УДК 519.626.6

В.М. АБДУЛЛАЕВ

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ РЕАКЦИИ НА НАГРУЖЕНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Исследовано решение задачи параметрической идентификации нагруженных систем дифференциальных уравнений. Предложены итерационные методы, основанные на методах оптимизации первого порядка. Найдены формулы для градиента целевого функционала, оценивающего степень адекватности полученных параметров. Приведены результаты решения тестовых задач и их анализ.

Ключевые слова: нагруженное дифференциальное уравнение, реакция на нагружение, оптимальное управление, нелокальные условия, обратная задача.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что процессы экологии, фильтрации нефти и газа, движения грунтовых вод и многие другие описываются системами нагруженных дифференциальных уравнений с обыкновенными или частными производными [1–4]. При этом характерно, что точки нагружения, точнее состояния в этих точках, влияют в течение всего времени и/или на состояние во всех точках объекта (процесса). В связи с этим оптимизация функций реакции имеет существенное значение для эффективного функционирования объекта.

Часто на практике возникают и обратные задачи относительно нагруженных уравнений, в которых требуется идентифицировать функции реакции. Для этого необходима дополнительная информация об объекте, которая может задаваться в форме точечных, интегральных, неразделенных точечных значений состояния процесса [5–8]. Одним из подходов к решению обратной задачи является сведение ее к задаче оптимального управления относительно функций реакции на нагружения с использованием функционала среднеквадратического отклонения желаемых (наблюдаемых) состояний процесса от рассчитанных с помощью математической модели.

В настоящей работе предложен способ решения задачи оптимизации функций реакции на нагружения с применением методов оптимального управления первого порядка, для этого получены формулы градиента функционала по оптимизируемым параметрам. На примере решения тестовых задач обоснована эффективность предлагаемого подхода к численному решению приведенной задачи идентификации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую систему нагруженных дифференциальных уравнений [4]:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + \sum_{s=1}^{l} B^s(x)u(\bar{x}_s) + C(x), \;\; x \in [a, b], \tag{1}$$

где $A(x) = (A_{ij}(x))$, $B^s(x) = (B^s_{ij})$, $x \in [a, b]$ — n-мерные квадратные матричные непрерывные функции; $C(x)$ — непрерывная n-мерная вектор-функция; $u(x) \in R^n$ — состояние объекта в точке $x \in [a, b]$; $\bar{x}_s \in [a, b]$, $s = 1, 2, \ldots, l,$ — заданные места нагружения. Матричные функции $B(x)=(B^1(x), B^2(x), \ldots$ $\ldots, B^l(x))$ будем называть функциями реакции объекта на состояние в точках нагружения.

Для решения системы (1) в случае заданных точек нагружения $\bar{x}$ и соответствующих функций реакции необходимо определить n условий, например, в виде

$$u(a)=\gamma \in R^n \tag{2}$$

или в виде неразделенных точечных условий

$$\sum_{i=1}^{l_1} \beta_i u(\hat{x}_i)=\gamma, \tag{3}$$

или в виде неразделенных точечных и интегральных условий

$$\sum_{i=1}^{l_1} \beta_{1i} u(\hat{x}_i)+\sum_{j=1}^{l_2} \int_{\breve{x}_j}^{\widehat{x}_j} \beta_{2j}(\tau) u(\xi) d\xi=\gamma, \tag{4}$$

где β_i, β_{1i}, $\beta_{2j}(\cdot)$ — заданные матрицы размера $n \times n$, а заданные точки объекта $\hat{x}_i, \breve{x}_j, \widehat{x}_j \in [a, b]$ таковы, что выполнены условия $\hat{x}_i \notin [\breve{x}_j, \widehat{x}_j]$, $i=1,2,\ldots, l_1$, $j=1,2,\ldots, l_2$.

Основная задача, рассматриваемая в настоящей статье, состоит в идентификации функций $B_{ij}^s(x)$, $i, j=1,2,\ldots, n$, $s=1,2,\ldots, l$, при которых достигается минимум заданного функционала

$$J(B)=\alpha_1 \int_a^b f^0(u(x), B(x)) dx+\alpha_2 \Phi(u(\widetilde{x})), \tag{5}$$

где $f^0(\cdot,\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ — заданные дифференцируемые по своим аргументам функции, α_1, α_2 — заданные положительные числа

$$\Phi(u(\widetilde{x}))=\Phi(\widetilde{u})=\Phi(u_1(\widetilde{x}_1), u_1(\widetilde{x}_2), \ldots, u_1(\widetilde{x}_{l_3}), u_2(\widetilde{x}_1), \ldots, u_n(\widetilde{x}_{l_3}))=$$
$$=\Phi(\widetilde{u}_{11}, \widetilde{u}_{12}, \ldots, \widetilde{u}_{nl_3}).$$

Исходя из технических и технологических требований идентифицируемые функции $B_{ij}^s(x)$ должны удовлетворять условиям

$$\underline{B}_{ij}^s \le B_{ij}^s(x) \le \overline{B}_{ij}^s,\ i, j=1,2,\ldots, n,\ s=1,2,\ldots, l,\ x \in [a, b], \tag{6}$$

где $\underline{B}_{ij}^s$, $\overline{B}_{ij}^s$ заданы, $s=1,2,\ldots, l$.

Предположим, что выполнены все необходимые условия, при которых для заданных допустимых функций $B(x)$ дифференциальные уравнения (1) с одним из возможных условий (3), (4) имеют единственное решение. Отметим, что подобных конструктивных условий для задач (1), (3) и (1), (4) нет, поэтому вопрос о существовании решения задач выясняется непосредственно в процессе их численного решения [9, 10].

На практике в задаче (1)–(6) идентифицируют одновременно не все, а только некоторые из функций B_{ij}^s, $i, j=1,2,\ldots, n$, $s=1,2,\ldots, l$. Рассмотрение этого случая потребовало бы введения в постановку задачи новых обозначений для множеств и индексов для определяемых функций реакции на нагружения, что усложнило бы выкладки получаемых формул. Поэтому будем предполагать, что идентифицируются все матричные функции $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$.

Как упоминалось ранее, задачи (1), (5), (6) с одним из условий (2)–(4) возникают и при оптимальном синтезе систем с нагружением [11], и в рамках обратных задач при параметрической идентификации математических моделей нагруженных систем, например, при моделировании процессов подземной гидрогазодинамики и др. [1, 2, 12].

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При заданных функциях $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, для решения систем дифференциальных уравнений (1) при каких-либо из условий (2)–(4) можно использовать численные методы, основанные, например, на приведении исходной задачи к решению вспомогательных задач Коши [4, 13–15].

Для решения задачи идентификации функций реакции на нагружения сведением ее к задаче оптимального управления используем численные методы первого порядка, основанные на методах проекции, в частности, градиента

$$(B(x))^{k+1} = P((B(x))^k - \mu_k (\nabla_B J(B^k)), \; k = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

Здесь $\mu_k > 0$ — шаг, обеспечивающий условие монотонности итерационного процесса

$$J(B^{k+1}) < J(B^k), \; k = 0, 1, \ldots,$$

который можно выбирать различными способами [16, 17]; $P(\cdot)$ — оператор проектирования идентифицируемой матричной функции на допустимое множество; $(B(x))^0$ — начальное приближение, которое должно удовлетворять ограничению (6).

Для реализации процедуры (7) необходимо иметь выражение градиента целевого функционала (5) относительно идентифицируемых функций $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$. Для получения этих формул используем метод вариации независимых переменных. Предположим, что функция $u(x)$ является решением задачи (1), (2) при какой-либо допустимой идентифицируемой функции $B(x)$, а функция $\bar{\bar{u}}(x)$ — решением задачи (1), (2) для приращенной идентифицируемой функции $\bar{\bar{B}}(x) = B(x) + \Delta B(x)$. Тогда функция $\Delta u(x) = \bar{\bar{u}}(x) - u(x)$, являющаяся приращением решения задачи (1), (2), очевидно, удовлетворяет условию

$$\Delta u(a) = 0, \tag{8}$$

и следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\Delta u_i(x)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x) \Delta u_j(x) + \sum_{s=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} (B_{ij}^s(x) + \Delta B_{ij}^s(x)) \Delta u_j(\bar{x}_s) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l} \sum_{j=1}^{n} u_j(\bar{x}_s) \Delta B_{ij}^s(x), \; i = 1, 2, \ldots, n, \; x \in [a, b]. \tag{9}$$

Можно доказать справедливость оценки

$$\|\Delta u(x)\|_{L_2^n[a,b]} \le M_1 \cdot (\|\Delta B(x)\|_{L_2^{nl}[a,b]}), \tag{10}$$

где M_1 — постоянная величина, не зависящая от $B(x)$.

Линеаризуем приращение функционала (5)

$$\Delta J(B)=J(\widetilde{B})-J(B)=$$

$$=\alpha_1\int_a^b\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u_j}\Delta u_j(x)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial B_{ij}^s}\Delta B_{ij}^s(x)\right]dx+$$

$$+\alpha_2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{l_3}\frac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial\overline{u}_{j\nu}}\Delta u_j(\widetilde{x}_\nu)+o(||\Delta u(x)||)+o(||\Delta B(x)||)+o(||\Delta\widetilde{u}||). \qquad (11)$$

Перенеся левые части системы (9) вправо, умножим обе ее части на пока произвольную всюду непрерывную, непрерывно-дифференцируемую, кроме точек $\widetilde{x}_i$, $i=1,2,\ldots,l_3$, n-мерную вектор-функцию $\psi(x)$ и просуммируем все уравнения системы. Разбив отрезок $[a,b]$ на отрезки $[\widetilde{x}_{i-1},\widetilde{x}_i)$, $i=1,2,\ldots,l_3$, проинтегрируем полученную сумму по этим отрезкам. Обозначив $\widetilde{x}_0=a$, $\widetilde{x}_{l_3+1}=b$, проведя на отрезках $[\widetilde{x}_{i-1},\widetilde{x}_i]$, $i=1,2,\ldots,l_3$, интегрирование по частям, а также с учетом (8), как несложно показать, получим

$$\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\left[\frac{d\psi_i(x)}{dx}-\sum_{j=1}^{n}A_{ji}(x)\psi_j(x)-\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\overline{x}_s)\int_a^b B_{ji}^s(\xi)\psi_j(\xi)d\xi\right]\Delta u_i(x)dx+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{l_3}\sum_{i=1}^{n}[\psi_i^-(\widetilde{x}_\nu)-\psi_i^+(\widetilde{x}_\nu)]\Delta u_i(\widetilde{x}_\nu)+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(b)\Delta u_i(b)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\int_a^b[\psi_i(x)u_j(\overline{x}_s)\Delta B_{ij}^s(x)]dx+o(||\Delta u(x)||)=0. \qquad (12)$$

Учитывая в (11) формулу (12), после группировки подобных членов имеем

$$\Delta J(B)=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b\left[-\frac{d\psi_i(x)}{dx}-\sum_{j=1}^{n}A_{ji}(x)\psi_j(x)-\sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\overline{x}_s)\int_a^b B_{ji}^s(\xi)\psi_j(\xi)d\xi+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u_i}\right]\Delta u_i(x)dx+\sum_{\nu=1}^{l_3}\sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i^-(\widetilde{x}_\nu)-\psi_i^+(\widetilde{x}_\nu)+\alpha_2\frac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial\overline{u}_{i\nu}}\right]\Delta u_i(\widetilde{x}_\nu)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\psi_i(b)\Delta u_i(b)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}\int_a^b\left[-\psi_i(x)u_j(\overline{x}_s)+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial B_{ij}^s}\right]\Delta B_{ij}^s(x)dx+$$

$$+o(||\Delta u(x)||)+o(||\Delta B(x)||)+o(||\Delta\widetilde{u}||). \qquad (13)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\psi^-(\xi)=\psi(\xi-0),\ \psi^+(\xi)=\psi(\xi+0).$$

В связи с пока произвольностью вектор-функции $\psi(x)$ потребуем, чтобы она являлась решением задачи

$$\frac{d\psi_i(x)}{dx} = -\sum_{j=1}^{n} A_{ji}(x)\psi_j(x) - \sum_{s=1}^{l}\sum_{j=1}^{n}\delta(x-\bar{x}_s)\int_a^b B_{ji}^s(\xi)\psi_j(\xi)d\xi +$$

$$+\alpha_1 \frac{\partial f^0(u(x), B(x))}{\partial u_i}, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = b \text{ и } \tilde{x}_{l_3} < b, \\ -\alpha_2 \dfrac{\partial \Phi(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_{il_3}}, & \text{если } x = \tilde{x}_{l_3} = b, \\ \psi_i^+(x) - \alpha_2 \dfrac{\partial \Phi(\tilde{u})}{\partial \tilde{u}_{i\nu}}, & \text{если } a < x = \tilde{x}_\nu < b, \nu = 1, 2, \ldots, l_3, i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{15}$$

Задача (14), (15), которую будем называть сопряженной, имеет следующие особенности: она описывается интегродифференциальной системой; в ней используется функция Дирака; как следует из условий (15), сопряженные переменные в заданных промежуточных точках $\tilde{x}_\nu$ имеют разрывы. Тогда из (10), (13), (14), (15) следует, что компоненты градиента целевого функционала по идентифицируемым функциям реакции $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, определяются формулой

$$J'_{B_{ij}^s(x)}(B) = -\psi_i(x)u_j(\bar{x}_s) + \alpha_1 \frac{\partial f^0(u(x), B(x))}{\partial B_{ij}^s},$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n, \; s = 1, 2, \ldots, l. \tag{16}$$

Приведем алгоритм предлагаемого подхода к численному решению задачи (1), (2), (5), (6) с использованием полученных формул градиента функционала и применением итерационной процедуры (7). На k-й итерации процедуры (7) при заданных текущих значениях идентифицируемых функций $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, решается начальная нагруженная задача (1), (2) (например, способом, предложенным в [4]). Далее решается сопряженная задача (14), (15) и определяются значения сопряженных переменных $\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Эти значения используются в формуле (16) для определения значений компонент градиента функционала. С учетом простоты ограничений (6) проецируется направление градиента функционала. Далее в направлении спроектированного антиградиента осуществляется шаг величиной μ_k и определяются новые значения $(B(x))^{k+1}$ минимизирующей последовательности.

В случае, если вместо условий (2) имеют место нелокальные условия (3) или (4), методика получения компонент градиента функционала остается прежней, но, естественно, изменяются выкладки. Не останавливаясь подробно на выводе формул (с методикой их получения можно ознакомиться, например, в [14]), приведем их, отметив, что эти формулы различаются условиями (15) для сопряженной системы.

Если для идентификации функций $B^s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, l$, дополнительные условия заданы в виде (3), то для сопряженной системы вместо условий (15) имеют место следующие условия:

$$
\psi(x)=\begin{cases}
\alpha_2 \dfrac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial \widetilde{u}_1}+\beta_1^{*}\lambda, & \text{если} \quad x=\widetilde{x}_1=a,\ \hat{x}_1=a,\\
\alpha_2 \dfrac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial \widetilde{u}_1}, & \text{если} \quad x=\widetilde{x}_1=a,\ \hat{x}_1>a,\\
\beta_1^{*}\lambda, & \text{если} \quad x=\widetilde{x}_1>x_0,\ \hat{x}_1=a,\\
-\alpha_2 \dfrac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial \widetilde{u}_{l_3}}-\beta_{l_1}^{*}\lambda, & \text{если} \quad x=x_{l_3}=x_f,\ \hat{x}_{l_1}=b,\\
-\alpha_2 \dfrac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial \widetilde{u}_{l_3}}, & \text{если} \quad x=x_{l_3}=b,\ \hat{x}_{l_1}<b,\\
-\beta_{l_1}^{*}\lambda, & \text{если} \quad x=x_{l_3}<b,\ \hat{x}_{l_1}=b,\\
\psi^{+*}(x)-\alpha_2 \dfrac{\partial\Phi(\widetilde{u})}{\partial \widetilde{u}_\nu}-\beta_\nu^{*}\lambda, & \text{если} \quad \begin{array}{l} a<x=\widetilde{x}_\nu,\ \hat{x}_i<b,\\ \nu=1,2,\ldots,l_3,\ i=1,\ldots,l_1. \end{array}
\end{cases} \tag{17}
$$

Здесь λ — n-мерный вектор множителей Лагранжа, определяемый на каждой итерации (7) при заданных $B(x)$ из условий (3), (17) с применением аналога метода параметрической прогонки относительно сопряженной системы (14) [4, 15, 18].

Если для идентификации функции $B^s(x)$, $s=1,2,\ldots,l$, дополнительные условия заданы в виде (4), то условия (17) сохранятся, а изменятся уравнения сопряженной системы

$$
\frac{d\psi(x)}{dx}=-A^{*}(x)\psi(x)-\sum_{s=1}^{l}\delta(x-\bar{x}_s)\int_a^b B^{s*}(\xi)\psi(\xi)d\xi+
$$

$$
+\alpha_1\frac{\partial f^0(u(x),B(x))}{\partial u}+\sum_{j=1}^{l_2}\chi_{[\breve{x}_j,\hat{x}_j]}(x)\cdot\beta_{2j}^{*}(x)\lambda,\ x\in[a,b], \tag{18}
$$

где $\chi_{[\breve{x}_j,\hat{x}_j]}(x)=\begin{cases}1, & x\in[\breve{x}_j,\hat{x}_j],\\ 0, & x\notin[\breve{x}_j,\hat{x}_j].\end{cases}$

В случае условий (3) и (4) изменится схема численного решения системы нагруженных дифференциальных уравнений, т.е. имеем нелокальные неразделенные точечные (3) и интегральные условия. Здесь можно использовать численную схему, предложенную в [15]. Отметим, что для решения сопряженных задач (14), (15); (14), (17); (18), (17) также необходимо применять специальные схемы.

Порядок применения процедуры (17) как для решения задачи (1), (3), (5), (6), так и задачи (1), (4)–(6) в целом аналогичен описанному для задачи (1), (2), (5), (6).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рассмотрим задачу, описанную системой нагруженных уравнений с двумя неизвестными функциями реакции на нагружения:

$$
\frac{du_1(x)}{dx}=u_1(x)+2u_2(x)+B_{11}^{1}(x)u_1(0.25)-2\cos(2x)+
$$

$$
+2\cos(x)-2\sin(x)-2.989616e^{-2x}+1,
$$

$$
\frac{du_2(x)}{dx}=u_1(x)-xu_2(x)+B_{22}^{2}(x)u_2(0.375)-2\sin(2x)-2\sin(x)+
$$

$$
+x\cos(2x)+0.268311e^{x-1}-0.731689,\ x\in[0,0.5], \tag{19}
$$

с начальными условиями вида (2)

$$u_1(0)=1,\ u_2(0)=0. \tag{20}$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(B)=\int_0^{0.5}([u_1(x)-y_1(x)]^2+[u_2(x)-y_2(x)]^2)dx+$$

$$+(u_1(0.5)-1.958851)^2+(u_2(0.5)+0.459698)^2\to\min \tag{21}$$

при условиях

$$1\le B_{11}^1(x)\le 4,\ 1\le B_{22}^2(x)\le 5. \tag{22}$$

Решением задачи (19)–(22) являются следующие функции:

$$u^*(x)=(u_1(x),u_2(x))^{\mathrm{T}}=(2\sin(x)+1,\ \cos(2x)-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)^{\mathrm{T}}=(0.25;0.375)^{\mathrm{T}},$$

$$B^*(x)=(B_{11}^1(x),B_{22}^2(x))^{\mathrm{T}}=(2e^{-2x},\ e^{x-1}+1)^{\mathrm{T}},$$

$$y_1(x)=2\sin(x)+1,\ y_2(x)=\cos(2x)-1,$$

удовлетворяющие условиям (19), (20), (22) и доставляющие функционалу (21) наименьшее возможное значение, равное нулю.

Сопряженная задача (14), (15) в данном случае имеет вид

$$\frac{d\psi_1(x)}{dx}=-\psi_1(x)-\psi_2(x)-\delta(x-\bar{x}_1)\int_0^{0.5}B_{11}^1(\xi)\psi_1(\xi)d\xi+2(u_1(x)-y_1(x)), \tag{23}$$

$$\frac{d\psi_2(x)}{dx}=2\psi_1(x)+x\psi_2(x)-\delta(x-\bar{x}_2)\int_0^{0.5}B_{22}^2(\xi)\psi_2(\xi)d\xi+2(u_2(x)-y_2(x)) \tag{24}$$

с конечными условиями

$$\psi_1(0.5)=-2(u_1(0.5)-1.958851),\ \psi_2(0.5)=-2(u_2(0.5)+0.459698). \tag{25}$$

Формулы (16) для компонент градиента функционала (21) имеют вид

$$J'_{B_{11}^1(x)}(B)=-\psi_1(x)u_1(\bar{x}_1),\ J'_{B_{22}^2(x)}(B)=-\psi_2(x)u_2(\bar{x}_2),\ x\in[0,0.5]. \tag{26}$$

Операторы проектирования на допустимую область задачи, определяемую ограничениями (22), имеют вид

$$P_{(1.6)}(B)=\begin{cases}(B_{11}^1,B_{22}^2), & \text{если } 1\le B_{11}^1\le 4, 1\le B_{22}^2\le 5,\\ (1,B_{22}^2), & \text{если } B_{11}^1<1, 1\le B_{22}^2\le 5,\\ (4,B_{22}^2), & \text{если } B_{11}^1\ge 4, 1\le B_{22}^2\le 5,\\ (B_{11}^1,1), & \text{если } 1\le B_{11}^1\le 4,\ B_{22}^2<1,\\ (B_{11}^1,5), & \text{если } 1\le B_{11}^1\le 4,\ B_{22}^2\ge 5,\\ (1,1), & \text{если } B_{11}^1<1,\ B_{22}^2<1,\\ (4,5), & \text{если } B_{11}^1>4,\ B_{22}^2>5.\end{cases}$$

Численные эксперименты проводились при различных начальных значениях функций реакции точек объекта на нагружения $(B_{11}^1(x))^0$, $(B_{22}^2(x))^0$, значениях числа разбиений временного интервала при использовании метода Рунге–Кутты четвертого порядка для решения задач Коши как для основной системы (19), так и сопряженной (23)–(25).

В табл. 1 приведены начальные значения $(B_{11}^1(x))^0$, $(B_{22}^2(x))^0$, соответствующие результатам решения системы (19)–(22), а также $u_1^{(0)}(x)$, $u_2^{(0)}(x)$ и значения компонент нормированных градиентов, вычисленных по формулам (26) ($\nabla_{\text{анал.}}^{\text{норм.}} J$) и конечноразностной аппроксимации производных функционала ($\nabla_{\text{аппр.}}^{\text{норм.}} J$):

$$\partial J(z) / \partial z_j \approx (J(z+\delta e_j) - J(z-\delta e_j)) / (2\delta),$$

где z_j — j-я компонента N-мерного оптимизируемого вектора z, представляющая дискретизированные значения функций реакции на нагружения $B(x)$; e_j — N-мерный вектор, состоящий из нулей, кроме j-й компоненты, равной единице. Величину δ в экспериментах приходилось варьировать, а в данную таблицу включены наиболее приемлемые результаты.

В табл. 2, 3 приведены результаты проведенных экспериментов, в которых точные значения наблюдаемых компонент $y_1(x)$, $y_2(x)$ зашумлялись случайными погрешностями по формуле: $y_i(x) = y_i(x)(1+\chi(2\sigma_i - 1))$, $i = 1, 2$, где σ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0; 1]$, χ — уровень помех.

В табл. 2 приведены результаты точного и полученного решений задачи (19)–(22) и значения параметров $B(x)$ при $\chi = 0$ (без помех) после шестой итерации метода проекции сопряженного градиента, при этом минимальное достигнутое значение функционала $J((B)^6) = 0.6 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 1

x	$(B_{11}^1(x))^0$	$(B_{22}^2(x))^0$	$u_1^{(0)}(x)$	$u_2^{(0)}(x)$	$\nabla_{\text{анал.}}^{\text{норм.}} J_{B_{11}^1}$	$\nabla_{\text{аппр.}}^{\text{норм.}} J_{B_{11}^1}$	$\nabla_{\text{анал.}}^{\text{норм.}} J_{B_{22}^2}$	$\nabla_{\text{аппр.}}^{\text{норм.}} J_{B_{22}^2}$
0.000	2.0000	1.3679	1.0000	0.0000	0.1446	0.1454	0.0609	0.0612
0.042	2.0901	1.5502	1.2237	0.0952	0.1334	0.1346	0.0559	0.0564
0.083	2.1930	1.7332	1.4842	0.2000	0.1231	0.1242	0.0513	0.0517
0.125	2.3076	1.9169	1.7853	0.3157	0.1137	0.1146	0.0472	0.0475
0.167	2.4331	2.1013	2.1308	0.4437	0.1050	0.1058	0.0434	0.0437
0.208	2.5685	2.2864	2.5248	0.5855	0.0969	0.0976	0.0400	0.0403
0.250	2.7131	2.4724	2.9716	0.7427	0.0176	0.0539	0.0371	0.0372
0.292	2.8661	2.6591	3.4758	0.9172	0.0135	0.0134	0.0370	0.0370
0.333	3.0268	2.8468	4.0424	1.1107	0.0096	0.0095	0.0371	0.0371
0.375	3.1947	3.0353	4.6765	1.3252	0.0060	0.0057	0.0019	0.0195
0.417	3.3692	3.2247	5.3837	1.5629	0.0056	0.0052	0.0017	0.0014
0.458	3.5497	3.4151	6.1699	1.8258	0.0053	0.0048	0.0016	0.0013
0.500	3.7358	3.6065	7.0414	2.1163	0.0049	0.0045	0.0015	0.0012
$J((B)^0) = 37.46125$								

Таблица 2

x	Полученное решение				Точное решение			
	$(B_{11}^1(x))^6$	$(B_{22}^2(x))^6$	$u_1^{(6)}(x)$	$u_2^{(6)}(x)$	$(B_{11}^1(x))^*$	$(B_{22}^2(x))^*$	$u_1^{(*)}(x)$	$u_2^{(*)}(x)$
0.000	2.0001	1.3678	1.0000	0.0000	2.0000	1.3679	1.0000	0.0000
0.042	1.8402	1.3835	1.0833	– 0.0035	1.8401	1.3835	1.0833	– 0.0035
0.083	1.6931	1.3998	1.1665	– 0.0139	1.6930	1.3998	1.1665	– 0.0139
0.125	1.5577	1.4168	1.2494	– 0.0311	1.5576	1.4169	1.2493	– 0.0311
0.167	1.4331	1.4346	1.3318	– 0.0550	1.4331	1.4346	1.3318	– 0.0550
0.208	1.3185	1.4531	1.4137	– 0.0855	1.3185	1.4531	1.4137	– 0.0856
0.250	1.2131	1.4723	1.4949	– 0.1224	1.2131	1.4724	1.4948	– 0.1224
0.292	1.1161	1.4924	1.5752	– 0.1653	1.1161	1.4925	1.5751	– 0.1654
0.333	1.0268	1.5134	1.6545	– 0.2141	1.0268	1.5134	1.6544	– 0.2141
0.375	0.9447	1.5353	1.7327	– 0.2683	0.9447	1.5353	1.7325	– 0.2683
0.417	0.8692	1.5580	1.8096	– 0.3275	0.8692	1.5580	1.8094	– 0.3276
0.458	0.7997	1.5818	1.8850	– 0.3915	0.7997	1.5818	1.8849	– 0.3915
0.500	0.7357	1.6065	1.9590	– 0.4596	0.7358	1.6065	1.9589	– 0.4597
$J((B)^6) = 0.00006$					$J((B)^*) = 0.00000$			

Таблица 3

x	$\chi = 0.03$				$\chi = 0.05$			
	$(B_{11}^1(x))^{11}$	$(B_{22}^2(x))^{11}$	$u_1^{(11)}(x)$	$u_2^{(11)}(x)$	$(B_{11}^1(x))^{15}$	$(B_{22}^2(x))^{15}$	$u_1^{(15)}(x)$	$u_2^{(15)}(x)$
0.000	2.0005	1.3678	1.0000	0.0000	1.9955	1.3664	1.0000	0.0000
0.042	1.8406	1.3835	1.0834	– 0.0035	1.8359	1.3759	1.0828	– 0.0034
0.083	1.6934	1.3999	1.1666	– 0.0138	1.6891	1.3922	1.1655	– 0.0137
0.125	1.5578	1.4170	1.2495	– 0.0311	1.5540	1.4091	1.2480	– 0.0309
0.167	1.4330	1.4348	1.3319	– 0.0550	1.4299	1.4268	1.3300	– 0.0548
0.208	1.3182	1.4533	1.4138	– 0.0855	1.3158	1.4452	1.4115	– 0.0853
0.250	1.2135	1.4726	1.4950	– 0.1224	1.2115	1.4645	1.4923	– 0.1222
0.292	1.1161	1.4926	1.5753	– 0.1653	1.1152	1.4846	1.5722	– 0.1652
0.333	1.0265	1.5136	1.6546	– 0.2141	1.0267	1.5055	1.6513	– 0.2139
0.375	0.9440	1.5359	1.7327	– 0.2682	0.9456	1.5320	1.7292	– 0.2682
0.417	0.8679	1.5586	1.8096	– 0.3275	0.8722	1.5550	1.8060	– 0.3276
0.458	0.7979	1.5832	1.8850	– 0.3915	0.8050	1.5790	1.8815	– 0.3916
0.500	0.7335	1.6069	1.9588	– 0.4596	0.7436	1.6040	1.9556	– 0.4599
$J((B)^{11}) = 0.00072$					$J((B)^{15}) = 0.00541$			

В табл. 3 приведены результаты полученного решения задачи (19), (20) при уровнях помех, равных 3%, 5%, соответствующих значениям $\chi = 0.03$; 0.05, и указано число итераций.

Решение нагруженной начальной задачи (1), (2) на каждой ν-й итерации при заданных функциях реакции с применением подхода, предложенного в [4], приводилось к решению вспомогательных задач Коши. Для численного решения задач Коши использовался метод Рунге–Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$. Для выбора шага μ_k в процедуре (7) использовался метод золотого сечения с точностью 0.001.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложена схема численного решения задач оптимизации функций реакции на нагружения для стационарных объектов. Исследуемые объекты описаны системами нагруженных линейных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Рассматриваемые постановки задач возможны как при проектировании нагруженных систем, так и при решении обратных задач по идентификации неизвестных функций реакции на нагружения. Относительно целевого функционала задачи получены аналитические формулы для компонент градиента по оптимизируемым параметрам. Это позволяет использовать для решения задачи эффективные численные методы первого порядка. Приведены результаты компьютерных экспериментов на примере решения тестовых задач. Предлагаемую схему можно применять и для объектов с распределенными параметрами, описываемых уравнениями с частными производными. Для сведения этих задач к рассматриваемым постановкам можно использовать методы прямых.

Автор выражает искреннюю благодарность чл.-кор. НАН Азербайджана, профессору Айда-заде К.Р. за ценные советы и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. Москва: Наука, 2006. 173 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
3. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями. *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25, № 4. С. 641–651.
4. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations. *Comput. Math. Math. Phys*. 2004. Vol. 44, N 9. P. 1585–1595.
5. Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. Москва: Изд-во ЛКИ, 2009. 480 с
7. Sergienko I.V. and Deineka V.S. Identification of parameters of a dynamic problem of elasticity for a body with an inclusion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 3. P. 397–420.
8. Sergienko I.V. and Deineka V.S. Parameter identification in quasistationary thermoelastic problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 2. P. 220–242.
9. Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2009. Т. 49, № 7. С. 1223–1231.
10. Алиханов А.А, Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации. *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628.
11. Егоров А.И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 504 с.
12. Анохин Ю.А., Горстко А.Б., Дамешек Л.Ю. и др. Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом. Новосибирск: Наука, 1987.
13. Aida-zade K. R. A numerical method of restoring the parameters of a dynamic system. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Vol. 40, N 2. P. 392–399.
14. Aida-zade K.R., Abdullaev V. M. On the solution of boundary value problems with nonseparated multipoint and integral conditions. *Differential Equations*. 2013. Vol. 49, N 9. P. 1114–1125.
15. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Comput. Math. Math. Phys*. 2014. Vol. 54, N 7. P. 1096–1109.

16. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. Москва: Наука, 1982.

17. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал. 2002. 824 с.

18. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Solution to a class of inverse problems for system of loaded ordinary differential equations with integral conditions. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2016. Vol. 24, N 5. P. 543–558.

Надійшла до редакції 15.06.2016

В.М. Абдуллаєв

ЗАДАЧА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФУНКЦІЙ РЕАКЦІЇ НА НАВАНТАЖЕННЯ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ СИСТЕМ

Анотація. Досліджено розв'язання задачі параметричної ідентифікації навантажених систем диференціальних рівнянь. Запропоновано ітераційні методи, що базуються на методах оптимізації першого порядку. Знайдено формули для градієнта цільового функціонала, який оцінює ступінь адекватності отриманих параметрів. Наведено результати розв'язання тестових задач та їхній аналіз.

Ключьові слова: навантажене диференціальне рівняння, реакція на навантаження, оптимальне керування, нелокальні умови, обернена задача.

V.M. Abdullayev

THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF THE FUNCTIONS OF RESPONSE TO LOADINGS FOR STATIONARY SYSTEMS

Abstract. We investigate the solution to the parametric identification problem for loaded systems of differential equations. We propose to use iterative methods based on the first-order optimization methods. For this purpose, we obtain formulas for the gradient of the objective functional, which assesses the adequacy degree of the obtained parameters. The results of numerical solution to some test problems are given.

Keywords: loaded differential equations, reaction to loading, optimal control, nonlocal conditions, inverse problem.

Абдуллаев Вагиф Маариф оглы,
доктор физ.-мат. наук, профессор Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности; ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, e-mail: vaqif_ab@rambler.ru.