у фіксований момент часу  $t$ , то разом вони утворюють вектор  $E^T = (E_c, E_s)$ , щільність розподілу ймовірності якого можна задати формулою [1]

$$f_N(E) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} (E_c^2 + E_s^2) \right] \right\},$$

де  $E_c = E(t) \cos \varphi(t)$ ,  $E_s = E(t) \sin \varphi(t)$ .

Розглянемо бігаусівський сигнал

$$\xi(t) = P_c(t) \cos \omega_0 t + P_s(t) \sin \omega_0 t.$$

Щільність розподілу сукупності квадратурної складової цього процесу, розглянута в довільний момент часу, дорівнює

$$f_{PN}(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi\sigma_\xi^2} \exp \left( -\frac{1}{\sigma_\xi^2} \mu_0^2 \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} (P_c^2 + P_s^2) \right] \text{ch} \left[ -\frac{1}{\sigma_\xi^2} (P_c + P_s) \right],$$

де

$$P_c = P(t) \cos \varphi(t), \quad P_s = P(t) \sin \varphi(t). \quad (5)$$

Якщо скористатись (5) і перейти від  $P_c, P_s$  до  $P, \varphi$ , то одержимо

$$f_{PN}(P, \varphi) = \frac{P}{4\pi\sigma_\xi^2} \exp \left( -\frac{1}{\sigma_\xi^2} P^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} \mu_0^2 \right) \text{ch} \left( -\frac{\sqrt{2}}{\sigma_\xi^2} \mu_0 P \cos \varphi \right),$$

де  $P \geq 0$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

Отриманий розподіл, на відміну від гаусівського процесу, не описують у вигляді  $f(P)f(\varphi)$ , що вказує на певний статистичний зв'язок між випадковими величинами  $P$  і  $\varphi$ .

Розподіл амплітуди  $P$  надамо у вигляді

$$f(P) = \int_{-\pi}^{\pi} f(P, \varphi) d\varphi = -\frac{1}{\sigma_\xi^2} P \exp \left( -\frac{1}{2\sigma_\xi^2} P^2 \right) I_0 \left( \frac{\sqrt{2}}{\sigma_\xi^2} \mu_0 P \right), \quad P \geq 0. \quad (6)$$

Такий розподіл називають законом Райса, або узагальненим розподілом Релея.

Параметр цього розподілу  $\delta = \sqrt{2}\sigma_{\xi}^{-1}\mu_0$  залежить від  $\mu_0$  (центральний момент випадкової величини) і за умови  $\mu_0 = 0$ , як і прогнозувалося, (6) трансформується у розподіл Релея. Райсівський закон розподілу амплітуди бігаусівського процесу вказує на його більший ступінь «розмитості», на що вище вже звертали увагу.

Вираз для розподілу фази запишемо у вигляді

$$f(\varphi) = \int_0^{\infty} f(P, \varphi) dP = \frac{1}{4\pi\sigma_{\xi}^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2}\mu_0^2\right) \int_0^{\infty} P \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2}P^2\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma_{\xi}^2}\mu_0 P \cos \varphi\right) dP,$$

де  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

Цей інтеграл є табличним і його виражають через erf- і erfc-функції [6]. Він, а отже й  $f(\varphi)$ , є складною функцією від аргументу  $\varphi$ . Причому, якщо  $\mu_0 \rightarrow 0$ , цей розподіл, як і прогнозувалося, переходить у рівномірний.

Як свідчать результати аналізу, двовимірні характеристики, а тим більше характеристики більшої розмірності обвідної й фази вузькосмугового бігаусівського сигналу, є досить складними для застосування на практиці.

Відомо [1], що при спостереженні сигналів на фоні внутрішніх шумів найбільший інтерес становлять гаусівські білі процеси; це пояснюється наявністю широкосмугових шумоподібних сигналів спостереження.

На сучасному етапі шумоподібні сигнали в радіозв'язку займають смугу величиною до сотень мегагерців. При цьому інтенсивно проводять дослідження з подальшого розширення спектра цих сигналів до одиниць гігагерців. За цих умов (при спостереженні сигналів на фоні надширокопосмугових зв'язкових сигналів) інтерес, безсумнівно, становлять бігаусівські білі шуми.

#### ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ БІЛОГО БІГАУСІВСЬКОГО ШУМУ І ФУНКЦІОНАЛ ЙОГО ЩІЛЬНОСТІ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТІ

Функціонал білого бігаусівського сигналу залежно від вибору параметрів багатомірної бігаусівської щільності розподілу спостережень може бути різним.

Якщо обмежитися випадком бігаусівського розподілу вигляду (2) і перейти від багатомірного розподілу ймовірності до функціоналу ймовірності [1, 5], то у випадку білого шуму одержимо функціонал, що відрізняється від гаусівського:

$$f_{PN}[x(t)] = \frac{1}{2} h \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} N_0 \int_0^T (x(t) + \mu(t) - \sqrt{\varepsilon(\alpha)} S_0(t, \alpha))^2 dt\right] + \exp\left[-\frac{1}{2} N_0 \int_0^T (x(t) + \mu(t) - \sqrt{\varepsilon(\alpha)} S_0(t, \alpha))^2 dt\right] \right\}, \quad (7)$$

де  $\mu(t)$  — деяка визначена функція,

$$f_N[x(t)] = h \exp\left\{-\frac{1}{2} N_0 \int_0^T [x(t) - \sqrt{\varepsilon(\alpha)} S_0(t, \alpha)]^2 dt\right\}. \quad (8)$$

Оцінювання амплітуди  $\varepsilon'$  проведемо, скориставшись методом максимуму правдоподібності за умови, що в (7) і (8)  $\sqrt{\varepsilon(\alpha)} = \varepsilon'$ ;  $S_0(t, \alpha)$  та  $\mu(t)$  — відомі функції. При цьому, у разі гаусівського білого шуму, необхідно мінімізувати такий інтеграл:

$$\chi_N = \int_0^T [x(t) - \varepsilon' S_0(t, \alpha)]^2 dt.$$

Після розв'язання рівняння  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon'} \chi_N = 0$  одержуємо шукану оцінку у вигляді

$$\varepsilon'^* = \left( \int_0^T S_0^2(t, \alpha) dt \right)^{-1} \int_0^T x(t) S_0(t, \alpha) dt = \int_0^T x(t) S_0(t, \alpha) dt. \quad (9)$$

Якщо шум є білим бігаусівським, то слід мінімізувати такий вираз:

$$\begin{aligned} \chi_{PN} = \ln \left\{ \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) - \mu(t) - \varepsilon' S_0(t, \alpha))^2 dt \right] + \right. \\ \left. + \exp \left[ -\frac{1}{N_0} \int_0^T (x(t) + \mu(t) - \varepsilon' S_0(t, \alpha))^2 dt \right] \right\} = -\frac{1}{N_0} \int_0^T [x(t) - \varepsilon' S_0(t, \alpha)]^2 dt - \\ - \frac{1}{N_0} \int_0^T \mu^2(t) dt + \ln 2 + \ln \operatorname{ch} \frac{2}{N_0} \int_0^T \mu(t) [x(t) - \varepsilon' S_0(t)] dt. \end{aligned}$$

При цьому рівняння  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon'} \chi_{PN} = 0$  набуде такого вигляду:

$$\varepsilon' = \int_0^T x(t) S_0(t, \alpha) dt - \operatorname{th} \left\{ \frac{2}{N_0} \int_0^T [x(t) - \varepsilon' S_0(t, \alpha)] \mu(t) dt \right\} \int_0^T \mu(t) S_0(t, \alpha) dt. \quad (10)$$

За допомогою цього рівняння досить просто будемо ітераційну процедуру обчислення оцінки величини  $\varepsilon'$ . За умови  $\mu(t) \equiv 0$  із формули (10) отримуємо оцінку (9).

## ВИСНОВКИ

Аналіз наведених результатів свідчить, що у реальних умовах під час досліджень, пов'язаних з пошуком радіосигналу, спостережувані процеси не завжди задовільно апроксимуються гаусівською моделлю. На практиці в таких ситуаціях, як правило, використовують методи кореляційної теорії, що дозволяє будувати відносно прості процедури оброблення сигналів. Однак ці спрощення досягаються за рахунок певної втрати якості, що не завжди допустимо. Тому як науковий, так і практичний інтерес становлять дослідження із розроблення негаусівських (полігаусівських) моделей сигналів.

Розроблення і використання полігаусівської моделі завадових сигналів доцільні з трьох основних причин.

1. Полігаусівські розподіли можуть бути полімодальними, а у разі шумоподібних зв'язкових сигналів — бімодальними. Під час проведення моніторингу цілком реальною може бути ситуація виявлення та вимірювання параметрів сигналів на фоні завад і сигналів засобів радіозв'язку.

2. Полігаусівська модель сигналів є більш загальною порівняно з гаусівською (за певних умов полігаусівський розподіл спостережень перетворюється у гаусівський). Тому, з методичних міркувань, застосування полігаусівської моделі сигналів треба розглядати у порівнянні з відомими прикладами використання гаусівської моделі.

3. Алгоритми оброблення сигналів, які отримані за припущенням, що шум є гаусівським, в багатьох випадках виявляються неробастними. Це найчастіше є наслідком наявності аномальних вимірювань. За допомогою полігаусівської моделі можна задати розподіли з «товстими хвостами», фіксуючи тим самим факт наявності аномальних похибок вимірювань.

У роботі запропоновано бігаусівську модель, для якої отримані: функціонал щільності розподілу білого бігаусівського шуму, а також вирази для спільного розподілу амплітуди й фази, фіксованих у довільний момент часу. Зазначено, що використання бігаусівських розподілів при оцінюванні параметрів сигналів призводить до більш складних математичних виразів і виникнення ускладнень при обчисленні, але це не викликає труднощів при сучасному рівні розвитку обчислювальних засобів. Використання математичного опису такої моделі в алгорит-

мах проектування та функціонування перспективних зразків моніторингової техніки в телекомунікаційних системах дозволить виявляти більш складні види модуляції джерел радіовипромінювань та значно підвищити точність визначення координат таких джерел.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Заруднев І.І., Ільницький А.І., Коротич В.М. Результати аналізу гаусівської моделі сигналів джерел радіовипромінювань. Зб. наук. праць ЦНДІ ЗСУ. 2007. Вип. 20. С. 3–16.
2. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Москва: Физматлит, 1960. 883 с.
3. Лоев М. Теория вероятностей. Москва: Изд-во физ.-мат. литературы, 1962. 719 с.
4. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. Москва: Наука, 1976. 736 с.
5. Лорен Р.Л., Уилкинс Г.М. Устойчивые статистические методы оценки данных. Москва: Машиностроение, 1984. 232 с.
6. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. Москва: Статистика, 1980. 95 с.

*Надійшла до редакції 23.09.2016*

**А.А. Ильяшов**

#### **БИГАУССОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИГНАЛОВ ИСТОЧНИКОВ РАДИОИЗЛУЧЕНИЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ СРЕДЕ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

**Аннотация.** Проанализированы причины непригодности одномерной гауссовской модели для анализа и синтеза измерений параметров сложных сигналов. Описана бигауссовская математическая модель сигналов источников радиоизлучений.

**Ключевые слова:** одномерная гауссовская модель сигналов источников радиоизлучений, бигауссовская математическая модель, закон Райса.

**О.А. Piashov**

#### **THE BI-GAUSSIAN MATHEMATICAL MODEL OF THE SIGNAL SOURCES FROM RADIO EMITTING IN THE INFORMATION ENVIRONMENT IN TELECOMMUNICATION SYSTEMS**

**Abstract.** This paper analyzes why the one-dimensional Gaussian model is inapplicable for the analysis and synthesis of measurements of parameters of complex signals and describes the bi-Gaussian mathematical model of signals of sources of radio emitting.

**Keywords:** one-dimensional the Gaussian mathematical model of the signals sources radio emitting, the bi-Gaussian mathematical model, the Rice law.

**Ильяшов Александр Авксентійович,**

доктор військ. наук, доцент, головний науковий співробітник Центрального науково-дослідного інституту Збройних Сил України, Київ, e-mail: aleksandr.ilyashov@gmail.com.