УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВЫЙ, К.Ю. ЖЕРНОВЫЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРЕХКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭРЛАНГОВСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования систем обслуживания $M/E_2/3/m$: стандартной системы, а также систем с пороговой и гистерезисной стратегиями случайного отбрасывания заявок в целях управления входящим потоком. Получены рекуррентные соотношения для вычисления стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Построенные алгоритмы проверены на примерах с использованием имитационных моделей, созданных с помощью инструментальных средств GPSS World.

Ключевые слова: трехканальная система обслуживания, простейший входящий поток, эрланговское распределение времени обслуживания, случайное отбрасывание заявок, метод фиктивных фаз, рекуррентные соотношения.

ВВЕДЕНИЕ

Задача определения стационарных характеристик систем обслуживания M/G/n/m и M/G/n/∞ с числом каналов $n>1$ значительно усложняется по сравнению со случаем, когда $n=1$. В настоящее время не существует аналитических методов исследования многоканальных систем указанных типов (а тем более сложных систем G/G/n/m и G/G/n/∞), которые позволяли бы находить для них стационарные показатели производительности в приемлемом для анализа виде. Одно из немногих исключений представляет система M/D/n/∞, для которой можно получить некоторые характеристики, связанные с числом заявок в системе [1].

Для исследования одноканальных систем с эрланговскими распределениями, в частности системы $M/E_s/1/\infty$ [1], применяется метод фиктивных фаз, разработанный А.К. Эрлангом [2]. Для эрланговского распределения порядка s времени обслуживания предполагается, что каждая заявка последовательно проходит s фаз обслуживания, длительности которых распределены по показательным законам с параметрами $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ соответственно.

Цель настоящей статьи — построение с помощью метода фиктивных фаз рекуррентных алгоритмов для вычисления стационарного распределения числа заявок в трехканальной системе обслуживания $M/E_2/3/m$, а также в системах такого же типа с пороговыми и гистерезисными стратегиями случайного отбрасывания заявок. Случайное отбрасывание заявок применяется в системах обслуживания в целях предотвращения перегрузок, когда каждая поступающая заявка может быть отброшена с определенной вероятностью, зависящей от длины очереди в момент поступления заявки, даже если буфер еще полностью не заполнен [3–8]. В работе [9] разработаны рекуррентные алгоритмы для двухканальных систем $M/E_2/2/m$ и $M/E_2/2/\infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ СИСТЕМЫ $M/E_2/3/m$

Рассмотрим систему $M/E_2/3/m$, где m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Входящий поток заявок — простейший, т.е. интервалы времени между моментами прибытия соседних по времени заявок являются независимыми случайными величинами, показательно распределенными с параметром λ. Время обслуживания каждой заявки распределено согласно обобщенному закону Эрланга второго порядка, т.е. представляет сумму двух независимых случайных величин, показательно распределенных соответственно с параметрами μ_1 и μ_2.

На основании метода фаз введем следующие обозначения для состояний системы: s_0 – в системе нет заявок; $s_{k(ij)}$ – в системе k заявок $(1 \le k \le m+3)$, i заявок пребывают на первой фазе обслуживания, j заявок — на второй $(0 \le i \le 3$, $0 \le j \le 3, 1 \le i+j \le 3)$. Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_0 и $s_{k(ij)}$ обозначим p_0 и $p_{k(ij)}$ соответственно. Пусть $p_{2(30)} = p_{2(20)}$, $p_{2(21)} = p_{2(11)}$, $p_{2(12)} = p_{2(02)}$. Тогда для определения этих вероятностей получим систему уравнений

$$-\lambda p_0 + \mu_2 p_{1(01)} = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_2)\, p_{1(01)} + \mu_1 p_{1(10)} + 2\mu_2 p_{2(02)} = 0,$$

$$-(\lambda + 2\mu_2)\, p_{2(02)} + \mu_1 p_{2(11)} + 3\mu_2 p_{3(03)} = 0,$$

$$-(\lambda + 3\mu_2)\, p_{3(03)} + \mu_1 p_{3(12)} = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_1)\, p_{1(10)} + \lambda p_0 + \mu_2 p_{2(11)} = 0,$$

$$-(\lambda + 2\mu_1)\, p_{2(20)} + \lambda p_{1(10)} + \mu_2 p_{3(21)} = 0,$$

$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\, p_{2(11)} + \lambda p_{1(01)} + 2\mu_2 p_{3(12)} + 2\mu_1 p_{2(20)} = 0; \tag{1}$$

$$-(\lambda + 3\mu_1)\, p_{k(30)} + \lambda p_{k-1(30)} + \mu_2 p_{k+1(21)} = 0,\ 3 \le k \le m+2;$$

$$-(\lambda + 2\mu_1 + \mu_2)\, p_{k(21)} + \lambda p_{k-1(21)} + 3\mu_1 p_{k(30)} + 2\mu_2 p_{k+1(12)} = 0,\ 3 \le k \le m+2;$$

$$-(\lambda + \mu_1 + 2\mu_2)\, p_{k(12)} + \lambda p_{k-1(12)} + 2\mu_1 p_{k(21)} + 3\mu_2 p_{k+1(03)} = 0,\ 3 \le k \le m+2;$$

$$-(\lambda + 3\mu_2)\, p_{k(03)} + \lambda p_{k-1(03)} + \mu_1 p_{k(12)} = 0,\ 4 \le k \le m+2; \tag{2}$$

$$-3\mu_1 p_{m+3(30)} + \lambda p_{m+2(30)} = 0, \tag{3}$$

$$-(2\mu_1 + \mu_2)\, p_{m+3(21)} + \lambda p_{m+2(21)} + 3\mu_1 p_{m+3(30)} = 0, \tag{4}$$

$$-(\mu_1 + 2\mu_2)\, p_{m+3(12)} + \lambda p_{m+2(12)} + 2\mu_1 p_{m+3(21)} = 0, \tag{5}$$

$$-3\mu_2 p_{m+3(03)} + \lambda p_{m+2(03)} + \mu_1 p_{m+3(12)} = 0; \tag{6}$$

$$p_0 + p_{1(10)} + p_{1(01)} + p_{2(20)} + p_{2(11)} + p_{2(02)} + \\ + \sum_{k=3}^{m+3} (p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)}) = 1. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{\mu_i},\ i = 1, 2;\ \eta = \frac{\mu_2}{\mu_1};\ \tilde{p}_{1(10)} = \frac{p_{1(10)}}{p_0},\ \tilde{p}_{1(01)} = \frac{p_{1(01)}}{p_0},\ \tilde{p}_{2(20)} = \frac{p_{2(20)}}{p_0} = p,$$

$$\tilde{p}_{2(11)} = \frac{p_{2(11)}}{p_0},\ \tilde{p}_{2(02)} = \frac{p_{2(02)}}{p_0},\ \tilde{p}_{k(30)} = \frac{p_{k(30)}}{p_0},\ \tilde{p}_{k(21)} = \frac{p_{k(21)}}{p_0},$$

$$\tilde{p}_{k(12)} = \frac{p_{k(12)}}{p_0},\ \tilde{p}_{k(03)} = \frac{p_{k(03)}}{p_0},\ 3 \le k \le m+3,$$

и с помощью уравнений (1) находим

$$\tilde{p}_{1(01)}=\alpha_2\,,\ \tilde{p}_{3(03)}=\frac{A(\eta,\alpha_1,\alpha_2,p)}{B(\eta,\alpha_1,\alpha_2)}\,,\ \tilde{p}_{3(12)}=(\alpha_1+3\eta)\,\tilde{p}_{3(03)},$$
$$\tilde{p}_{2(11)}=\frac{2\eta(\alpha_1+3\eta)\,\tilde{p}_{3(03)}+2p+\eta\alpha_2^2}{\eta(\alpha_2+1)+1}\,,$$
$$\tilde{p}_{2(02)}=\frac{\eta(2\alpha_1+3\eta\alpha_2+9\eta+3)\,\tilde{p}_{3(03)}+2p+\eta\alpha_2^2}{(\alpha_1+2\eta)(\eta(\alpha_2+1)+1)}\,,$$
$$\tilde{p}_{1(10)}=\alpha_2(\alpha_1+\eta)-2\eta\tilde{p}_{2(02)}\,,\ \tilde{p}_{3(21)}=\frac{1}{\eta}((\alpha_1+2)\,p-\alpha_1\tilde{p}_{1(10)})\,, \tag{8}$$
где
$$A(\eta,\alpha_1,\alpha_2,p)=\alpha_2(\alpha_1+1)((\alpha_1+\eta)(\alpha_1+2\eta)(\eta\alpha_2+\eta+1)-2\eta^2\alpha_2)-$$
$$-\alpha_1(\alpha_1+2\eta)(\eta\alpha_2+\eta+1)-\eta^2\alpha_2^2(\alpha_1+2\eta)-2\eta(3\alpha_1+2\eta+2)\,p,$$
$$B(\eta,\alpha_1,\alpha_2)=2\eta^2((\alpha_1+1)(2\alpha_1+3\eta\alpha_2+9\eta+3)+(\alpha_1+2\eta)(\alpha_1+3\eta))\,.$$

В рекуррентные соотношения (8) в отличие от более простых соотношений, полученных в [9] для системы $M/E_2/2/m$, входит параметр $p=\tilde{p}_{2(20)}$, подлежащий определению.

Из уравнений (2) получаем рекуррентные соотношения:

$$\tilde{p}_{k(03)}=f_{03}(\tilde{p}_{k-1(12)}\,,\ \tilde{p}_{k-2(12)}\,,\ \tilde{p}_{k-1(21)})\,,\ 4\le k\le m+3\,;$$
$$\tilde{p}_{k(12)}=f_{12}(\tilde{p}_{k(03)},\tilde{p}_{k-1(03)})\,,\ 4\le k\le m+2\,;$$
$$\tilde{p}_{k(30)}=f_{30}(\tilde{p}_{k(21)},\tilde{p}_{k-1(21)},\tilde{p}_{k+1(12)})\,,\ 3\le k\le m+2\,;$$
$$\tilde{p}_{k(21)}=f_{21}(\tilde{p}_{k-1(30)}\,,\ \tilde{p}_{k-2(30)})\,,\ 4\le k\le m+3\,, \tag{9}$$
где
$$f_{03}(x,y,z)=\frac{1}{3\eta}((\alpha_1+2\eta+1)\,x-\alpha_1 y-2z)\,,\ f_{12}(x,y)=(\alpha_1+3\eta)\,x-\alpha_1 y\,,$$
$$f_{30}(x,y,z)=\frac{1}{3}((\alpha_1+\eta+2)\,x-\alpha_1 y-2\eta z)\,,\ f_{21}(x,y)=\frac{1}{\eta}((\alpha_1+3)\,x-\alpha_1 y)\,.$$
С помощью уравнений (3) и (6) находим
$$\tilde{p}_{m+3(30)}=\frac{\alpha_1}{3}\,\tilde{p}_{m+2(30)},\ \tilde{p}_{m+3(12)}=3\eta\tilde{p}_{m+3(03)}-\alpha_1\tilde{p}_{m+2(03)}. \tag{10}$$

Рекуррентные соотношения (8)–(10) позволяют вычислить $\tilde{p}_{1(01)}$ и последовательно получить выражения для $\tilde{p}_{1(10)}$, $\tilde{p}_{2(11)}$, $\tilde{p}_{2(02)}$, $\tilde{p}_{k(30)}$, $\tilde{p}_{k(21)}$, $\tilde{p}_{k(12)}$ и $\tilde{p}_{k(03)}$ $(3\le k\le m+3)$ как функций от неизвестного параметра $p=\tilde{p}_{2(20)}$. Для определения p можно использовать любое уравнение из (4) или (5), которые не были задействованы при получении соотношений (8)–(10). Например, после подстановки в равенство

$$-(2\mu_1+\mu_2)\tilde{p}_{m+3(21)}+\lambda\tilde{p}_{m+2(21)}+3\mu_1\tilde{p}_{m+3(30)}=0\,,$$

следующее из (4), выражений для $\tilde{p}_{m+3(21)}$, $\tilde{p}_{m+2(21)}$ и $\tilde{p}_{m+3(30)}$ как функций от p, найденных в результате вычислений с помощью соотношений (8)–(10), получим линейное уравнение для p. Затем, используя условие нормировки (7), определяем стационарные вероятности по формулам

$$p_0=\left(1+\tilde{p}_{1(10)}+\tilde{p}_{1(01)}+\tilde{p}_{2(20)}+\tilde{p}_{2(11)}+\tilde{p}_{2(02)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=3}^{m+3}(\tilde{p}_{k(30)}+\tilde{p}_{k(21)}+\tilde{p}_{k(12)}+\tilde{p}_{k(03)})\right)^{-1};$$

$$p_{1(10)} = p_0 \widetilde{p}_{1(10)},\ p_{1(01)} = p_0 \widetilde{p}_{1(01)},$$
$$p_{2(20)} = p_0 \widetilde{p}_{2(20)},\ p_{2(11)} = p_0 \widetilde{p}_{2(11)},\ p_{2(02)} = p_0 \widetilde{p}_{2(02)};$$
$$p_{k(30)} = p_0 \widetilde{p}_{k(30)},\ p_{k(21)} = p_0 \widetilde{p}_{k(21)},\ p_{k(12)} = p_0 \widetilde{p}_{k(12)},$$
$$p_{k(03)} = p_0 \widetilde{p}_{k(03)},\ 3 \le k \le m+3;$$

$$p_1 = p_{1(10)} + p_{1(01)},\ p_2 = p_{2(20)} + p_{2(11)} + p_{2(02)},$$
$$p_k = p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)},\ 3 \le k \le m+3, \tag{11}$$

где p_k — стационарная вероятность наличия в системе k заявок.

Стационарные характеристики системы M/E$_2$/3/m, представляющие вероятность обслуживания поступившей заявки (относительную пропускную способность системы) $\mathbf{P}_{sv}$, среднюю длину очереди $\mathbf{E}(Q)$ и среднее время ожидания $\mathbf{E}(W)$, находим по формулам:

$$\mathbf{P}_{sv} = 1 - p_{m+3},\ \mathbf{E}(Q) = p_4 + \sum_{k=5}^{m+3} (k-3)\, p_k,\ \mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(Q)}{\lambda \mathbf{P}_{sv}}. \tag{12}$$

СИСТЕМА M/E$_2$/3/m С ПОРОГОВОЙ СТРАТЕГИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ОТБРАСЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Для системы обслуживания M/E$_2$/3/m рассмотрим стратегию случайного отбрасывания заявок, осуществляемую согласно следующему правилу: если в момент прибытия заявки число заявок в системе равно $n \in \{1, 2, \ldots, m+3\}$ (не учитывая прибывшую), то заявка принимается на обслуживание с вероятностью β_n ($0 < \beta_n \le 1$, $\beta_{m+3} = 0$) и получает отказ (отбрасывается) с вероятностью $1 - \beta_n$. Ограничиваясь рассмотрением упрощенного варианта этой стратегии, зафиксируем пороговое значение h ($5 \le h \le m+1$) и предположим, что $\beta_n = 1$ при $1 \le n \le h-1$ и $\beta_n = \beta$ ($0 < \beta < 1$) для $h \le n \le m+2$. При выполнении условия $h \le n \le m+2$, где $n-$ число заявок в системе в момент прибытия заявки, интенсивность простейшего потока заявок, принимаемых на обслуживание, равна $\widetilde{\lambda} = \lambda\beta$.

Система уравнений для определения стационарных вероятностей записывается в виде

$$-\lambda p_0 + \mu_2 p_{1(01)} = 0,$$
$$-(\lambda + \mu_2)\, p_{1(01)} + \mu_1 p_{1(10)} + 2\mu_2 p_{2(02)} = 0,$$
$$-(\lambda + 2\mu_2)\, p_{2(02)} + \mu_1 p_{2(11)} + 3\mu_2 p_{3(03)} = 0,$$
$$-(\lambda + 3\mu_2)\, p_{3(03)} + \mu_1 p_{3(12)} = 0,$$
$$-(\lambda + \mu_1)\, p_{1(10)} + \lambda p_0 + \mu_2 p_{2(11)} = 0,$$
$$-(\lambda + 2\mu_1)\, p_{2(20)} + \lambda p_{1(10)} + \mu_2 p_{3(21)} = 0,$$
$$-(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\, p_{2(11)} + \lambda p_{1(01)} + 2\mu_2 p_{3(12)} + 2\mu_1 p_{2(20)} = 0; \tag{13}$$

$$-(\lambda + 3\mu_1)\, p_{k(30)} + \lambda p_{k-1(30)} + \mu_2 p_{k+1(21)} = 0,\ 3 \le k \le h-1;$$
$$-(\lambda + 2\mu_1 + \mu_2)\, p_{k(21)} + \lambda p_{k-1(21)} + 3\mu_1 p_{k(30)} + 2\mu_2 p_{k+1(12)} = 0,\ 3 \le k \le h-1;$$
$$-(\lambda + \mu_1 + 2\mu_2)\, p_{k(12)} + \lambda p_{k-1(12)} + 2\mu_1 p_{k(21)} + 3\mu_2 p_{k+1(03)} = 0,\ 3 \le k \le h-1;$$
$$-(\lambda + 3\mu_2)\, p_{k(03)} + \lambda p_{k-1(03)} + \mu_1 p_{k(12)} = 0,\ 4 \le k \le h-1; \tag{14}$$

$$-(\tilde{\lambda}+3\mu_1)\, p_{h(30)} + \lambda p_{h-1(30)} + \mu_2\, p_{h+1(21)} = 0,$$
$$-(\tilde{\lambda}+2\mu_1+\mu_2)\, p_{h(21)} + \lambda p_{h-1(21)} + 3\mu_1 p_{h(30)} + 2\mu_2\, p_{h+1(12)} = 0,$$
$$-(\tilde{\lambda}+\mu_1+2\mu_2)\, p_{h(12)} + \lambda p_{h-1(12)} + 2\mu_1 p_{h(21)} + 3\mu_2\, p_{h+1(03)} = 0,$$
$$-(\tilde{\lambda}+3\mu_2)\, p_{h(03)} + \lambda p_{h-1(03)} + \mu_1 p_{h(12)} = 0; \tag{15}$$

$$-(\tilde{\lambda}+3\mu_1)\, p_{k(30)} + \tilde{\lambda} p_{k-1(30)} + \mu_2\, p_{k+1(21)} = 0,\ h+1 \le k \le m+2;$$
$$-(\tilde{\lambda}+2\mu_1+\mu_2)\, p_{k(21)} + \tilde{\lambda} p_{k-1(21)} + 3\mu_1 p_{k(30)} + 2\mu_2\, p_{k+1(12)} = 0,\ h+1 \le k \le m+2;$$
$$-(\tilde{\lambda}+\mu_1+2\mu_2)\, p_{k(12)} + \tilde{\lambda} p_{k-1(12)} + 2\mu_1 p_{k(21)} + 3\mu_2\, p_{k+1(03)} = 0,\ h+1 \le k \le m+2;$$
$$-(\tilde{\lambda}+3\mu_2)\, p_{k(03)} + \tilde{\lambda} p_{k-1(03)} + \mu_1 p_{k(12)} = 0,\ h+1 \le k \le m+2; \tag{16}$$

$$-3\mu_1 p_{m+3(30)} + \tilde{\lambda} p_{m+2(30)} = 0, \tag{17}$$

$$-(2\mu_1+\mu_2)\, p_{m+3(21)} + \tilde{\lambda} p_{m+2(21)} + 3\mu_1 p_{m+3(30)} = 0, \tag{18}$$

$$-(\mu_1+2\mu_2)\, p_{m+3(12)} + \tilde{\lambda} p_{m+2(12)} + 2\mu_1 p_{m+3(21)} = 0, \tag{19}$$

$$-3\mu_2 p_{m+3(03)} + \tilde{\lambda} p_{m+2(03)} + \mu_1 p_{m+3(12)} = 0; \tag{20}$$

$$p_0 + p_{1(10)} + p_{1(01)} + p_{2(20)} + p_{2(11)} + p_{2(02)} + \sum_{k=3}^{m+3} (p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)}) = 1. \tag{21}$$

С помощью уравнений (13) приходим к равенствам (8), а из уравнений (14) получаем рекуррентные соотношения

$$\tilde{p}_{k(03)} = f_{03}(\tilde{p}_{k-1(12)},\ \tilde{p}_{k-2(12)}, \tilde{p}_{k-1(21)}),\ 4 \le k \le h;$$
$$\tilde{p}_{k(12)} = f_{12}(\tilde{p}_{k(03)}, \tilde{p}_{k-1(03)},\ 4 \le k \le h-1;$$
$$\tilde{p}_{k(30)} = f_{30}(\tilde{p}_{k(21)}, \tilde{p}_{k-1(21)},\ \tilde{p}_{k+1(12)}),\ 3 \le k \le h-1;$$
$$\tilde{p}_{k(21)} = f_{21}(\tilde{p}_{k-1(30)},\ \tilde{p}_{k-2(30)}),\ 4 \le k \le h. \tag{22}$$

Используя уравнения (15), находим

$$\tilde{p}_{h(12)} = (\tilde{\alpha}_1 + 3\eta)\tilde{p}_{h(03)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h-1(03)},$$
$$\tilde{p}_{h+1(03)} = \frac{1}{3\eta}((\tilde{\alpha}_1 + 2\eta + 1)\tilde{p}_{h(12)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h-1(12)} - 2\tilde{p}_{h(21)}),$$
$$\tilde{p}_{h(30)} = \frac{1}{3}((\tilde{\alpha}_1 + \eta + 2)\tilde{p}_{h(21)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h-1(21)} - 2\eta\tilde{p}_{h+1(12)}),$$
$$\tilde{p}_{h+1(21)} = \frac{1}{\eta}((\tilde{\alpha}_1 + 3)\tilde{p}_{h(30)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h-1(30)}), \tag{23}$$

где $\tilde{\alpha}_i = \dfrac{\tilde{\lambda}}{\mu_i}$, $i = 1, 2$.

С помощью уравнений (16), (17) и (20) получаем

$$\widetilde{p}_{k(03)}=g_{03}(\widetilde{p}_{k-1(12)},\ \widetilde{p}_{k-2(12)},\ \widetilde{p}_{k-1(21)}),\ h+2\le k\le m+3;$$
$$\widetilde{p}_{k(12)}=g_{12}(\widetilde{p}_{k(03)},\ \widetilde{p}_{k-1(03)}),\ h+1\le k\le m+2;$$
$$\widetilde{p}_{k(30)}=g_{30}(\widetilde{p}_{k(21)},\ \widetilde{p}_{k-1(21)},\ \widetilde{p}_{k+1(12)}),\ h+1\le k\le m+2;$$
$$\widetilde{p}_{k(21)}=g_{21}(\widetilde{p}_{k-1(30)},\ \widetilde{p}_{k-2(30)}),\ h+2\le k\le m+3; \tag{24}$$

$$\widetilde{p}_{m+3(30)}=\frac{\widetilde{\alpha}_1}{3}\widetilde{p}_{m+2(30)},\ \widetilde{p}_{m+3(12)}=3\eta\widetilde{p}_{m+3(03)}-\widetilde{\alpha}_1\widetilde{p}_{m+2(03)}, \tag{25}$$

где

$$g_{03}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{3\eta}((\widetilde{\alpha}_1+2\eta+1)x-\widetilde{\alpha}_1 y-2z),\ g_{12}(x,\ y)=(\widetilde{\alpha}_1+3\eta)x-\widetilde{\alpha}_1 y,$$

$$g_{30}(x,\ y,\ z)=\frac{1}{3}((\widetilde{\alpha}_1+\eta+2)x-\widetilde{\alpha}_1 y-2\eta z),\ g_{21}(x,\ y)=\frac{1}{\eta}((\widetilde{\alpha}_1+3)x-\widetilde{\alpha}_1 y).$$

Рекуррентные соотношения (8), (22)–(25) позволяют вычислить $\widetilde{p}_{1(01)}$ и последовательно получать выражения для $\widetilde{p}_{1(10)}$, $\widetilde{p}_{2(11)}$, $\widetilde{p}_{2(02)}$, $\widetilde{p}_{k(30)}$, $\widetilde{p}_{k(21)}$, $\widetilde{p}_{k(12)}$ и $\widetilde{p}_{k(03)}$ $(3\le k\le m+3)$ как функций от неизвестного параметра $p=\widetilde{p}_{2(20)}$. Для определения p можно использовать любое из уравнений (18) или (19), которые не были задействованы при получении соотношений (8), (22)–(25). Затем, используя условие нормировки (21), определяем стационарные вероятности и стационарные характеристики очереди $\mathbf{E}(Q)$, $\mathbf{E}(W)$ по формулам (11) и (12). Выражение для стационарной вероятности обслуживания с учетом потери случайно отбрасываемых заявок принимает вид

$$\mathbf{P}_{sv}=\frac{3(1-p_0)-2p_1-p_2}{\alpha_2(\eta+1)}. \tag{26}$$

Формула (26) представляет отношение среднего числа обслуженных заявок за единицу времени к интенсивности потока прибывающих заявок.

СИСТЕМА M/E$_2$/3/m С ГИСТЕРЕЗИСНОЙ СТРАТЕГИЕЙ СЛУЧАЙНОГО ОТБРАСЫВАНИЯ ЗАЯВОК

Для системы обслуживания M/E$_2$/3/m рассмотрим гистерезисную стратегию случайного отбрасывания заявок с двумя порогами: h_1 и h_2 $(4\le h_1<h_2<m+1$, $h_2-h_1\ge 3)$ и с двумя режимами функционирования: основным и режимом отбрасывания. Предположим, что $\beta_n=1$ при $1\le n\le h_1$ для основного режима, $\beta_n=\beta$ $(0<\beta<1)$ при $h_2\le n\le m+2$, $\beta_{m+3}=0$ для режима отбрасывания. Здесь $n-$ число заявок в системе в момент прибытия заявки (не учитывая прибывшую). Если в момент прибытия заявки выполняется условие $h_1<n<h_2$, то режим не изменяется. Режим отбрасывания функционирует от момента, когда число заявок в системе (на обслуживании и в очереди) достигает значения h_2, до момента, когда число заявок уменьшается до значения h_1.

Введем следующие обозначения для состояний системы в основном режиме: s_0 – в системе нет заявок; $s_{k(ij)}$ – в системе k заявок $(1\le k\le h_2-1)$, i заявок пребывают на первой фазе обслуживания, j заявок — на второй $(0\le i\le 3$, $0\le j\le 3$, $1\le i+j\le 3)$. Стационарные вероятности пребывания системы в состояниях s_0 и $s_{k(ij)}$ обозначим p_0 и $p_{k(ij)}$ соответственно. Обозначим $\widetilde{s}_{k(30)}$, $\widetilde{s}_{k(21)}$, $\widetilde{s}_{k(12)}$ и $\widetilde{s}_{k(03)}$ $(h_1+1\le k\le m+3)$ аналогичные состояния системы в режиме отбрасывания, а через $q_{k(30)}$, $q_{k(21)}$, $q_{k(12)}$ и $q_{k(03)}$ $(h_1+1\le k\le m+3)$ — стационарные вероятности пребывания системы в этих состояниях.

Для определения стационарных вероятностей получим систему уравнений:

$$-\lambda p_0+\mu_2 p_{1(01)}=0,$$
$$-(\lambda+\mu_2)\,p_{1(01)}+\mu_1 p_{1(10)}+2\mu_2 p_{2(02)}=0,$$

$$-(\lambda+2\mu_2)\,p_{2(02)}+\mu_1 p_{2(11)}+3\mu_2 p_{3(03)}=0,$$
$$-(\lambda+3\mu_2)\,p_{3(03)}+\mu_1 p_{3(12)}=0,$$
$$-(\lambda+\mu_1)\,p_{1(10)}+\lambda p_0+\mu_2 p_{2(11)}=0,$$
$$-(\lambda+2\mu_1)\,p_{2(20)}+\lambda p_{1(10)}+\mu_2 p_{3(21)}=0,$$
$$-(\lambda+\mu_1+\mu_2)\,p_{2(11)}+\lambda p_{1(01)}+2\mu_2 p_{3(12)}+2\mu_1 p_{2(20)}=0; \qquad (27)$$

$$-(\lambda+3\mu_1)\,p_{k(30)}+\lambda p_{k-1(30)}+\mu_2 p_{k+1(21)}=0,\ 3\le k\le h_1-1,\ h_1+1\le k\le h_2-2;$$
$$-(\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,p_{k(21)}+\lambda p_{k-1(21)}+3\mu_1 p_{k(30)}+2\mu_2 p_{k+1(12)}=0,$$
$$3\le k\le h_1-1,\ h_1+1\le k\le h_2-2;$$
$$-(\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,p_{k(12)}+\lambda p_{k-1(12)}+2\mu_1 p_{k(21)}+3\mu_2 p_{k+1(03)}=0,$$
$$3\le k\le h_1-1,\ h_1+1\le k\le h_2-2;$$
$$-(\lambda+3\mu_2)\,p_{k(03)}+\lambda p_{k-1(03)}+\mu_1 p_{k(12)}=0,\ 4\le k\le h_2-1; \qquad (28)$$

$$-(\lambda+3\mu_1)\,p_{h_1(30)}+\lambda p_{h_1-1(30)}+\mu_2(p_{h_1+1(21)}+q_{h_1+1(21)})=0,$$
$$-(\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,p_{h_1(21)}+\lambda p_{h_1-1(21)}+3\mu_1 p_{h_1(30)}+2\mu_2(p_{h_1+1(12)}+q_{h_1+1(12)})=0,$$
$$-(\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,p_{h_1(12)}+\lambda p_{h_1-1(12)}+2\mu_1 p_{h_1(21)}+$$
$$+3\mu_2(p_{h_1+1(03)}+q_{h_1+1(03)})=0; \qquad (29)$$

$$-(\lambda+3\mu_1)\,p_{h_2-1(30)}+\lambda p_{h_2-2(30)}=0, \qquad (30)$$

$$-(\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,p_{h_2-1(21)}+\lambda p_{h_2-2(21)}+3\mu_1 p_{h_2-1(30)}=0, \qquad (31)$$

$$-(\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,p_{h_2-1(12)}+\lambda p_{h_2-2(12)}+2\mu_1 p_{h_2-1(21)}=0; \qquad (32)$$

$$-(\tilde\lambda+3\mu_1)\,q_{h_1+1(30)}+\mu_2 q_{h_1+2(21)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,q_{h_1+1(21)}+3\mu_1 q_{h_1+1(30)}+2\mu_2 q_{h_1+2(12)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,q_{h_1+1(12)}+2\mu_1 q_{h_1+1(21)}+3\mu_2 q_{h_1+2(03)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+3\mu_2)\,q_{h_1+1(03)}+\mu_1 q_{h_1+1(12)}=0; \qquad (33)$$

$$-(\tilde\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,q_{k(21)}+\tilde\lambda q_{k-1(21)}+3\mu_1 q_{k(30)}+2\mu_2 q_{k+1(12)}=0,$$
$$h_1+2\le k\le h_2-1,\ h_2+1\le k\le m+2;$$
$$-(\tilde\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,q_{k(12)}+\tilde\lambda q_{k-1(12)}+2\mu_1 q_{k(21)}+3\mu_2 q_{k+1(03)}=0,$$
$$h_1+2\le k\le h_2-1,\ h_2+1\le k\le m+2;$$
$$-(\tilde\lambda+3\mu_2)\,q_{k(03)}+\tilde\lambda q_{k-1(03)}+\mu_1 q_{k(12)}=0,$$
$$h_1+2\le k\le h_2-1,\ h_2+1\le k\le m+2; \qquad (34)$$

$$-(\tilde\lambda+3\mu_1)\,q_{h_2(30)}+\tilde\lambda q_{h_2-1(30)}+\lambda p_{h_2-1(30)}+\mu_2 q_{h_2+1(21)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+2\mu_1+\mu_2)\,q_{h_2(21)}+\tilde\lambda q_{h_2-1(21)}+\lambda p_{h_2-1(21)}+3\mu_1 q_{h_2(30)}+2\mu_2 q_{h_2+1(12)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+\mu_1+2\mu_2)\,q_{h_2(12)}+\tilde\lambda q_{h_2-1(12)}+\lambda p_{h_2-1(12)}+2\mu_1 q_{h_2(21)}+3\mu_2 q_{h_2+1(03)}=0,$$
$$-(\tilde\lambda+3\mu_2)\,q_{h_2(03)}+\tilde\lambda q_{h_2-1(03)}+\lambda p_{h_2-1(03)}+\mu_1 q_{h_2(12)}=0; \qquad (35)$$

$$-3\mu_1 q_{m+3(30)} + \tilde{\lambda} q_{m+2(30)} = 0\,, \tag{36}$$

$$-(2\mu_1 + \mu_2)\, q_{m+3(21)} + \tilde{\lambda} q_{m+2(21)} + 3\mu_1 q_{m+3(30)} = 0\,, \tag{37}$$

$$-(\mu_1 + 2\mu_2)\, q_{m+3(12)} + \tilde{\lambda} q_{m+2(12)} + 2\mu_1 q_{m+3(21)} = 0\,, \tag{38}$$

$$-3\mu_2 q_{m+3(03)} + \tilde{\lambda} q_{m+2(03)} + \mu_1 q_{m+3(12)} = 0\,; \tag{39}$$

$$p_0 + p_{1(10)} + p_{1(01)} + p_{2(20)} + p_{2(11)} + p_{2(02)} + \sum_{k=3}^{h_2-1} (p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)}) +$$
$$+ \sum_{k=h_1+1}^{m+3} (q_{k(30)} + q_{k(21)} + q_{k(12)} + q_{k(03)}) = 1\,. \tag{40}$$

Введя обозначения $\tilde{q}_{k(30)} = \dfrac{q_{k(30)}}{p_0}$, $\tilde{q}_{k(21)} = \dfrac{q_{k(21)}}{p_0}$, $\tilde{q}_{k(12)} = \dfrac{q_{k(12)}}{p_0}$, $\tilde{q}_{k(03)} = \dfrac{q_{k(03)}}{p_0}$, $h_1 + 1 \le k \le m+3$; $\tilde{p}_{2(20)} = p$, $\tilde{q}_{h_1+1(03)} = q$, $\tilde{q}_{h_1+1(21)} = r$, с помощью уравнений (27) получим равенства (8), а из уравнений (28) получаем рекуррентные соотношения:

$$\tilde{p}_{k(03)} = f_{03}(\tilde{p}_{k-1(12)},\ \tilde{p}_{k-2(12)}, \tilde{p}_{k-1(21)}),\ 4 \le k \le h_1,\ h_1 + 2 \le k \le h_2 - 1;$$
$$\tilde{p}_{k(12)} = f_{12}(\tilde{p}_{k(03)}, \tilde{p}_{k-1(03)}),\ 4 \le k \le h_2 - 1;$$
$$\tilde{p}_{k(30)} = f_{30}(\tilde{p}_{k(21)},\ \tilde{p}_{k-1(21)},\ \tilde{p}_{k+1(12)}),\ 3 \le k \le h_1 - 1,\ h_1 + 1 \le k \le h_2 - 2;$$
$$\tilde{p}_{k(21)} = f_{21}(\tilde{p}_{k-1(30)},\ \tilde{p}_{k-2(30)}),\ 4 \le k \le h_1,\ h_1 + 2 \le k \le h_2 - 1\,. \tag{41}$$

Используя уравнения (29), (33), (34) и (30), находим

$$\tilde{p}_{h_1+1(03)} = \frac{1}{3\eta}((\alpha_1 + 2\eta + 1)\tilde{p}_{h_1(12)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_1-1(12)} - 2\tilde{p}_{h_1(21)} - 3\eta q)\,,$$

$$\tilde{q}_{h_1+1(12)} = (\tilde{\alpha}_1 + 3\eta)\, q\,,\ \tilde{q}_{h_1+2(03)} = \frac{1}{3\eta}((\tilde{\alpha}_1 + 2\eta + 1)\tilde{q}_{h_1+1(12)} - 2r)\,,$$

$$\tilde{q}_{h_1+1(30)} = \frac{1}{3}((\tilde{\alpha}_1 + \eta + 2)r - 2\eta \tilde{q}_{h_1+2(12)})\,,\ \tilde{q}_{h_1+2(21)} = \frac{\tilde{\alpha}_1 + 3}{\eta} \tilde{q}_{h_1+1(30)}\,;$$

$$\tilde{q}_{k(03)} = g_{03}(\tilde{q}_{k-1(12)}, \tilde{q}_{k-2(12)}, \tilde{q}_{k-1(21)}),\ h_1 + 3 \le k \le h_2\,,\ h_2 + 2 \le k \le m+3\,;$$
$$\tilde{q}_{k(12)} = g_{12}(\tilde{q}_{k(03)}, \tilde{q}_{k-1(03)}),\ h_1 + 2 \le k \le h_2 - 1,\ h_2 + 1 \le k \le m+2\,;$$
$$\tilde{q}_{k(30)} = g_{30}(\tilde{q}_{k(21)}, \tilde{q}_{k-1(21)}, \tilde{q}_{k+1(12)}),\ h_1 + 2 \le k \le h_2 - 1,\ h_2 + 1 \le k \le m+2\,;$$
$$\tilde{q}_{k(21)} = g_{21}(\tilde{q}_{k-1(30)}, \tilde{q}_{k-2(30)}),\ h_1 + 3 \le k \le h_2\,,\ h_2 + 2 \le k \le m+3\,;$$
$$\tilde{p}_{h_1(30)} = \frac{1}{3}((\alpha_1 + \eta + 2)\tilde{p}_{h_1(21)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_1-1(21)} - 2\eta(\tilde{p}_{h_1+1(12)} + \tilde{q}_{h_1+1(12)}))\,,$$
$$\tilde{p}_{h_1+1(21)} = \frac{1}{\eta}((\alpha_1 + 3)\tilde{p}_{h_1(30)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_1-1(30)} - \eta r)\,,$$
$$\tilde{p}_{h_2-1(30)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 3} \tilde{p}_{h_2-2(30)}. \tag{42}$$

Уравнения (31) и (32) используем для определения q и r как функций параметра p.

Уравнения (35) позволяют найти

$$\tilde{q}_{h_2(12)} = (\tilde{\alpha}_1 + 3\eta)\tilde{q}_{h_2(03)} - \tilde{\alpha}_1 \tilde{q}_{h_2-1(03)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_2-1(03)},$$

$$\tilde{q}_{h_2+1(03)} = \frac{1}{3\eta}((\tilde{\alpha}_1 + 2\eta + 1)\tilde{q}_{h_2(12)} - \tilde{\alpha}_1 \tilde{q}_{h_2-1(12)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_2-1(12)} - 2\tilde{q}_{h_2(21)}),$$

$$\tilde{q}_{h_2(30)} = \frac{1}{3}((\tilde{\alpha}_1 + \eta + 2)\tilde{q}_{h_2(21)} - \tilde{\alpha}_1 \tilde{q}_{h_2-1(21)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_2-1(21)} - 2\eta \tilde{q}_{h_2+1(12)}),$$

$$\tilde{q}_{h_2+1(21)} = \frac{1}{\eta}((\tilde{\alpha}_1 + 3)\tilde{q}_{h_2(30)} - \tilde{\alpha}_1 \tilde{q}_{h_2-1(30)} - \alpha_1 \tilde{p}_{h_2-1(30)}). \tag{43}$$

С помощью уравнений (36) и (39) находим

$$\tilde{q}_{m+3(30)} = \frac{\tilde{\alpha}_1}{3}\tilde{q}_{m+2(30)}, \quad \tilde{q}_{m+3(12)} = 3\eta\tilde{q}_{m+3(03)} - \tilde{\alpha}_1 \tilde{q}_{m+2(03)}. \tag{44}$$

Для определения p можно использовать любое уравнение из (37) или (38), которые не были задействованы при получении рекуррентных соотношений (8), (41)–(44).

Вычислив $\tilde{p}_{1(10)}$, $\tilde{p}_{1(01)}$, $\tilde{p}_{2(20)}$, $\tilde{p}_{2(11)}$, $\tilde{p}_{2(02)}$, $\tilde{p}_{k(30)}$, $\tilde{p}_{k(21)}$, $\tilde{p}_{k(12)}$, $\tilde{p}_{k(03)}$ $(3 \le k \le h_2 - 1)$ и $\tilde{q}_{k(30)}$, $\tilde{q}_{k(21)}$, $\tilde{q}_{k(12)}$, $\tilde{q}_{k(03)}$ $(h_1 + 1 \le k \le m+3)$, используем условие нормировки (40) и определяем стационарные вероятности по формулам

$$\frac{1}{p_0} = 1 + \tilde{p}_{1(10)} + \tilde{p}_{1(01)} + \tilde{p}_{2(20)} + \tilde{p}_{2(11)} + \tilde{p}_{2(02)} +$$

$$+ \sum_{k=3}^{h_2-1}(\tilde{p}_{k(30)} + \tilde{p}_{k(21)} + \tilde{p}_{k(12)} + \tilde{p}_{k(03)}) + \sum_{k=h_1+1}^{m+3}(\tilde{q}_{k(30)} + \tilde{q}_{k(21)} + \tilde{q}_{k(12)} + \tilde{q}_{k(03)}),$$

$$p_{1(10)} = p_0 \tilde{p}_{1(10)}, \; p_{1(01)} = p_0 \tilde{p}_{1(01)},$$

$$p_{2(20)} = p_0 \tilde{p}_{2(20)}, \; p_{2(11)} = p_0 \tilde{p}_{2(11)}, \; p_{2(02)} = p_0 \tilde{p}_{2(02)};$$

$$p_{k(30)} = p_0 \tilde{p}_{k(30)}, \; p_{k(21)} = p_0 \tilde{p}_{k(21)},$$

$$p_{k(12)} = p_0 \tilde{p}_{k(12)}, \; p_{k(03)} = p_0 \tilde{p}_{k(03)}, \; 3 \le k \le h_2 - 1;$$

$$q_{k(30)} = p_0 \tilde{q}_{k(30)}, \; q_{k(21)} = p_0 \tilde{q}_{k(21)}, \; q_{k(12)} = p_0 \tilde{q}_{k(12)},$$

$$q_{k(03)} = p_0 \tilde{q}_{k(03)}, \; h_1 + 1 \le k \le m+3;$$

$$p_1 = p_{1(10)} + p_{1(01)}, \; p_2 = p_{2(20)} + p_{2(11)} + p_{2(02)};$$

$$p_k = p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)}, \; 3 \le k \le h_1;$$

$$p_k = p_{k(30)} + p_{k(21)} + p_{k(12)} + p_{k(03)} + q_{k(30)} + q_{k(21)} + q_{k(12)} + q_{k(03)},$$

$$h_1 + 1 \le k \le h_2 - 1;$$

$$p_k = q_{k(30)} + q_{k(21)} + q_{k(12)} + q_{k(03)}, \; h_2 \le k \le m+3,$$

стационарные характеристики определим с помощью соотношений (12) и (26).

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введем обозначения для изучаемых систем обслуживания: $M/E_2/3/m$ — система 1, $M/E_2/3/m$ с пороговой стратегией отбрасывания заявок — система 2, $M/E_2/3/m$ с гистерезисной стратегией отбрасывания заявок — система 3.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системах 1, 2, 3

k	Значения стационарных вероятностей					
	Система 1		Система 2		Система 3	
	Аналитический метод	GPSS World	Аналитический метод	GPSS World	Аналитический метод	GPSS World
0	0,0003718	0,0003690	0,0046475	0,0046937	0,0065451	0,0065176
1	0,0012677	0,0012655	0,0158447	0,0159103	0,0223141	0,0221934
2	0,0022356	0,0022407	0,0279424	0,0279344	0,0393512	0,0392150
3	0,0028596	0,0028710	0,0357421	0,0358872	0,0503346	0,0500952
4	0,0033687	0,0033664	0,0421063	0,0420468	0,0592782	0,0590472
5	0,0038643	0,0038866	0,0483004	0,0483449	0,0678376	0,0678943
6	0,0043925	0,0043778	0,0549023	0,0549268	0,0763351	0,0763595
7	0,0049771	0,0050369	0,0622032	0,0622650	0,0804879	0,0806314
8	0,0056333	0,0057032	0,0702716	0,0702991	0,0802692	0,0802828
9	0,0063736	0,0064304	0,0785496	0,0786224	0,0758206	0,0759420
10	0,0072102	0,0072604	0,0851141	0,0852581	0,0677364	0,0680337
11	0,0081563	0,0082217	0,0728891	0,0727306	0,0576159	0,0576970
12	0,0092263	0,0092235	0,0621187	0,0619221	0,0489700	0,0489956
13	0,0104367	0,0103952	0,0528377	0,0528104	0,0416089	0,0415515
14	0,0118058	0,0117802	0,0449090	0,0449135	0,0353502	0,0352902
15	0,0133545	0,0133544	0,0381584	0,0380369	0,0300314	0,0299448
16	0,0151064	0,0151007	0,0324187	0,0324290	0,0255125	0,0254516
17	0,0170881	0,0170966	0,0275411	0,0275915	0,0216734	0,0216396
18	0,0193298	0,0194358	0,0233968	0,0232761	0,0184119	0,0183894
19	0,0218655	0,0219131	0,0198761	0,0197608	0,0156412	0,0156676
20	0,0247339	0,0247589	0,0168851	0,0168896	0,0132875	0,0133403
21	0,0279786	0,0280233	0,0143442	0,0143295	0,0112879	0,0113239
22	0,0316489	0,0317223	0,0121856	0,0120905	0,0095893	0,0096095
23	0,0358007	0,0356343	0,0103519	0,0103858	0,0081462	0,0081420
24	0,0404972	0,0404747	0,0087941	0,0087654	0,0069204	0,0069195
25	0,0458097	0,0456111	0,0074707	0,0074662	0,0058790	0,0058977
26	0,0518191	0,0516767	0,0063465	0,0063719	0,0049943	0,0050328
27	0,0586169	0,0585509	0,0053914	0,0054271	0,0042427	0,0042455
28	0,0663064	0,0662775	0,0045801	0,0046013	0,0036042	0,0036145
29	0,0750023	0,0750995	0,0038908	0,0039280	0,0030618	0,0030822
30	0,0847907	0,0848442	0,0033043	0,0033484	0,0026003	0,0026252
31	0,0948181	0,0947907	0,0027880	0,0028050	0,0021940	0,0021992
32	0,1005607	0,1005137	0,0022647	0,0023009	0,0017822	0,0013127
33	0,0926928	0,0926930	0,0016330	0,0016307	0,0012850	0,0018156

Для всех систем положим $\lambda = \frac{11}{5}$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $m = 30$. Пусть $\beta = 0{,}8$ для систем с отбрасыванием заявок, $h = 10$ для системы 2; $h_1 = 5$, $h_2 = 10$ для системы 3.

Приведем значения вспомогательных параметров, полученные в процессе вычислений: $p = 2{,}8397891$ для систем 1 и 2, $q = 1762{,}6508223 - 620{,}6767253\,p$, $r = -40650{,}6682864 + 14315{,}1632498\,p$, $p = 2{,}8397807$ для системы 3.

Значения стационарных вероятностей p_k и стационарных характеристик систем 1–3, найденные с использованием рекуррентных соотношений, полученных в настоящей статье, представлены в табл. 1 и 2. В целях проверки найденных значений в таблицах приведены также результаты вычислений с помощью имитационных моделей изучаемых систем обслуживания, построенных с привлечением инструментальных средств GPSS World [10, 11] (значение времени

Таблица 2. Стационарные характеристики систем 1, 2, 3

Номер системы	Метод	Значения стационарных характеристик		
		E(Q)	E(W)	P_{sv}
1	Аналитический	22,7266015	11,3856408	0,9073072
	GPSS World	22,721	11,384	0,9071715
2	Аналитический	8,1749360	4,1902326	0,8867956
	GPSS World	8,173	4,189	0,8869153
3	Аналитический	6,9619718	3,6055138	0,8776926
	GPSS World	6,969	3,610	0,8775801

моделирования $t=10^7$). При сравнении значений характеристик рассматриваемых систем, полученных с помощью GPSS World для различных значений времени моделирования t, видно, что значение $t=10^7$ соответствует практически достигнутому стационарному режиму функционирования системы. Для моделирования показательных распределений использованы библиотечные генераторы случайных чисел № 10 для систем 1 и 3 и № 99 — для системы 2.

Анализируя результаты, представленные в табл. 2, видим, что управление интенсивностью входящего потока путем случайного отбрасывания заявок позволяет значительно уменьшить среднюю длину очереди при незначительном снижении пропускной способности системы. Уменьшение средней длины очереди в системах 2 и 3 по сравнению с системой 1 составляет 64,0% и 69,4% соответственно при снижении относительной пропускной способности на 2,3% и 3,3%. Использование гистерезисной стратегии в целях уменьшения длины очереди более эффективно по сравнению с пороговой стратегией. Так, уменьшение средней длины очереди в системе 3 по сравнению с системой 2 составляет 14,8% при снижении относительной пропускной способности всего на 1,0%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в настоящей работе алгоритм численного решения системы линейных алгебраических уравнений для стационарных вероятностей построен с учетом особенностей структуры этой системы, в частности наличия трех или четырех неизвестных в большинстве ее уравнений. Полученные нами рекуррентные соотношения служат для прямого вычисления решений системы, что позволяет сократить объем вычислений по сравнению с прямым или итерационным классическим методом. Прямые методы предполагают выполнение преобразований подготовительного характера над матрицей системы, и только на втором этапе вычислений последовательно определяются решения. При использовании итерационных методов также выполняются предварительные преобразования и вычисления проводятся многократно до тех пор, пока не будет найдено решение с заданной точностью.

Рекуррентные соотношения, полученные в данной работе, в отличие от выведенных в [9] для системы M/E_2/2/m, содержат вспомогательный параметр $p=\tilde{p}_{2(20)}$, который определяется на конечной стадии вычислений. Введение этого параметра обусловлено более сложной структурой первых уравнений системы для стационарных вероятностей трехканальной системы обслуживания по сравнению с двухканальной. При получении рекуррентных соотношений, используемых при вычислении стационарных вероятностей для системы M/E_2/3/m с гистерезисной стратегией случайного отбрасывания заявок, возникла необходимость дополнительно использовать два вспомогательных параметра (q и r). В случае двухканальной системы использовался один параметр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. Москва: РУДН, 1995. 529 с.
2. Brockmeyer E., Halstrøm H.L., Jensen A. The life and works of A. K. Erlang. Copenhagen: Danish Academy of Technical Sciences, 1948. 275 p.
3. Chydziński A. Nowe modele kolejkowe dla węzłów sieci pakietowych. Gliwice: Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2013. 286 s.
4. Tikhonenko O., Kempa W.M. Queue-size distribution in M/G/1-type system with bounded capacity and packet dropping. *Communications in Computer and Information Science.* 2013. Vol. 356. P. 177–186.
5. Kempa W.M. A direct approach to transient queue-size distribution in a finite-buffer queue with AQM. *Applied Mathematics and Information Sciences.* 2013. Vol. 7, N 3. P. 909–915.
6. Zhernovyi Yu., Kopytko B., Zhernovyi K. On characteristics of the $M^{\theta}/G/1/m$ and $M^{\theta}/G/1$ queues with queue-size based packet dropping. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2014. Vol. 13, N 4. P. 163–175.
7. Жерновый Ю.В., Жерновый К.Ю. Метод потенциалов для систем типа M/G/1/m с пороговыми стратегиями функционирования. *Кибернетика и системный анализ.* 2016. Т. 52, № 3. С. 170–181.
8. Zhernovyi Yu., Kopytko B. The potentials method for the M/G/1/m queue with customer dropping and hysteretic strategy of the service time change. *J. of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2016. Vol. 15, N 1. P. 197–210.
9. Жерновый К.Ю. Определение стационарных характеристик двухканальных систем с эрланговским распределением времени обслуживания. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 1. С. 108–121.
10. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. С.-Петербург: БХВ-Петербург, 2004. 368 с.
11. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 13.06.2016

Ю.В. Жерновий, К.Ю. Жерновий

ВИЗНАЧЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИКАНАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЕРЛАНГІВСЬКИМ РОЗПОДІЛОМ ЧАСУ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Анотація. Запропоновано метод дослідження систем обслуговування $M/E_2/3/m$: стандартної системи та систем з пороговою і гістерезисною стратегіями випадкового відкидання замовлень з метою управління вхідним потоком. Отримано рекурентні співвідношення для обчислення стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Побудовані алгоритми перевірено на прикладах з використанням імітаційних моделей, створених за допомогою інструментальних засобів GPSS World.

Ключові слова: триканальна система обслуговування, найпростіший вхідний потік, ерлангівський розподіл часу обслуговування, випадкове відкидання замовлень, метод фіктивних фаз, рекурентні співвідношення.

Yu.V. Zhernovyi, K.Yu. Zhernovyi

DETERMINATION OF STEADY-STATE CHARACTERISTICS OF THREE-CHANNEL QUEUEING SYSTEMS WITH ERLANGIAN SERVICE TIMES

Abstract. We propose a method to analyze $M/E_2/3/m$ queueing systems: standard system and systems with the threshold and hysteretic strategies of random dropping of customers in order to control the input flow. We obtain recurrence relations to compute the stationary distribution of the number of customers and the steady-state characteristics. The developed algorithms are tested on the examples using simulation models constructed with the assistance of the GPSS World tools.

Keywords: three-channel queueing system, Poisson input, Erlangian service times, random dropping of customers, fictitious phase method, recurrence relations.

Жерновый Юрий Васильевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского национального университета имени Ивана Франко, e-mail: yu.zhernovyi@lnu.edu.ua.

Жерновый Константин Юрьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент Львовского учебно-научного Института «Університет банківської справи», e-mail: k.zhernovyi@yahoo.com.