УДК 519.8

С.О. МАЩЕНКО, В.И. МОРЕНЕЦ

ВЕКТОР ШЕПЛИ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ С НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ ДОПУСТИМЫХ КОАЛИЦИЙ

Аннотация. Исследуется вектор Шепли в кооперативной игре с нечетким множеством допустимых коалиций. Показано, что множество его значений является нечетким множеством типа 2 (нечеткое множество, функция принадлежности которого принимает нечеткие значения) специального вида. Построена функция принадлежности. Элементы носителя этого множества определены как частные значения вектора Шепли. Предложена процедура их построения с максимальной достоверностью принадлежности множеству векторов Шепли и достоверностью непринадлежности, не превышающей заданной величины.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое множество типа 2, вектор Шепли, кооперативные игры.

ВВЕДЕНИЕ

В классических кооперативных играх игроки могут образовывать любые коалиции. Поскольку опыт решения реальных конфликтов показывает, что иногда возникают ситуации, в которых не все коалиции возможны, то изучение игр с ограниченной кооперацией представляет значительный интерес. Первые исследования в этом направлении были проведены R. Myerson [1], который обобщил вектор Шепли на игры с заданной коалиционной структурой, дал определение и аксиоматизацию. В дальнейшем именно этот принцип оптимальности изучался для различных вариантов кооперации игроков. В [2] рассмотрено позиционное значение игры. В [3, 4] для некоторых специфических коалиционных структур построены аналоги вектора Шепли. В этих работах ограниченная кооперация задавалась с помощью графа связей между игроками или наперед заданного набора допустимых коалиций. В статье [5] построен однопараметрический набор решений кооперативных игр, в котором максимальный размер разрешенных коалиций используется в качестве параметра. Работы [6–9] посвящены обобщенным значениям вектора Шепли для широкого класса игр. Рассматривались случаи как для обычных кооперативных игр, так и для игр с ограниченной кооперацией. Предложенные авторами подходы основаны на том факте, что вектор Шепли является решением некоторой задачи оптимизации, которая может быть сформулирована также и для игр с ограниченной кооперацией.

В настоящей работе предложено обобщение вектора Шепли на случай кооперативной игры с нечетким множеством допустимых коалиций.

ВЕКТОР ШЕПЛИ

Рассмотрим кооперативную игру в характеристической форме $\langle N, v\rangle$, где $N=\{1,\dots,n\}$ — множество игроков, $n \ge 2$; $v: 2^N \to R^1$ — характеристическая функция, которая каждой коалиции игроков $T \subseteq N$ сопоставляет ее гарантированный выигрыш $v(T)$, причем $v(\varnothing)=0$, $v(S \cup T) \ge v(S)+v(T)$ $\forall S, T \subset N$, $S \cap T=\varnothing$.

Вектором Шепли кооперативной игры в характеристической форме $\langle N, v\rangle$ называется [7] распределение $x(v)=(x_1(v),\ldots,x_n(v))$ совокупного выигрыша $v(N)$ между игроками, в котором каждый i-игрок получает долю

$$x_i(v)=\sum_{K\subset N:\, i\in K}\frac{(|N|-|K|)!(|K|-1)!}{|N|!}(v(K)-v(K\setminus i)),\ i\in N,$$

где $|\cdot|$ — мощность множества.

Вектор Шепли удовлетворяет следующим свойствам.

A1 (аксиома эффективности). Вектор Шепли позволяет полностью распределить между игроками совокупный выигрыш $v(N)$, т.е. $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$.

A2 (аксиома симметричности). Выигрыш каждого игрока не зависит от его порядкового номера, т.е. $x_i(v)=x_{\pi(i)}(v)$ для любого автоморфизма игры π (перестановка множества игроков N, удовлетворяющая условию $v(T)=v(\pi(T))$ для любой коалиции T).

A3 (аксиома линейности). Если $\langle N, v_1\rangle$ и $\langle N, v_2\rangle$ — кооперативные игры, то $x(v_1+v_2)=x(v_1)+x(v_2)$, где $x(v_1+v_2)$ — вектор Шепли игры $\langle N, v_1+v_2\rangle$, а $x(v_k)$ — вектор Шепли игры $\langle N, v_k\rangle$, $k=1,2$. Для любой игры $\langle N, v\rangle$ и любого числа α $x(\alpha v)=\alpha x(v)$.

A4 (аксиома «болвана»). Если игрок $i\in N$ не вносит вклада в какую-либо коалицию $T\subseteq N$, к которой он присоединяется, т.е. $v(T)-v(T\setminus\{i\})=0$ $\forall T\subseteq N: i\in T$, то его доля $x_i(v)=0$.

Согласно теореме Шепли [10] единственное распределение $x(v)$ совокупного выигрыша $v(N)$, удовлетворяющее аксиомам A1–A4, — это вектор Шепли.

Существуют и другие характеризации вектора Шепли [6]. В частности, вектор Шепли для игры $\langle N, v\rangle$ является решением задачи оптимизации

$$\sum_{K\subset N}(|K|-1)!(|N|-|K|-1)!\left(v(K)-\sum_{i\in K}x_i\right)^2\to\min \tag{1}$$

при ограничении

$$\sum_{i\in N}x_i = v(N)\,. \tag{2}$$

Данное оптимизационное определение показывает, что вектор Шепли принадлежит классу значений кооперативных игр типа наименьших квадратов [7], представляющих собой решения аналогичных задач оптимизации.

ВЕКТОР ШЕПЛИ В ИГРАХ С ОГРАНИЧЕННОЙ КООПЕРАЦИЕЙ

Согласно [1] кооперативной игрой с ограниченной кооперацией называется тройка $\langle N, v, \Omega\rangle$, где $N=\{1,2,\ldots,n\}$ — конечное множество игроков, $n\geq 2$; $\Omega\subseteq 2^N$ — множество допустимых коалиций; $v:\Omega\to R$ — характеристическая функция. Игроки коалиции $S\subset N$ могут сотрудничать друг с другом и приносить выигрыш $v(S)$, только если $S\in\Omega$.

Известно несколько методов адаптации вектора Шепли к играм с ограниченной кооперацией общего вида, которые заключаются в доопределении характеристической функции на всех недопустимых коалициях и последующем применении классического решения к полученной игре с полной кооперацией [4, 8].

Наиболее естественно можно обобщить [9] оптимизационное определение (1), (2). В этом случае вектор Шепли для кооперативной игры с ограниченной кооперацией $\langle N, v, \Omega \rangle$ определяется как решение задачи оптимизации

$$\sum_{S \in \Omega} (|S|-1)!(|N|-|S|-1)! \left(v(S) - \sum_{i \in K} x_i \right)^2 \to \min \tag{3}$$

при ограничении

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \tag{4}$$

Для того чтобы прояснить смысл задачи (3), (4), введем дополнительные переменные $y_S = \sum_{i \in S} x_i$, $S \in \Omega$, и представим ее в виде

$$\sum_{S \in \Omega} (|S|-1)!(|N|-|S|-1)!(v(S) - y_S)^2 \to \min \tag{5}$$

при ограничениях

$$y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0, \; S \in \Omega, \tag{6}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \tag{7}$$

В данной задаче целевая функция (5) при условии (7) минимизируется только по аргументам y_S, соответствующим допустимым коалициям $S \in \Omega$.

ИГРА С НЕЧЕТКИМ МНОЖЕСТВОМ ДОПУСТИМЫХ КОАЛИЦИЙ

Предположим, что игроки не могут четко определить, какие коалиции из множества $\Omega = 2^N \setminus N$ всех возможных могут быть допустимыми, а им известна лишь функция принадлежности $\mu(S)$, $S \in \Omega$, нечеткого множества $\widetilde{\Omega} = \bigcup_{S \in \Omega} (S, \mu(S))$ допустимых коалиций. Тогда возникает кооперативная игра с нечетким множеством допустимых коалиций, которая задается тройкой $\langle N, v, \widetilde{\Omega} \rangle$. Если обобщить оптимизационное определение (5)–(7) вектора Шепли в играх с ограниченной кооперацией на этот случай, то получим задачу, которую можно сформулировать следующим образом:

$$\sum_{S \in \Omega} (|S|-1)!(|N|-|S|-1)!(v(S) - y_S)^2 \to \min \tag{8}$$

при ограничениях

$$y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0, \; (S, \mu(S)) \in \widetilde{\Omega}, \tag{9}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N). \tag{10}$$

Запись вида (9) интерпретируем следующим образом. Переменная y_S имеется во множестве аргументов, по которым минимизируется целевая функция (8) при условии (10), со степенью принадлежности $\mu(S)$. Для более полного понимания (9) обозначим $F_S = \{(x, y_S) \mid y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0\}$ множество векторов (x, y_S), удовлетворяющих условию $y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0$ для коалиции $S \in \Omega$. Тогда запись вида (9) задает множество $\widetilde{F} = \widetilde{\bigcap\limits_{(S,\mu(S))\in\widetilde{\Omega}}} F_S$, где согласно [11] $\widetilde{\bigcap\limits_{(S,\mu(S))\in\widetilde{\Omega}}} F_S$ — пересечение нечеткого множества $\widetilde{\Omega}$ четких множеств F_S, которое представляет собой нечеткое множество типа 2 (НМТ-2).

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ НЕЧЕТКОГО МНОЖЕСТВА ЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Определим данное понятие в соответствии с подходом, предложенным в [11]. Рассмотрим конечную совокупность некоторых четких множеств F_S, $S \in \Omega$, заданных в некотором пространстве R^m, с функциями принадлежности (характеристическими функциями) соответственно

$$\varphi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in F_S, \\ 0, & x \notin F_S, \end{cases}$$

$S \in \Omega$. Для произвольного $x \in R^m$ введем отношение доминирования на множестве коалиций Ω.

Будем считать, что коалиция $S \in \Omega$ доминирует коалицию $T \in \Omega$ для $x \in R^m$, и обозначать это $S \succ_x T$, если справедливы неравенства $\varphi_S(x) \le \varphi_T(x)$, $\mu(S) \ge \mu(T)$ и хотя бы одно из них строгое. Обозначим

$$\widetilde{\mu}(x,S) = \begin{cases} \mu(S), & S \in PO(x), \\ 0, & S \notin PO(x), \end{cases}$$

где $PO(x) = \{S \in \Omega | T \not\succ_x S \quad \forall T \in \Omega\}$ — множество недоминируемых коалиций по отношению $\succ_x$ для фиксированного вектора $x \in R^m$.

Пересечением нечеткого множества $\widetilde{\Omega}$ четких множеств F_S, $S \in \Omega$, согласно [11] называется $\widetilde{F} = \widetilde{\bigcap\limits_{(S,\mu(S))\in\widetilde{\Omega}}} F_S$ — НМТ-2, которое задается множеством троек $(x, \psi(x,z))$, где x — вектор из R^m; z — элемент множества степеней принадлежности НМТ-2 $\widetilde{F}$;

$$\psi(x,z) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega} \{\widetilde{\mu}(x,S) | \varphi_S(x) = z\}, & \exists S \in \Omega, \ \varphi_S(x) = z, \\ 0, & \forall S \in \Omega, \ \varphi_S(x) \ne z; \end{cases}$$

$x \in X$; $z \in \{0,1\}$ — функция принадлежности некоторого нечеткого отображения $\widetilde{\Psi}$, задающего нечеткую функцию принадлежности НМТ-2 $\widetilde{F}$.

Поскольку функция принадлежности $\psi(x,z)$ однозначно определяет нечеткое отображение $\widetilde{\Psi}$, которое, в свою очередь, однозначно определяет НМТ-2 $\widetilde{F}$, далее будем использовать ее. Для удобства (чтобы не путать с нечеткой функцией принадлежности) назовем $\psi(x,z)$ функцией достоверности НМТ-2 $\widetilde{F}$.

Обозначим $S^* = \operatorname{Arg}\max\limits_{T\in\Omega} \mu(T)$ множество коалиций с максимальной степенью принадлежности к нечеткому множеству допустимых коалиций.

Упростить построение функции достоверности $\psi(x,z)$ позволяет следующая теорема, доказанная в [11].

Теорема 1. Пусть F_S, $S \in \Omega$, — четкие множества, заданные в R^m соответствующими функциями принадлежности $\varphi_S(x)$, $S \in \Omega$; $\mu(S)$, $S \in \Omega$, — функция принадлежности нечеткого множества коалиций $\widetilde{\Omega}$. Для того чтобы НМТ-2 $\widetilde{F}$ с функцией достоверности $\psi(x,z)$, $x \in R^m$, $z \in \{0,1\}$, было пересечением нечеткого множества $\widetilde{\Omega}$ четких множеств F_S, $S \in \Omega$, т.е. $\widetilde{F} = \widetilde{\bigcap}_{(S,\mu(S))\in\widetilde{\Omega}} F_S$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega} \{\mu(S) | \varphi_S(x) = 0\}, & \exists S \in \Omega,\ \varphi_S(x) = 0, \\ 0, & \forall S \in \Omega,\ \varphi_S(x) = 1, \end{cases}$$

$$\psi(x,1) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega} \mu(S), & \forall S \in S^*,\ \varphi_S(x) = 1, \\ 0, & \exists S \in S^*,\ \varphi_S(x) = 0. \end{cases}$$

НЕЧЕТКОЕ МНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ ШЕПЛИ

Продолжим рассмотрение игры с нечетким множеством допустимых коалиций. На основании изложенных выше соображений очевидно, что множество $\widetilde{F} = \widetilde{\bigcap}_{(S,\mu(S))\in\widetilde{\Omega}} F_S$ допустимых решений задачи (8)–(10) является НМТ-2, которое задается функцией достоверности $\psi(x, y, z)$, $x \in R^n$, $y \in R^{|\Omega|}$, $z \in \{0,1\}$, где

$$\psi(x, y, 0) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega} \{\mu(S) | y_S - \sum\limits_{i\in S} x_i \neq 0\}, & \exists S \in \Omega,\ y_S - \sum\limits_{i\in S} x_i \neq 0, \\ 0, & \forall S \in \Omega,\ y_S - \sum\limits_{i\in S} x_i = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\psi(x, y, 1) = \begin{cases} \max\limits_{S\in\Omega} \mu(S), & \forall S \in S^*,\ y_S - \sum\limits_{i\in S} x_i = 0, \\ 0, & \exists S \in S^*,\ y_S - \sum\limits_{i\in S} x_i \neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что значение $\psi(x, y, 0)$ можно понимать как достоверность недопустимости вектора $(x, y) = ((x_i)_{i\in N}, (y_S)_{S\in\Omega})$ в задаче (8)–(10), соответственно значение $\psi(x, y, 1)$ — как достоверность его допустимости.

В реальной игровой ситуации игроки будут стремиться минимизировать кроме целевой функции (8) еще достоверность $\psi(x, y, 0)$ недопустимости вектора (x, y) в задаче (8)–(10), а также максимизировать достоверность $\psi(x, y, 1)$ его допустимости. Таким образом, перед игроками возникает следующая трехкритериальная задача:

$$g(y) = \sum_{S\in\Omega} (|S|-1)!(|N|-|S|-1)!(v(S) - y_S)^2 \to \min, \tag{13}$$

$$\psi(x, y, 0) \to \min, \tag{14}$$

$$\psi(x, y, 1) \to \max \tag{15}$$

при ограничении

$$\sum_{i\in N} x_i = v(N). \tag{16}$$

Обозначим X множество векторов $x \in R^n$, удовлетворяющих (16). Также обозначим SO множество оптимальных по Слэйтеру (слабо оптимальных по Парето) решений задачи (13)–(16). Напомним, что вектор (x^*, y^*) называется оптимальным по Слэйтеру решением задачи вида (13)–(16), если $\nexists\; x \in X \;\; \nexists\; y \in R^{|\Omega|}$, для которых имеют место следующие неравенства: $g(y) < g(y^*)$, $\psi(x, y, 1) > \psi(x^*, y^*, 1)$, $\psi(x, y, 0) < \psi(x^*, y^*, 0)$.

Нечетким множеством решений задачи (8)–(10) назовем НМТ-2 с функцией достоверности $\widetilde{\psi}(x, y, z)$, $x \in X$, $y \in R^{|\Omega|}$, $z \in \{0,1\}$, где

$$\widetilde{\psi}(x, y, z) = \begin{cases} \psi(x, y, z), & (x, y) \in SO, \\ 0, & (x, y) \notin SO. \end{cases}$$

Для построения нечеткого множества решений задачи (8)–(10) необходимо разработать способ нахождения элементов его носителя SO. В общем случае это можно сделать с помощью того или иного метода многокритериальной оптимизации, решив трехкритериальную задачу (13)–(16).

Оптимальное по Слейтеру решение (x^*, y^*) задачи (13)–(16) при условиях $\psi(x^*, y^*, 0) > 0$ и $\psi(x^*, y^*, 1) > 0$ назовем частным решением задачи (8)–(10) с достоверностями $\psi(x^*, y^*, 0)$ и $\psi(x^*, y^*, 1)$ соответственно его недопустимости и допустимости.

Трехкритериальную задачу (13)–(16) непросто решить из-за сложности функции достоверности $\psi(x, y, z)$. Поэтому возникает проблема разработки метода ее решения, который позволил бы достаточно легко находить какие-то варианты ее решения.

Обозначим $\Omega^{\xi} = \{T \in \Omega \mid \mu(T) \le \xi\}$ множество коалиций, имеющих степень принадлежности нечеткому множеству допустимых коалиций $\widetilde{\Omega}$ не более $\xi \in (0,1)$. Также обозначим:

$$D_+(T, \xi) = \{(x, y) \mid y_T - \sum_{i \in T} x_i > 0;\; y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0,\; S \in \Omega \setminus \Omega^{\xi};\; x \in X\},\;\; T \in \Omega^{\xi}, \tag{17}$$

$$D_-(T, \xi) = \{(x, y) \mid y_T - \sum_{i \in T} x_i < 0;\; y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0,\; S \in \Omega \setminus \Omega^{\xi};\; x \in X\},\;\; T \in \Omega^{\xi}. \tag{18}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\xi \in (0,1)$ — заданное значение параметра. Тогда если задача

$$\min_{T \in \Omega^{\xi}} \min \left\{ \min_{(x, y) \in D_-(T, \xi)} g(y),\; \min_{(x, y) \in D_+(T, \xi)} g(y) \right\} \tag{19}$$

имеет оптимальное решение (x^*, y^*), то оно будет частным решением задачи (8)–(10) с достоверностью допустимости $\mu^{\max} = \max_{S \in \Omega} \mu(S)$ и достоверностью недопустимости не более чем ξ.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$Q(\xi) = \{(x, y) \mid 0 < \psi(x, y, 0) \le \xi;\; y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0,\; S \in \Omega \setminus \Omega^{\xi};\; x \in X\}. \tag{20}$$

Обозначим $P(\xi) = \bigcup_{T\in\Omega^{\xi}} (D_{+}(T,\xi) \cup D_{-}(T,\xi))$. Отсюда с учетом (17), (18) получим

$$P(\xi) = \bigcup_{T\in\Omega^{\xi}} \left\{ (x, y) | \, y_T - \sum_{i\in T} x_i \neq 0; \, y_S - \sum_{i\in S} x_i = 0, S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}; x\in X \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y) | \, y_S - \sum_{i\in S} x_i = 0, \; S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}; x\in X \right\} \bigcap$$

$$\bigcap \left(\bigcup_{T\in\Omega^{\xi}} \{(x, y) | \, y_T - \sum_{i\in T} x_i \neq 0; x\in X \right). \tag{21}$$

Сначала докажем

$$P(\xi) = Q(\xi). \tag{22}$$

Покажем включение $P(\xi) \subseteq Q(\xi)$. Если $P(\xi) = \varnothing$, то оно очевидно. Пусть $(x^{*}, \, y^{*}) \in P(\xi) \neq \varnothing$. Предположим противное, что $(x^{*}, \, y^{*}) \notin Q(\xi)$. Тогда согласно (20) возможны два случая. В первом случае $\psi(x^{*}, \, y^{*}, 0) > \xi$. Отсюда и из формулы (11) получим $\psi(x^{*}, \, y^{*}, 0) = \max_{S\in\Omega} \{\mu(S) | \, y_S^{*} - \sum_{i\in S} x_i^{*} \neq 0\} > \xi$. Тогда $\exists\, S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}$, для которой $y_S^{*} - \sum_{i\in S} x_i^{*} \neq 0$. Поэтому согласно (21) $(x^{*}, \, y^{*}) \notin P(\xi)$. Получили противоречие. Во втором случае $\exists\, S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}$, для которого $y_S^{*} - \sum_{i\in S} x_i^{*} \neq 0$. Отсюда и из (21) получим $(x^{*}, \, y^{*}) \notin P(\xi)$. Также получили противоречие. Таким образом, $(x^{*}, \, y^{*}) \in Q(\xi)$ и поэтому $P(\xi) \subseteq Q(\xi)$.

Покажем включение $Q(\xi) \subseteq P(\xi)$. Если $Q(\xi) = \varnothing$, то оно очевидно. Пусть $(x^{*}, \, y^{*}) \in Q(\xi) \neq \varnothing$. Предположим противное, что $(x^{*}, \, y^{*}) \notin P(\xi)$. Тогда согласно (21) возможны два случая. В первом случае $\exists\, S\in\Omega\setminus\Omega^{\xi}$ $y_S^{*} - \sum_{i\in S} x_i^{*} \neq 0$. Отсюда и из (20) следует, что $(x^{*}, \, y^{*}) \notin Q(\xi)$. Получили противоречие. Во втором случае $(x^{*}, \, y^{*}) \notin \bigcup_{T\in\Omega^{\xi}} \{(x, y) | \, y_T - \sum_{i\in T} x_i \neq 0; x\in X\}$. Тогда $\forall\, T\in\Omega^{\xi}$ $y_T^{*} - \sum_{i\in T} x_i^{*} = 0$. Поскольку $\Omega^{\xi} = \{T\in\Omega | \, \mu(T) \leq \xi\}$, из (11) следует, что либо $\psi(x^{*}, \, y^{*}, \, 0) = \max_{S\in\Omega} \{\mu(S)|$, либо $\psi(x^{*}, \, y^{*}, 0) = 0$. В обоих случаях согласно (20) $(x^{*}, \, y^{*}) \notin Q(\xi)$. Также получили противоречие. Таким образом, $(x^{*}, \, y^{*}) \in P(\xi)$ и поэтому $Q(\xi) \subseteq P(\xi)$. Равенство (22) доказано.

Завершим доказательство теоремы. Из (22) следует эквивалентность (19) и задачи

$$g(y) \to \min_{(x, y)\in Q(\xi)}. \tag{23}$$

Покажем, что для любого заданного значения параметра $\xi \in (0, 1)$, при котором задача (23) имеет оптимальное решение, оно будет частным решением задачи (8)–(10) с достоверностью допустимости $\mu^{\max} = \max_{S\in\Omega} \mu(S)$ и достоверностью недопустимости не более чем ξ. Обозначим $(x^{*}, \, y^{*})$ оптимальное решение задачи (23) для некоторого значения $\xi \in (0,1)$. Тогда из (20) и (12) вытекает

$$\psi(x^*, y^*, 1) = \max_{S \in \Omega} \mu(S) = \mu^{\max}. \tag{24}$$

Из (20) также следует $0 < \psi(x^*, y^*, 0) \le \xi$.

Покажем, что $(x^*, y^*) \in SO$. Предположим противное, что $(x^*, y^*) \notin SO$. Тогда $\exists\, \hat{x} \in X$, $\exists\, \hat{y} \in R^{|\Omega|}$, для которых выполняются следующие неравенства: $g(\hat{y}) < g(y^*)$, $\psi(\hat{x}, \hat{y}, 1) > \psi(x^*, y^*, 1)$, $\psi(\hat{x}, \hat{y}, 0) < \psi(x^*, y^*, 0)$. Отсюда имеем $\psi(\hat{x}, \hat{y}, 1) > \psi(x^*, y^*, 1) = \mu^{\max}$. Получили противоречие с (24). Таким образом, $(x^*, y^*) \in SO$, причем $\psi(x^*, y^*, 1) = \max\limits_{S \in \Omega} \mu(S) = \mu^{\max}$ и $0 < \psi(x^*, y^*, 0) \le \xi$.

Теорема доказана.

Обозначим $SO_x = \{x \in X \mid \exists\, y \in R^{|\Omega|} (x, y) \in SO\}$ множество подвекторов x элементов (x, y) носителя SO нечеткого множества решений задачи (8)–(10). Из построения этой задачи и согласно принципу обобщения L. Zadeh [12, 13] можно предположить, что множество векторов Шепли кооперативной игры G с нечетким множеством допустимых коалиций также образует НМТ-2, но с носителем SO_x и функцией достоверности

$$\omega(x, z) = \begin{cases} \max\limits_{y} \{\psi(x, y, z) \mid (x, y) \in SO\}, & x \in SO_x, \\ 0, & x \notin SO_x, \end{cases}$$

где $x \in X$, $z \in \{0, 1\}$. Здесь $\omega(x, 0)$ следует понимать как достоверность непринадлежности $x = (x_i)_{i \in N}$ множеству векторов Шепли кооперативной игры G с нечетким множеством допустимых коалиций, а $\omega(x, 1)$ — как достоверность принадлежности.

Вектор $x^* \in SO_x$ назовем частным значением вектора Шепли в кооперативной игре G с нечетким множеством допустимых коалиций с достоверностями $\omega(x^*, 0)$ и $\omega(x^*, 1)$ соответственно его непринадлежности и принадлежности множеству векторов Шепли.

ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ЧАСТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

На основании теоремы 2 достаточно выполнить следующие действия:

— выбрать число $\xi \in (0,1)$, которое согласно теореме 2 характеризует максимальную достоверность непринадлежности найденного решения множеству векторов Шепли кооперативной игры G с нечетким множеством допустимых коалиций;

— построить множество коалиций $\Omega^{\xi} = \{S \in \Omega \mid \mu(S) \le \xi\}$, имеющих степень принадлежности к допустимым коалициям не более $\xi \in (0, 1)$;

— для каждой коалиции $T \in \Omega^{\xi}$ решить задачу

$$\sum_{S \in \Omega} (|S|-1)!(|N|-|S|-1)!(v(S) - y_S)^2 \to \min \tag{25}$$

при ограничениях

$$y_S - \sum_{i \in S} x_i = 0, \ S \in \Omega \setminus \Omega^{\xi}, \tag{26}$$

$$y_T - \sum_{i \in T} x_i > 0, \tag{27}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{28}$$

и задачу минимизации (25) при ограничениях (26), (28), а также условии $y_T - \sum_{i \in T} x_i$ 0; решение каждой задачи, если оно существует, обозначим соответственно $(x_+^{(T)},\ y_+^{(T)})$ и $(x_-^{(T)},\ y_-^{(T)})$, в противном случае выбираем другую коалицию — $T \in \Omega^{\xi}$;

— из полученных решений $(x_+^{(T)},\ y_+^{(T)})$, $(x_-^{(T)},\ y_-^{(T)})$, $T \in \Omega^{\xi}$, выбираем рекордное значение $(\hat{x},\ \hat{y})$ по целевой функции, т.е. $(\hat{x},\ \hat{y}) = \arg \min\limits_{T \in \Omega^{\xi}} \min \{g(y_+^{(T)}), g(y_-^{(T)})\}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны концепция множества векторов Шепли в кооперативных играх с нечетким множеством допустимых коалиций и метод его построения. Согласно предложенному подходу это множество рассматривается как НМТ-2, полученное в результате реализации операции над множествами — пересечения нечеткого множества четких множеств. Особенность такого представления в том, что элементы носителя множества (частные решения Шепли) характеризуются двумя показателями: достоверностью их принадлежности множеству векторов Шепли и достоверностью непринадлежности. Сам носитель является множеством подвекторов оптимальных по Слейтеру решений трехкритериальной задачи оптимизации. Разработан метод, позволяющий находить частные значения векторов Шепли с максимальной достоверностью их принадлежности множеству векторов Шепли и достоверностью непринадлежности не более заданного числа. Предложенный подход расширяет область применения теории нечетких множеств в кооперативных играх с нечетким множеством допустимых коалиций и может генерировать новые подходы к решению других постановок игровых задач с нечеткой структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Myerson R.B. Graphs and cooperation in games. *Mathematics of Operations Research*. 1977. Vol. 2. P. 225–229.
2. Borm P., Owen G., Tijs S. On the position value for communication situations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. 1992. Vol. 5. P. 305–320.
3. Algaba E., Bilbao J.M., Borm P., López J.J. The Myerson value for union stable structure. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2001. Vol. 54. P. 359–371.
4. Algaba E., Bilbao J.M., van den Brink R., Jiménez-Losada A. An axiomatization of the Banzhaf value for cooperative games on antimatroids. *Mathematical Methods of Operations Research*. 2004. Vol. 59. P. 147–166.
5. Кацев И.В., Яновская Е.Б. Промежуточные между пред *k*- и пред *n*-ядрами решения кооперативных игр. *Управление большими системами*. 2009. Т. 26-1. С. 32–54.
6. Charnes A., Golany B., Keane M., Rousseau J. Extremal principle solutions of games in characteristic function form: core, Chebyshev and Shapley value generalizations. In: Econometrics of planning and efficiency. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1988. P. 123–133.
7. Ruiz L.M., Valenciano F., Zarzuelo J.M. The family of least square values for transferable utility games. *Games and Economic Behavior*. 1998. Vol. 24. P. 109–130.
8. Derks J., Peters H. A Shapley value for games with restricted coalitions. *Int. J. Game Theory*. 1993. Vol. 21. P. 351–360.
9. Katsev I.V. The least square values for games with restricted cooperation (July 22, 2013). URL: http://ssrn.com.secure.sci-hub.bz/abstract=2364998.

10. Shapley L. S. A value for N-person games. In: Contributions to the Theory of Games. Vol II. Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

11. Мащенко С.О. Задача математического программирования с нечетким множеством индексов ограничений. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 1. С. 62–68.

12. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Векторные задачи оптимизации с линейными критериями на нечетко заданном комбинаторном множестве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 2. С. 88–99.

13. Zadeh L. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. *Information Sciences*. 1975. Vol. 8. P. 199–249.

Надійшла до редакції 06.12.2016

С.О. Мащенко, В.І. Моренець

ВЕКТОР ШЕПЛІ КООПЕРАТИВНОЇ ГРИ З НЕЧІТКОЮ МНОЖИНОЮ ДОПУСТИМИХ КОАЛІЦІЙ

Анотація. Досліджується вектор Шеплі в кооперативній грі з нечіткою множиною допустимих коаліцій. Показано, що множина його значень є нечіткою множиною типу 2 (нечітка множина, функція належності якої приймає нечіткі значення) спеціального вигляду. Побудовано функцію належності. Елементи носія цієї множини визначені як частинні значення вектора Шеплі. Запропоновано процедуру їхньої побудови з максимальною достовірністю належності множині векторів Шеплі та достовірністю неналежності, яка не перевищує заданої величини.

Ключові слова: нечітка множина, нечітка множина типу 2, вектор Шеплі, кооперативні ігри.

S.O. Mashchenko, V.I. Morenets

SHAPLEY VALUE OF A CO-OPERATIVE GAME WITH A FUZZY SET OF FEASIBLE COALITIONS

Abstract. The present paper investigates Shapley value of a co-operative game with a fuzzy set of feasible coalitions. It is shown that the set of its values is a type-2 fuzzy set (a fuzzy set whose membership function takes fuzzy values) of special type. Furthermore, the corresponding membership function is given. Elements of the support of this set are defined as particular Shapley values. We also propose the procedure of constructing these elements with maximal reliability of their membership and reliability of non membership, not exceeding a given threshold.

Keywords: fuzzy set, type 2 fuzzy set, Shapley value, co-operative games.

Мащенко Сергей Олегович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: s.o.mashchenko@gmail.com.

Моренец Владимир Игоревич,
аспирант Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: v.i.morenets@gmail.com.