УДК 519.65

П.С. МАЛАЧИВСКИЙ, Я.Н. МАТВИЙЧУК, Я.В. ПИЗЮР, Р.П. МАЛАЧИВСКИЙ

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Предложен алгоритм построения равномерного приближения функций двух переменных как граничного приближения в норме L^p при $p \to \infty$. Он основан на использовании среднеквадратичного приближения с переменной весовой функцией. Предложен способ последовательного уточнения весовой функции. Приведены примеры равномерного приближения таблично-заданных функций двух переменных с использованием метода наименьших квадратов с переменной весовой функцией.

Ключевые слова: равномерное приближение, функция двух переменных, приближение в пространстве L^p, метод наименьших квадратов с переменной весовой функцией.

ВВЕДЕНИЕ

Равномерное приближение функции двух переменных используется при проектировании технических средств для измерения физических величин и построения численных методов. В частности, равномерное приближение функции двух переменных используют при проектировании электронных манометров, поскольку информационный сигнал сенсора давления состоит из двух сигналов: сигнала, который собственно характеризирует давление, и сигнала, который определяет температуру. В полиграфии толщину слоя краски на отпечатке определяют по оптической плотности с учетом цвета краски. Использование метода вырожденного ядра при построении решения интегрального уравнения предусматривает аппроксимацию его ядра выражением от двух переменных.

К сожалению, пока не существует эффективных алгоритмов для вычисления параметров равномерного приближения функций двух переменных. Для получения равномерного приближения функций многих переменных преимущественно используют три метода: метод оптимизации; последовательное вычисление равномерного приближения по каждой переменной; итерационные алгоритмы типа Ремеза.

Наиболее часто для нахождения равномерного приближения функций многих переменных используют методы оптимизации, т.е. линейное или нелинейное математическое программирование. В частности, в пакете MATLAB для нахождения равномерного приближения функций многих переменных предусмотрена функция fminimax, с использованием которой можно вычислить параметры приближения линейным или нелинейным выражением. При обращении к этой функции необходимо указать начальное приближение, а в случае нелинейных задач можно задать также и градиент.

Программу для вычисления параметров равномерного приближения функций многих переменных обобщенным полиномом на основе метода линейного программирования разработала А.О. Каленчук-Порханова [1]. Аналогичная программа для вычисления параметров наилучшего приближения функций многих переменных разработана В.П. Кондратьевым [2].

Алгоритмы для вычисления параметров равномерного приближения функций многих переменных на основе последовательного использования равномерной аппроксимации по каждой из переменных описано в работах [3, 4]. По этому алгоритму получаем несколько бóльшую погрешность приближения функции, чем при наилучшем (чебышевском) приближении.

Алгоритм равномерного приближения функций нескольких переменных с использованием итерационной схемы типа Ремеза описан в работе Б.О. Попова и Г.Ф. Криворучко [5]. По этому алгоритму на каждой итерации уточняется множество узлов — точек с наибольшим отклонением приближающего выражения от приближаемой функции (аналог точек альтернанса при приближении функции одной переменной). Решение задачи чебышевской интерполяции по этому алгоритму проводится за два этапа. На первом этапе определяются знаки отклонения приближающего выражения от приближаемой функции в узловых точках. На втором этапе в соответствии с определенными знаками отклонения на множестве узловых точек решаем систему уравнений, соответствующую задаче чебышевской интерполяции. Далее как и по схеме Ремеза для функции одной переменной с изменением точек альтернанса по алгоритму Валле–Пуссена изменяем лишь один из узлов. Оптимизацию этого алгоритма для некоторых частных случаев предложил Я.В. Гапонюк [6].

В настоящей статье предлагается алгоритм построения равномерного приближения функций двух переменных как предельного приближения в норме пространства L^p при $p \to \infty$ [7].

РАВНОМЕРНОЕ И СРЕДНЕСТЕПЕННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть непрерывную функцию двух переменных $f(x, y)$, заданную на прямоугольнике $[\alpha_1, \beta_1]\times[\alpha_2, \beta_2]$, необходимо приблизить полиномом

$$F_m(a; x, y) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x, y) \qquad (1)$$

по системе базисных функций $\varphi_i(x, y)$, $i = \overline{0, m}$, где a_i $(i = \overline{0, m})$ — неизвестные действительные параметры: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^m$, R^m — m-мерное векторное пространство. Выражение $F_m(a^*; x, y)$ будем называть равномерным приближением функции $f(x, y)$ на прямоугольнике $[\alpha_1, \beta_1]\times[\alpha_2, \beta_2]$, если оно удовлетворяет условию

$$\max_{\substack{\alpha_1 \le x \le \beta_1 \\ \alpha_2 \le y \le \beta_2}} |f(x, y) - F_m(a^*; x, y)| = \min_{a \in A} \max_{\substack{\alpha_1 \le x \le \beta_1 \\ \alpha_2 \le y \le \beta_2}} |f(x, y) - F_m(a; x, y)|. \qquad (2)$$

Это значит, что необходимо найти такие значения параметров a^*, при которых наибольшее по модулю отклонение выражения $F_m(a^*; x, y)$ от функции $f(x, y)$ на прямоугольнике $[\alpha_1, \beta_1]\times[\alpha_2, \beta_2]$ достигает наименьшего значения.

Оценка близости среднестепенного приближения непрерывной функции $f(x, y)$ выражением $F_m(a; x, y)$ на $[\alpha_1, \beta_1]\times[\alpha_2, \beta_2]$ определяется в норме пространства L^p по формуле

$$\|\Delta\|_{L^p} = \left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |\Delta(x, y)|^p \, dxdy \right)^{1/p}, \qquad (3)$$

где $\Delta(x, y) = f(x, y) - F_m(a; x, y)$, $1 \le p < \infty$. Для $1 \le p < \infty$ величина $\|\Delta\|_{L^p}$ принимает промежуточные значения между $\|\Delta\|_{L^1}$ и $\|\Delta\|_C$ [8], где $\|\Delta\|_C$ — норма в пространстве функций, непрерывных на прямоугольнике $[\alpha_1, \beta_1]\times[\alpha_2, \beta_2]$.

Норму в пространствах L^p $(1 \le p < \infty)$ используют в задачах, для которых нет потребности в обеспечении хорошего приближения во всех точках для $x \in [\alpha_1, \beta_1]$ и $y \in [\alpha_2, \beta_2]$. Малое значение величины $\|\Delta\|_{L^p}$ не означает, что модуль погрешности $|\Delta|$ будет малым. Лишь для чебышевской нормы имеем $|\Delta| \le ||\Delta||_C$. В вычислительном аспекте наиболее легко определять приближение в пространстве L^2. Сложнее находить приближение в пространствах с нормами L^1 и C.

Учитывая, что в предельном случае при $p \to \infty$ приближение в пространстве L^∞ совпадает с равномерным приближением, в [8, 9] для построения равномерного приближения предложен метод на основе взвешенных среднеквадратичных аппроксимаций. Этот метод базируется на идее получения приближения в пространстве L^p, как среднеквадратичного приближения

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \rho_j(x, y) |\Delta_{j+1}(x, y)|^2 \, dxdy \to \min, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

с весовой функцией

$$\rho_j(x, y) = |\Delta_j(x, y)|^{p-2}, \tag{5}$$

где $\Delta_j(x, y) = f(x, y) - F_{m,j}(a; x, y)$, $F_{m,j}(a; x, y)$ — среднеквадратичное приближение функции $f(x, y)$ с весовой функцией $\rho_{j-1}(x, y)$.

Итерационный алгоритм построения равномерного приближения на основе среднеквадратичного приближения (4) состоит в использовании весовой функции [9]

$$\rho_j(x, y) = |\Delta_j(x, y)|^{2j} \text{ при } \rho_0(x, y) = 1, \ j = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Нами была достигнута сходимость итерационного процесса (4) при применении весовой функции

$$\rho_0(x, y) = 1, \ \rho_j(x, y) = |\Delta_1(x, y)|^2 |\Delta_2(x, y)|^2 \cdot \ldots \cdot |\Delta_j(x, y)|^2, \ j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Весовая функция (7) в отличие от (6) учитывает погрешности аппроксимации на всех предыдущих итерациях. Именно уточнение значения весовой функции с учетом погрешностей приближения на предыдущих итерациях обеспечивает выравнивание погрешности аппроксимации при последовательном использовании среднеквадратичного приближения.

РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ТАБЛИЧНО-ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть непрерывную функцию $f(x, y)$ двух переменных, заданную на множестве точек (x_i, y_j), $i = \overline{0, k}$, $j = \overline{0, s}$, необходимо приблизить обобщенным полиномом (1). Для оценки погрешности приближения таблично-заданных функций используем норму евклидового пространства E^p

$$||\delta||_{E^p} = \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{s} |\delta(x_i, y_j)^p| \right)^{1/p}, \tag{8}$$

где $\delta(x, y) = f(x, y) - F_m(a; x, y)$, $1 \le p < \infty$. Как и для пространства L^p, норма $||\delta||_{E^p}$ для пространства E^p принимает промежуточные значения между $||\delta||_{E^1}$ и $||\delta||_C$,

$$||\delta||_{E^1} = \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{s} |\delta(x_i, y_j)| \right), \ ||\delta||_{E^\infty} = \max_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le s}} |\delta(x_i, y_j)|.$$

Иными словами, предельное значение нормы $||\delta||_{E^p}$ при $p \to \infty$ соответствует норме в пространстве функций непрерывных на прямоугольнике $[x_0, x_k] \times [y_0, y_s]$.

Для построения равномерного приближения таблично-заданных функций используем метод, основанный на методе наименьших квадратов с переменной весовой функцией. Этот метод аналогично итерационному методу (4), (6) основывается на идее получения приближения в пространстве E^p, как приближения с использованием метода наименьших квадратов

$$\left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{s} \rho_r(x_i, y_j)(\delta_{r+1}(x_i, y_j))^2 \right) \to \min, \ r = 0, 1, \ldots, \tag{9}$$

с весовой функцией

$$\rho_0(x, y) = 1, \ \rho_r(x, y) = |\delta_1(x, y)|^2 \, |\delta_2(x, y)|^2 \cdot \ldots \cdot |\delta_r(x, y)|^2, \ r = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\delta_r(x, y) = f(x, y) - F_{m,r}(a; x, y)$, $F_{m,r}(a; x, y)$ — приближение методом наименьших квадратов функции $f(x, y)$ с весовой функцией $\rho_{r-1}(x, y)$.

Пример 1. Найдем равномерное приближение функции $z_1(x, y) = e^{-xy}$, заданной в точках (x_i, y_j), $i = \overline{0, 100}$, $j = \overline{0, 100}$, где $x_i = 0.01i$, $y_j = 0.01j$, полиномом второй степени по каждой из переменных x и y.

С использованием предложенного метода за четыре итерации в соответствии с формулой (9) для функции $z_1(x, y)$ получен полином

$$P_2(x, y) = 0.9972071933 + 0.00258908x - 0.002394555359x^2 + 0.002554584932y -$$
$$-0.9549205056xy + 0.01181962538x^2 y - 0.00235686406y^2 +$$
$$+0.01178053096xy^2 + 0.3051429680x^2 y^2, \tag{11}$$

который обеспечивает абсолютную погрешность приближения 0.0035426. В процессе вычисления погрешность приближения приобретала такие значения: на первой итерации 0.0092249, на второй 0.0040139, на третьей 0.00388419, на четвертой 0.0035426.

Изображение поверхности полученной погрешности аппроксимации дано на рис. 1.

Для сравнения на рис. 2 дано изображение поверхности погрешности приближения функции $z_1(x, y)$ полиномом от двух переменных вида (11) методом наименьших квадратов, т.е. полиномом, полученным в результате первой итерации в соответствии с формулой (9). Из рис. 2 следует, что погрешность аппроксимации функции методом наименьших квадратов в одной точке имеет довольно большое значение по сравнению с погрешностью в других точках поверхности. В результате итераций (9), (10) погрешность аппроксимации функции $z_1(x, y)$ почти равномерно распределяется среди всех точек поверхности (см. рис. 1).

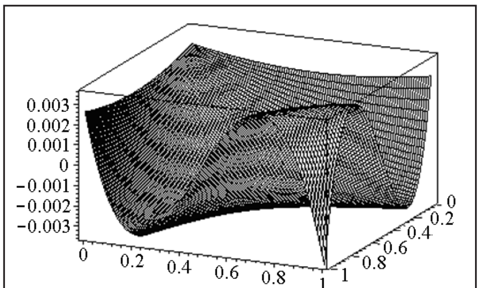

Рис. 1. Изображение поверхности погрешности аппроксимации функции $z_1(x, y)$ полиномом (11)

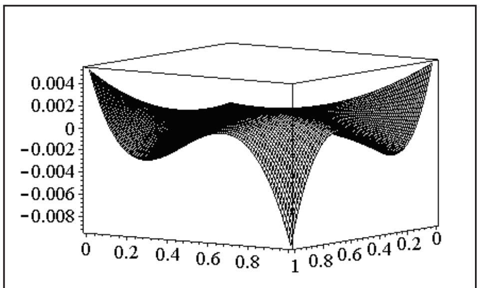

Рис. 2. Изображение поверхности погрешности аппроксимации функции $z_1(x, y)$ полиномом вида (11) методом наименьших квадратов

Аналогичная картина наблюдается и в других примерах, а именно в результате итераций (9), (10) значения погрешности аппроксимации равномерно перераспределяются среди всех точек области приближения. При этом наибольшие по модулю положительные и отрицательные отклонения полученной аппроксимации от значений функции $z_1(x, y)$ почти совпадают.

Пример 2. Найдем равномерное приближение функции $z_2(x, y) = \cos x \sin y$, заданной в точках (x_i, y_j), $i = \overline{0, 10}$, $j = \overline{0, 10}$, где $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, полиномом четвертой степени относительно переменных x и y.

С использованием предложенного метода за три итерации для функции $z_2(x, y)$ получен полином

$$\begin{aligned} P_4(x, y) = {} & 0.00007003027 - 0.004473027023x - 0.004485420767y + 1.035828115xy + \\ & + 0.01878741822x^2 + 0.01887016623y^2 + 0.05853920862x^2y^2 - 0.02499152596x^3 - \\ & - 0.02516825582y^3 - 0.06918752534x^2y + 0.0108396985x^4 + 0.010942974y^4 - \\ & - 0.1242098179x^3y - 0.06907102155xy^2 - 0.1242807730xy^3, \end{aligned} \tag{12}$$

который обеспечивает абсолютную погрешность приближения 0.000262904.

Изображение поверхности полученной погрешности аппроксимации показано на рис. 3.

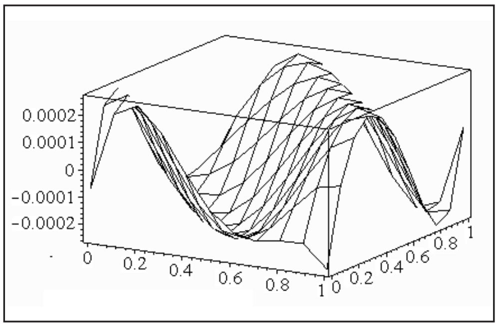

Рис. 3. Изображение поверхности погрешности аппроксимации функции $z_2(x, y)$ полиномом (12)

Пример 2 использован в работе [1], в которой для получения равномерного приближения функции $z_2(x, y)$ полиномом вида (12) применяется алгоритм на основе метода линейного программирования. Абсолютная погрешность аппроксимации функции $z_2(x, y)$ этим методом составляла 0.0002732 и была достигнута на 25-м шаге. Этот же пример для тестирования программы чебышевского приближения функций многих переменных использовал В.П. Кондратьев [2]. Программа, разработанная В.П. Кондратьевым на основе метода линейного программирования, обеспечила погрешность аппроксимации 0.0002735 за 43 шага. Такая же задача была решена с помощью MATLAB-функции fminimax за две итерации с погрешностью 0.00027392.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод приближения непрерывных таблично-заданных функций двух переменных обобщенным полиномом обеспечивает возможность получения аппроксимации с почти равномерным разнесением погрешности приближения среди всех точек задания функции. При этом наибольшие по модулю положительные и отрицательные отклонения получаемых аппроксимаций от значений приближаемых функций почти совпадают. Точность приближения функций этим методом не хуже, чем при использовании метода линейной оптимизации (см. пример 2). Следовательно, получаемые этим методом аппроксимации достаточно близки по точности приближения к наилучшему приближению.

Идея предложенного метода допускает его использование для аппроксимации непрерывных таблично-заданных функций многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
2. Кондратьев В. П. Алгоритм наилучшего приближения функций многих переменных. В кн.: Программы оптимизации: приближение функций. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. Вып. 3. С. 20–48.
3. Brown J.A., Henry M.S. Best Chebyshev composite approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1975. Vol. 12, N 3. P. 336–344.
4. Henry J.N. Comparison of algorithms for multivariate rational approximation. *Math. Comp*. 1977 Vol. 31, N 138. P. 485-494.
5. Криворучко Г.Ф., Попов Б.А. Алгоритм наилучшего чебышевского приближения табличной функции двух переменных. *Отбор и преобразование информации*. 1988. Вып. 2. С. 56–67.
6. Гапонюк Я.В. Знаходження найкращих рівномірних многочленних двовимірних наближень. *Відбір і обробка інформації*. 1998. № 12 (88). С. 130–133.
7. Малачівський П.С., Монцібович Б.Р. Рівномірне наближення функції двох змінних. *Обчислювальні методи і системи перетворення інформації*. Зб. праць IV наук.-техн. конф., Львів, 28–30 вересня 2016 р. Львів: ФМІ НАНУ, 2016. С. 179–180.
8. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка, 1980. 352 с.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.

Надійшла до редакції 18.11.2016

П.С. Малачівський, Я.М. Матвійчук, Я.В. Пізюр, Р.П. Малачівський

РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Анотація. Запропоновано алгоритм побудови рівномірного наближення функцій двох змінних як граничного наближення у нормі L^p при $p \to \infty$. Він ґрунтується на використанні середньоквадратичного наближення зі змінною ваговою функцією. Запропоновано спосіб послідовного уточнення вагової функції. Наведено приклади рівномірного наближення таблично-заданих функцій двох змінних з використанням методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією.

Ключові слова: рівномірне наближення, функція двох змінних, наближення у просторі L^p, метод найменших квадратів зі змінною ваговою функцією.

P.S. Malachivskyy, Ya.N. Matviychuk, Ya.V. Pizyur, R.P. Malachivskyi

UNIFORM APPROXIMATION OF FUNCTION OF TWO VARIABLES

Abstract. The algorithm for uniform approximation of function of two variables is described as approximation in norm L^p as $p \to \infty$. It is based on mean square approximation with variable weight function. The technique of successive adjustment of weight function is proposed. The examples for uniform approximation of table-defined functions of two vaiables using mean square approximation with variable weight function are given.

Keywords: uniform approximation, function of two variables, approximation in the norm of space L^p, mean square approximation with changed weight function.

Малачивский Петро Стефанович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Центра математического моделирования Института прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстрыгача НАН Украины, Львов, e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Матвийчук Ярослав Николаевич,
доктор техн. наук, профессор, заведующий кафедрой Института предпринимательства и перспективных технологий Национального университета «Львовская политехника», e-mail: matv@ua.fm.

Пизюр Ярополк Владимирович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Национального университета «Львовская политехника»,
e-mail: pizyur@yahoo.com.

Малачивский Роман Петрович,
инженер Национального университета «Львовская политехника»,
e-mail: roman.malachivsky@gmail.com.