УДК 517.988

В.В. СЕМЁНОВ

ВАРИАНТ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

Аннотация. Метод зеркального спуска был предложен в конце 70-х годов XX в. для задач выпуклой оптимизации. Он используется для решения задач очень больших размерностей. Описан новый вариант этого метода для решения вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами. Его можно проинтерпретировать как модификацию двухэтапного алгоритма Попова с использованием проектирования на допустимое множество в смысле расстояния Брэгмана. Доказана теорема сходимости метода.

Ключевые слова: вариационное неравенство, псевдомонотонность, расстояние Брэгмана, расстояние Кульбака–Лейблера, метод зеркального спуска, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Многие интересные и актуальные задачи исследования операций и математической физики можно записать в форме вариационных неравенств. Решение последних является активно развивающимся направлением прикладного нелинейного анализа [1–16]. К настоящему времени разработано достаточно методов решения вариационных неравенств, в частности проекционного типа, т.е. использующих метрическое проектирование на допустимое множество [1, 5, 7, 8]. Известно, что в задачах поиска седловой точки или равновесия Нэша для сходимости наиболее простого проекционного метода необходимо выполнение усиленных условий монотонности [1]. В случае их невыполнения используют несколько подходов, один из которых состоит в регуляризации исходной задачи с целью придать ей требуемое свойство. Сходимость без модификации задачи обеспечивается в итерационных методах экстраградиентного типа, впервые предложенных Г.М. Корпелевич [5] для неравенств с липшицевыми операторами. Позднее в [6] был рассмотрен метод с динамической регулировкой величины шага, не требующий знания постоянной Липшица оператора неравенства, вследствие чего значительно расширилась область потенциального применения идеи, изложенной в [5]. Исследование этих методов проводилось во многих работах [7–13]. В частности, предлагались модификации алгоритма Корпелевич с одним метрическим проектированием на допустимое множество [8, 9, 12, 13]. В так называемых субградиентных экстраградиентных алгоритмах и алгоритме Корпелевич первые этапы итерации совпадают, а далее для получения следующего приближения вместо проектирования на допустимое множество осуществляют проектирование на некоторое опорное для допустимого множества полупространство. В начале 80-х годов прошлого века была предложена интересная модификация алгоритма Эрроу–Гурвица поиска седловых точек выпукло-вогнутых функций [14]. В недавних работах исследовано несколько модификаций метода Л.Д. Попова для решения вариационных неравенств с монотонными операторами [15, 16]. В статье [17] предложен двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задач равновесного программирования, являющийся адаптацией метода [14] к общим неравенствам Ки Фаня.

[1]Исследование выполнено при поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», 0116U004777).

Во всех упомянутых выше методах использовались евклидовы расстояние и проекция, что не позволяет учесть структуру допустимых множеств и эффективно решать задачи. Возможный выход из ситуации состоит в более гибком подборе расстояния для осуществления проектирования на допустимое множество. Одной из первых успешных реализаций такой стратегии является работа [18], где предложен метод типа циклического проектирования для нахождения общей точки выпуклых множеств. Эта публикация открыла целое направление в математическом программировании и нелинейном анализе.

Метод зеркального спуска, предложенный в конце 70-х годов прошлого века советскими математиками А.С. Немировским и Д.Б. Юдиным для решении выпуклых задач оптимизации [19], впоследствии получил широкое распространение для решения задач больших размерностей [20–23]. В случае задач с ограничениями его можно проинтерпретировать как вариант метода проекции субградиента, когда проектирование понимается в смысле расстояния Брэгмана [21]. Метод зеркального спуска позволяет учитывать структуру допустимого множества задачи оптимизации. Например, для симплекса в качестве расстояния можно использовать расстояние Кульбака–Лейблера (расстояние Брэгмана, построенное по отрицательной энтропии) и получить явно вычисляемый оператор проектирования на симплекс [21]. В работах [24–28] исследовались версии этого метода для решения вариационных неравенств и седлових задач, построенные на основе экстраградиентного алгоритма Корпелевич, в том числе и стохастические [27, 28].

Настоящая работа посвящена изучению нового варианта метода зеркального спуска для решения вариационных неравенств с липшицевыми и псевдомонотонными операторами, построенного на основе двухэтапного алгоритма Попова [14, 15].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Всюду далее используем конечномерное действительное линейное пространство, обозначаемое E. В этом пространстве рассмотрим норму $||\cdot||$ (не обязательно евклидову). Двойственное пространство обозначим E^*. Для $a \in E^*$ и $b \in E$ обозначим (a, b) значение линейной функции a в точке b. Двойственную норму $||\cdot||_*$ на E^* определяем стандартным способом: $||a||_* = \max\{(a, b): ||b|| = 1\}$, обеспечивающим выполнение неравенства Шварца $(a, b) \le ||a||_* \, ||b||$ для всех $a \in E^*$, $b \in E$. Наиболее важным является случай $E = E^* = \mathbb{R}^m$ с $(a, b) = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$, $a, \ b \in \mathbb{R}^m$.

Пусть C — непустое подмножество пространства E, A — оператор, действующий из E в E^*. Рассмотрим вариационное неравенство: найти

$$x \in C: \ (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall \, y \in C, \tag{1}$$

множество решений которого обозначим S.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое;
- оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L > 0$ на C;
- множество S не пусто.

Замечание 1. Напомним, что псевдомонотонность оператора A на множестве C заключается в том, что для всех x, $y \in C$ из $(Ax, y - x) \ge 0$ следует $(Ay, y - x) \ge 0$ [1]. В случае $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ это означает, что если $f(x) = 0$ для некоторой точки $x \in \mathbb{R}$, то $f(y) \le 0$ при $y \le x$ и $f(y) \ge 0$ при $y \ge x$.

Рассмотрим так называемое дуальное вариационное неравенство [1]: найти

$$x \in C\colon \ (Ay, y-x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{2}$$

Множество решений (2) обозначим S^d. Неравенство (2) иногда называют слабой или дуальной постановкой (1), а решения (2) — слабыми решениями (1) [1]. Действительно, при псевдомонотонности A имеем $S \subseteq S^d$. При рассматриваемых условиях $S^d = S$. В частности, множество S выпуклое и замкнутое [1].

Введем необходимые для формулировки алгоритма конструкции. Пусть функция $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет следующим условиям [27]:

- φ непрерывна и выпукла на C; в частности, множество $C^0 = \{x \in C\colon \partial\varphi(x) \ne \varnothing\}$ не пусто;
- φ регулярна на C^0, т.е. у субдифференциала $\partial\varphi$ на множестве C^0 есть непрерывный селектор $\nabla\varphi$;
- φ сильно выпукла относительно выбранной нормы $\|\cdot\|$ с константой сильной выпуклости $\sigma > 0$:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) + \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \ \ \forall\, a \in C, \ b \in C^0.$$

Замечание 2. Такие функции называют distance generating functions [27].

Задача

$$(a, y) + \varphi(y) \to \min_{y \in C}, \ \ a \in E^*,$$

имеет единственное решение y_a, лежащее в C^0, причем

$$(a + \nabla\varphi(y_a), y - y_a) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C.$$

Соответствующее φ расстояние Брэгмана на множестве C задается формулой

$$d(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) \ \ \forall\, a \in C, \ b \in C^0.$$

Рассмотрим два основных примера. При $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, где $\|\cdot\|_2$ — евклидова норма, имеем $d(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2$. Для стандартного симплекса $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$ и отрицательной энтропии Больцмана–Шеннона $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$ (она сильно выпукла относительно ℓ_1-нормы на S_m) получаем расстояние Кульбака–Лейблера

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln\frac{x_i}{y_i}, \ \ x \in S_m, \ \ y \in \operatorname{ri}(S_m).$$

Имеет место полезное 3-точечное тождество [21]

$$d(a,c) = d(a,b) + d(b,c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a-b). \tag{3}$$

Из сильной выпуклости φ следует оценка

$$d(a,b) \ge \frac{\sigma}{2}\|a-b\|^2 \ \ \forall\, a \in C, \ b \in C^0. \tag{4}$$

Предположим, что существует возможность эффективно решать сильно выпуклые задачи минимизации вида

$$\pi_x(a) = \arg\min_{y \in C} \{-(a, y-x) + d(y,x)\} \ \ \forall a \in E^*, \ x \in C^0.$$

Точка $\pi_x(a)$ в евклидовом случае совпадает с евклидовой метрической проекцией

$$P_C(x+a) = \arg\min_{y \in C} \| y-(x+a)\|_2.$$

Для случая симплекса S_m и расстояния Кульбака–Лейблера имеем [21]

$$\pi_x(a) = \left(\frac{x_1 e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2 e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ldots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}} \right), \ a \in \mathbb{R}^m, \ x \in \mathrm{ri}(S_m).$$

Замечание 3. В работах [22, 23] для $\pi_x(a)$ принято обозначение $\mathrm{Mirr}_x(a)$. Оператор $\pi_x : E^* \to C^0$ называют прокс-отображением [27].

ВАРИАНТ МЕТОДА ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА

Опишем вариант метода зеркального спуска для задачи (1).

Алгоритм 1

Начиная с $x_1 \in C^0$, $y_1 \in C$ генерируем последовательность элементов x_n, y_n с помощью итерационной схемы

$$x_{n+1} = \pi_{x_n}(-\lambda A y_n), \ \ y_{n+1} = \pi_{x_{n+1}}(-\lambda A y_n),$$

где $\lambda > 0$.

Правило выбора параметра регуляризации λ сформулируем ниже.

Замечание 4. Если $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 принимает такой вид [14, 15, 17]:

$$\begin{cases} x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \\ y_{n+1} = P_C(x_{n+1} - \lambda A y_n). \end{cases}$$

Заметим, что при выполнении для некоторого $n \in \mathbb{N}$ равенств

$$x_{n+1} = x_n = y_n \tag{5}$$

имеет место включение $y_n \in S$ и условие стационарности $x_k = y_k = y_n$ для $k \ge n$. Действительно, равенство $x_{n+1} = \pi_{x_n}(-\lambda A y_n)$ означает

$$(Ay_n, y - x_{n+1}) + \frac{(\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), y - x_{n+1})}{\lambda} \ge 0 \ \ \forall y \in C.$$

Из (5) следует $(Ay_n, y - y_n) \ge 0 \ \forall y \in C$, т.е. $y_n \in S$.

С учетом этого соображения практическому варианту алгоритма 1 можно придать следующий вид.

Алгоритм 2

Шаг 0. Задаем $x_1 \in C^0$, $y_1 \in C$, $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$.

Шаг 1. Для x_n и y_n вычисляем

$$x_{n+1} = \pi_{x_n}(-\lambda A y_n) = \arg\min_{y \in C} \{\lambda(Ay_n, y - x_n) + d(y, x_n)\}.$$

Шаг 2. Если $\max\{\|x_{n+1} - x_n\|, \|x_n - y_n\|\} \le \varepsilon$, то СТОП, иначе вычисляем

$$y_{n+1} = \pi_{x_{n+1}}(-\lambda A y_n) = \arg\min_{y \in C} \{\lambda(Ay_n, y - x_{n+1}) + d(y, x_{n+1})\}.$$

Шаг 3. Полагаем $n = n+1$ и переходим на шаг 1.

Замечание 5. Можно также использовать условие $\max\{d(x_{n+1}, x_n), d(y_n, x_n)\} \le \varepsilon$.

Далее будем предполагать, что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ условие (5) не имеет места, и перейдем к обоснованию сходимости алгоритма 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ МЕТОДА

Для доказательства сходимости метода используем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть (a_n), (b_n) — последовательности неотрицательных чисел, удовлетворяющих неравенству $a_{n+1} \le a_n - b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Получим важную оценку, описывающую поведение расстояния Брэгмана между порожденной алгоритмом точкой x_n и произвольным элементом множества S.

Лемма 2. Для последовательностей (x_n), (y_n), порожденных алгоритмом, имеет место неравенство

$$d(z, x_{n+1}) \le d(z, x_n) - \left(1 - (1+\sqrt{2})\frac{\lambda L}{\sigma}\right) d(y_n, x_n) -$$

$$-\left(1 - \sqrt{2}\frac{\lambda L}{\sigma}\right) d(x_{n+1}, y_n) + \frac{\lambda L}{\sigma} d(x_n, y_{n-1}), \tag{6}$$

где $z \in S$.

Доказательство. Дважды применив тождество (3), получим

$$d(z, x_{n+1}) = d(z, x_n) - d(x_{n+1}, x_n) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - z) =$$
$$= d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) - (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n) +$$
$$+ (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - z). \tag{7}$$

Из определения точек x_{n+1} и y_n следуют неравенства

$$\lambda(Ay_n, z - x_{n+1}) + (\nabla\varphi(x_{n+1}) - \nabla\varphi(x_n), z - x_{n+1}) \ge 0, \tag{8}$$

$$\lambda(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (\nabla\varphi(y_n) - \nabla\varphi(x_n), x_{n+1} - y_n) \ge 0. \tag{9}$$

Используя (8), (9) для оценки скалярных произведений в (7), получаем

$$d(z, x_{n+1}) \le d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) +$$
$$+\lambda\{(Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, z - x_{n+1})\} =$$
$$= d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) +$$
$$+\lambda\{(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) + (Ay_n, z - y_n)\}. \tag{10}$$

Из псевдомонотонности A следует $(Ay_n, z - y_n) \le 0$. Используя эту оценку в (10), получаем

$$d(z, x_{n+1}) \le d(z, x_n) - d(x_{n+1}, y_n) - d(y_n, x_n) + \lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n). \tag{11}$$

Теперь оценим слагаемое $\lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)$. Имеем

$$\lambda(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le \lambda \| Ay_{n-1} - Ay_n \|_* \| x_{n+1} - y_n \| \le$$

$$\le \lambda L\|y_{n-1}-y_n\|\|x_{n+1}-y_n\| \le \lambda L\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\|y_{n-1}-y_n\|^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\|x_{n+1}-y_n\|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\lambda L}{2\sqrt{2}}\{\sqrt{2}\|y_{n-1}-x_n\|^2+(2+\sqrt{2})\|x_n-y_n\|^2\}+\frac{\lambda L}{\sqrt{2}}\|x_{n+1}-y_n\|^2=$$

$$=\frac{\lambda L}{2}\|y_{n-1}-x_n\|^2+\lambda L\frac{1+\sqrt{2}}{2}\|x_n-y_n\|^2+\frac{\lambda L}{\sqrt{2}}\|x_{n+1}-y_n\|^2. \qquad (12)$$

В данном соотношении использовали элементарные неравенства

$$ab \le \frac{\varepsilon^2}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}b^2,\ (a+b)^2 \le \sqrt{2}a^2+(2+\sqrt{2})b^2.$$

Оценив нормы в (12) с помощью неравенства (4), получим

$$\lambda(Ay_{n-1}-Ay_n, x_{n+1}-y_n) \le \frac{\lambda L}{\sigma}d(x_n, y_{n-1})+$$

$$+\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})d(y_n, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}\sqrt{2}d(x_{n+1}, y_n). \qquad (13)$$

Применив (13) в (11), имеем

$$d(z, x_{n+1}) \le d(z, x_n)-d(x_{n+1}, y_n)-d(y_n, x_n)+$$

$$+\frac{\lambda L}{\sigma}d(x_n, y_{n-1})+\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})d(y_n, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}\sqrt{2}d(x_{n+1}, y_n) \le$$

$$\le d(z, x_n)-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}\sqrt{2}\right)d(x_{n+1}, y_n)-\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)d(y_n, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}d(x_n, y_{n-1}),$$

что и требовалось доказать. ■

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. Пусть множество $C \subseteq E$ выпуклое и замкнутое, оператор $A: E \to E^*$ псевдомонотонный и липшицевый с константой $L>0$, $S \ne \varnothing$ и $\lambda \in \left(0, (\sqrt{2}-1)\frac{\sigma}{L}\right)$. Тогда последовательности (x_n) и (y_n), порожденные алгоритмом 1, сходятся к некоторой точке $\bar{z} \in S$.

Доказательство. Пусть $z \in S$. Положим

$$a_n = d(z, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}d(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n = \left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)(d(y_n, x_n)+d(x_{n+1}, y_n)).$$

Неравенство (6) принимает вид $a_{n+1} \le a_n - b_n$. Тогда из леммы 1 можем сделать вывод, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(d(z, x_n)+\frac{\lambda L}{\sigma}d(x_n, y_{n-1})\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda L}{\sigma}(1+\sqrt{2})\right)(d(y_n, x_n)+d(x_{n+1}, y_n))<+\infty.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = 0 \tag{14}$$

и сходимость числовой последовательности $(d(z, x_n))$ для всех $z \in S$. Из (14) следует

$$\lim_{n\to\infty} || y_n - x_n || = \lim_{n\to\infty} || x_{n+1} - y_n || = 0, \tag{15}$$

а также

$$\lim_{n\to\infty} || x_{n+1} - x_n || = 0. \tag{16}$$

Из неравенства $d(z, x_n) \ge \frac{\sigma}{2} || z - x_n ||^2$ и (16) вытекает ограниченность последовательностей (x_n), (y_n).

Рассмотрим подпоследовательность (x_{n_k}), сходящуюся к некоторой точке $\bar{z} \in C$. Тогда из (15) следует $y_{n_k} \to \bar{z}$ и $x_{n_k+1} \to \bar{z}$. Покажем, что $\bar{z} \in S$. Имеем

$$(Ay_{n_k}, y - x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda}(\nabla\varphi(x_{n_k+1}) - \nabla\varphi(x_{n_k}), y - x_{n_k+1}) \ge 0 \quad \forall\, y \in C. \tag{17}$$

Выполнив в (17) предельный переход с учетом (15), (16), получим $(A\bar{z}, y - \bar{z}) \ge 0 \ \ \forall\, y \in C$, т.е. $\bar{z} \in C$.

Покажем, что $x_n \to \bar{z}$ (тогда из $|| x_n - y_n || \to 0$ следует $y_n \to \bar{z}$). Известно, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} d(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla\varphi(x_n), \bar{z} - x_n)).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} d(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, имеем $\lim_{n\to\infty} d(\bar{z}, x_n) = 0$. Отсюда $|| x_n - \bar{z} || \to 0$. ■

Замечание 6. Асимптотики (14) и (15) можно уточнить до следующих соотношений:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, n d(y_n, x_n) = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, n d(x_{n+1}, y_n) = 0, \tag{18}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt{n} || y_n - x_n || = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt{n} || x_{n+1} - y_n || = 0. \tag{19}$$

Действительно, если (18) не выполняется, то $d(y_n, x_n) + d(x_{n+1}, y_n) \ge \mu n^{-1}$ для некоторого $\mu > 0$ и всех достаточно больших номеров *n*. Следовательно, ряд $\sum_n (d(y_n, x_n) + d(x_{n+1}, y_n))$ расходится. Получили противоречие. Формула (19) непосредственно следует из (18).

Замечание 7. Если $\sigma = 1$, то можно использовать схему

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pi_{x_n}\left(-\dfrac{1}{3L} Ay_n\right), \\ y_{n+1} = \pi_{x_{n+1}}\left(-\dfrac{1}{3L} Ay_n\right). \end{cases}$$

Приведем несколько конкретных версий алгоритма 1.

Рассмотрим вариационное неравенство на стандартном симплексе: найти

$$x \in S_m: \ (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall\, y \in S_m.$$

Выбирая расстояние Кульбака–Лейблера, получаем следующую версию алгоритма:

$$x_i^{n+1}=\frac{x_i^n\exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^n\exp(-\lambda(Ay_n)_j)},\ i=1,\ldots,m,$$

$$y_i^{n+1}=\frac{x_i^{n+1}\exp(-\lambda(Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^{n+1}\exp(-\lambda(Ay_n)_j)},\ i=1,\ldots,m,$$

где $(Ay_n)_i\in\mathbb{R}$ — i-я координата вектора $Ay_n\in\mathbb{R}^m$, $\lambda>0$.

В транспортных приложениях [29], машинном обучении и теории игр используют вариационные неравенства на прямых произведениях масштабированных симплексов

$$C=\prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}\subseteq\mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k},$$

где $r_k S_{m_k}=\{x\in\mathbb{R}^{m_k}:\ x_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{m_k}x_i=r_k\}$, $r_k>0$, т.е. задачи: найти

$$x\in\prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}:\ (Ax,\, y-x)\ge 0\ \ \forall\, y\in\prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}. \tag{20}$$

По сепарабельной функции

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^p\varphi_k(x_k)=\sum_{k=1}^p\sum_{i=1}^{m_k}\frac{x_{k,i}}{r_k}\ln\frac{x_{k,i}}{r_k},$$

где $x=(x_1,\ldots,x_p)=\left(\underbrace{x_{1,1},x_{1,2},\ldots,x_{1,m_1}}_{x_1},\ldots,\underbrace{x_{p,1},x_{p,2},\ldots,x_{p,m_p}}_{x_1}\right)\in\mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k}$, построим расстояние Брэгмана на $\prod_{k=1}^p r_k S_{m_k}$:

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^p d_k(x_k,y_k)=\sum_{k=1}^p\sum_{i=1}^{m_k}\frac{x_{k,i}}{r_k}\ln\frac{x_{k,i}}{y_{k,i}}.$$

Алгоритм 1 для неравенства (20) с таким расстоянием принимает вид

$$x_{k,i}^{n+1}=r_k\frac{x_{k,i}^n\exp(-\lambda r_k(Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k}x_{k,j}^n\exp(-\lambda r_k(Ay_n)_{k,j})},\ k=1,\ldots,p,\ i=1,\ldots,m_k,$$

$$y_{k,i}^{n+1}=r_k\frac{x_{k,i}^{n+1}\exp(-\lambda r_k(Ay_n)_{k,i})}{\sum_{j=1}^{m_k}x_{k,j}^{n+1}\exp(-\lambda r_k(Ay_n)_{k,j})},\ k=1,\ldots,p,\ i=1,\ldots,m_k,$$

где $(Ay_n)_{k,i}$ является координатой с номером $\sum_{t=1}^{k-1}m_t+i$ вектора $Ay_n\in\mathbb{R}^{\sum_{k=1}^p m_k}$, $\lambda>0$.

Рассмотрим гладкую задачу выпуклой минимизации

$$f(x) \to \min, \ x \in C, \ g_k(x) \le 0, \ k = 1, \dots, p,$$

где $C \subseteq E$ — выпуклое замкнутое множество, f, g_k — выпуклые дифференцируемые функции. Введем функцию Лагранжа $L(x, y) = f(x) + \sum_{k=1}^{p} y_k g_k(x)$ и рассмотрим седловую задачу: найти

$$x' \in C, \ y' \in \mathbb{R}_+^p: \ L(x, y') \le L(x', y') \le L(x', y) \ \ \forall x \in C, \ \forall y \in \mathbb{R}_+^p. \tag{21}$$

Задача (21) равносильна вариационному неравенству

$$\left(\nabla f(x') + \sum_{k=1}^{p} y_k' \nabla g_k(x'), x - x' \right) - \sum_{k=1}^{p} g_k(x')(y_k - y_k') \ge 0 \ \ \forall x \in C, \ \forall y \in \mathbb{R}_+^p. \tag{22}$$

Для решения (22) выпишем итерационный процесс:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \pi_{x_n}\left(-\lambda \left\{ \nabla f(\bar{x}_n) + \sum_{k=1}^{p} \bar{y}_k^n \nabla g_k(\bar{x}_n) \right\} \right), \\ y_{n+1} = [y_n + \lambda g(\bar{x}_n)]_+, \\ \bar{x}_{n+1} = \pi_{x_{n+1}}\left(-\lambda \left\{ \nabla f(\bar{x}_n) + \sum_{k=1}^{p} \bar{y}_k^n \nabla g_k(\bar{x}_n) \right\} \right), \\ \bar{y}_{n+1} = [y_{n+1} + \lambda g(\bar{x}_n)]_+, \end{cases}$$

где $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_p(x))$, $[\cdot]_+$ — евклидова проекция на неотрицательный ортант $\mathbb{R}_+^p$, $\pi_x : E^* \to C^0$ — прокс-отображение, построенное по некоторому брэгмановскому расстоянию d на C.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый вариант метода зеркального спуска для решения вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами. Его можно проинтерпретировать как модификацию двухэтапного алгоритма Попова с использованием проектирования на допустимое множество в смысле расстояния Брэгмана. Как и другие схемы зеркального спуска, приведенный метод позволяет эффективно учесть структуру допустимого множества задачи. Основной теоретический результат состоит в доказанной теореме о сходимости метода.

Очевидным недостатком алгоритма 1 является предположение о том, что константа Липшица оператора известна или допускает простую оценку. Кроме того, в определенных задачах операторы могут не удовлетворять глобальному условию Липшица (заметим, что в большинстве работ по алгоритмам решения вариационных неравенств рассматриваются именно липшицевы операторы). Важно предложить модификацию алгоритма 1 с динамической регулировкой величины шага для вариационных неравенств с нелипшицевым оператором и исследовать ее сходимость.

Далее планируется рассмотреть рандомизированную версию алгоритма 1 и провести соответствующий анализ сходимости, что позволит расширить использование данного варианта метода зеркального спуска для решения вариационных неравенств очень большого размера (huge size). Рандомизированные версии метода зеркального спуска, построенного на основе экстраградиентного алгоритма Корпелевич, изучались в [27, 28]. Также представляет интерес получение подобных результатов для задач равновесного программирования [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2001. 181 p.
2. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141–146.
3. Семенов В.В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации. *Проблемы управления и информатики*. 2010. № 2. С. 42–46.
4. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. M.Z. Zgurovsky and V.A. Sadovnichiy (Eds.). Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and its Applications. Vol. 211. New York; Heidelberg: Springer Intern. Publ. (Switzerland). 2014. P. 131–146.
5. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. *Экономика и математические методы*. 1976. Т. 12, № 4. С. 747–756.
6. Хоботов Е.Н. О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 1987. Т. 27, № 10. С. 1462–1473.
7. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Optimization*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
8. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 148. P. 318–335.
9. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 146–154.
10. Семенов В.В. Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 3. С. 22–32.
11. Семенов В.В. Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 5. С. 104–112.
12. Верлань Д.А., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 4. С. 37–50.
13. Денисов С.В., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сходимость модифицированного экстраградиентного метода для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. № 5. С. 102–110.
14. Попов Л.Д. Модификация метода Эрроу–Гурвица поиска седловых точек. *Математические заметки*. 1980. Т. 28, № 5. С. 777–784.
15. Малицкий Ю.В., Семенов В.В. Вариант экстраградиентного алгоритма для монотонных вариационных неравенств. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. № 2. С. 125–131.
16. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. A hybrid method without extrapolation step for solving variational inequality problems. *Journal of Global Optimization*. 2015. Vol. 61, Iss. 1. P. 193–202.
17. Ведель Я.И., Семенов В.В. Новый двухэтапный проксимальный алгоритм для решения задачи о равновесии. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2015. № 1 (118). С. 15–23.
18. Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 1967. Т. 7, № 3. С. 620–631.
19. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. Москва: Наука, 1979. 384 с.

20. Ben-Tal A., Margalit T., Nemirovski A. The ordered subsets mirror descent optimization method with applications to tomography. *SIAM Journal on Optimization*. 2001. Vol. 12. P. 79–108.

21. Beck A., Teboulle M. Mirror descent and nonlinear projected subgradient methods for convex optimization. *Operations Research Letters*. 2003. Vol. 31, N 3. P. 167–175.

22. Allen-Zhu Z., Orecchia L. Linear coupling: An ultimate unification of gradient and mirror descent. e-print, 2014. arXiv:1407.1537.

23. Аникин А.С., Гасников А.В., Горнов А.Ю. Рандомизация и разреженность в задачах Huge–Scale оптимизации на примере работы метода зеркального спуска. *Тр. МФТИ*. 2016. Т. 8, № 1. С. 11–24.

24. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2004. Vol. 15. P. 229–251.

25. Auslender A., Teboulle M. Interior projection-like methods for monotone variational inequalities. *Mathematical Programming*. 2005. Vol. 104, Iss. 1. P. 39–68.

26. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. Mathematical Programming. 2007. Vol. 109, Iss. 2–3. P. 319–344.

27. Juditsky A., Nemirovski A., Tauvel C. Solving variational inequalities with Stochastic Mirror-Prox algorithm. *Stochastic Systems*. 2011. Vol. 1, N 1. P. 17–58.

28. Baes M., Burgisser M., Nemirovski A. A randomized mirror-prox method for solving structured large-scale matrix saddle-point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2013. Vol. 23. P. 934–962.

29. Гасников А.В., Логуновская А.А., Морозова Л.Э. О связи имитационной логит-динамики в популяционной теории игр и метода зеркального спуска в онлайн оптимизации на примере задачи выбора кратчайшего маршрута. *Тр. МФТИ*. 2015. Т. 7, № 4. С. 104–113.

Надійшла до редакції 03.08.2016

В.В. Семенов

ВАРІАНТ МЕТОДУ ДЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКУ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Анотація. Метод дзеркального спуску було запропоновано в кінці 70-х років XX ст. для задач опуклої оптимізації. Він використовується для розв’язання задач дуже великих розмірностей. Описано новий варіант цього методу для розв’язання варіаційних нерівностей з псевдомонотонними операторами. Його можна проінтерпретувати як модифікацію двоетапного алгоритму Попова з використанням проектування на допустиму множину у розумінні відстані Брегмана. Доведено теорему про збіжність методу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, псевдомонотонність, відстань Брегмана, відстань Кульбака–Лейблера, метод дзеркального спуску, збіжність.

V.V. Semenov

A VARIANT OF MIRROR DESCENT METHOD TO SOLVE VARIATIONAL INEQUALITIES

Abstract. The mirror descent algorithm was proposed by Nemirovski and Yudin in the end of 1970s to solve convex optimization problems. This method is suitable to solve huge-scale optimization problems. In the paper, we describe a new version of the mirror descent method to solve variational inequalities with pseudomonotone operators. The method can be interpreted as a modification of Popov’s two-step algorithm with the use of Bregman projections on the feasible set. We prove the convergence of the sequences generated by the proposed method.

Keywords: variational inequality, pseudomonotonicity, Bregman distance, Kullback–Leibler distance, mirror descent method, convergence.

Семёнов Владимир Викторович,
доктор. физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: semenov.volodya@gmail.com.