КІБЕРНЕТИКА

С.И. ЗУБ, С.С. ЗУБ, В.С. ЛЯШКО, Н.И. ЛЯШКО, С.И. ЛЯШКО

УДК 519.6:531:537

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА С АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Аннотация. Рассмотрен симметричный волчок — частный случай механического волчка, распространенным методом описания которого является каноническая структура Пуассона на $T^* SE(3)$. Эта структура инвариантна относительно правого действия группы $SO(3)$, но гамильтониан симметричного волчка инвариантен только относительно правого действия подгруппы S^1, что соответствует вращению вокруг оси симметрии симметричного волчка. Данная структура Пуассона получена как редукция $T^* SE(3)/S^1$. Предложен гамильтониан и уравнения движения, которые описывают широкий класс моделей взаимодействия симметричного волчка с аксиально-симметричным внешним полем.

Ключевые слова: математическая модель симметричного волчка, пуассонова редукция, симплектические листы, 2-форма Кириллова–Костанта–Сурьо, относительное равновесие, метод энергии-момента.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая модель лагранжевого волчка известна давно, однако до сих пор она является объектом исследований [1]. Широкое применение теоретико-групповых методов гамильтоновой механики обусловило новый этап изучения этой классической модели [1, 2]. Эффективность последней проявилась при исследовании устойчивости магнитных динамических систем [3, 4]. Далее показано, что гамильтонова редукция от общего асимметричного тела к симметричному волчку приводит к структуре Ли–Пуассона, вложенной в $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$. Симплектические листы этой структуры являются орбитами коприсоединенного представления группы $SE(3)$.

1. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ НА $T^*SO(3)$

Представление правой тривиализации $T^*SO(3)$. Приведем некоторые полезные соотношения для группы $SO(3)$ и ее кокасательного расслоения, многие из которых рассмотрены в [2, 5]. Группа $SO(3)$ образована ортогональными, унимодулярными матрицами $\mathbf{R}$, т.е. $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}$, $\det(\mathbf{R}) = 1$. Соответственно алгебра Ли $\boldsymbol{so}(\mathbf{3})$ образована антисимметричными 3×3-матрицами со скобкой Ли в виде матричного коммутатора.

Введем изоморфизм векторных пространств $\hat{}:\mathbb{R}^3 \to \boldsymbol{so}(\mathbf{3})$ [2, p. 285] такой, что $\hat{\xi}_{kl} = -\varepsilon_{ikl}\xi_i$, $\xi_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ikl}\hat{\xi}_{kl}$, где ε_{ikl} — символ Леви–Чивиты. Тогда

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta};\ [\hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}] = \hat{\boldsymbol{\xi}}\,\hat{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}\,\hat{\boldsymbol{\xi}} = \widehat{\boldsymbol{\xi}\times\boldsymbol{\eta}}; \\ \langle\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\xi}}\,\hat{\boldsymbol{\eta}});\ \mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\xi}}\mathbf{B}^{-1} = \widehat{\mathbf{B}\boldsymbol{\xi}}. \end{cases}$$

Введенное скалярное произведение позволяет отождествить алгебру Ли и дуальное к ней пространство $\boldsymbol{so}(\mathbf{3})^* \simeq \boldsymbol{so}(\mathbf{3})$. Символ $\simeq$ обозначает диффеоморфизм. Как правило, используемые далее диффеоморфизмы имеют простой теоретико-групповой или дифференциально-геометрический смысл.

В представлении правой тривиализации, которая, как показано в [5, p. 314], соответствует инерциальной системе отсчета, имеем $TSO(3) \simeq SO(3)\times \boldsymbol{so}\,(\mathbf{3})$, $T^*SO(3) \simeq SO(3)\times \boldsymbol{so}(\mathbf{3})^*$. Тогда правое и левое действия группы $SO(3)$ на $T^*SO(3)$ (Cotangent Lift [2, p. 166]) имеют вид

$$\begin{cases} R^{ct}_{\mathbf{B}}:(\mathbf{R}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \in T^*SO(3) \to (\mathbf{RB}, \hat{\boldsymbol{\pi}}),\ \mathbf{B}\in SO(3); \\ L^{ct}_{\mathbf{B}}:(\mathbf{R}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \in T^*SO(3) \to (\mathbf{BR}, \mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{BR}, \operatorname{Ad}^*_{\mathbf{B}^{-1}}\hat{\boldsymbol{\pi}}). \end{cases} \tag{1}$$

Симплектическая и пуассонова структуры на $T^*SO(3)$ [1, 5–7]. Форма Лиувилля на $T^*SO(3) \simeq SO(3)\times \boldsymbol{so}\,(\mathbf{3})^*$ имеет вид

$$\Theta^{T^*SO(3)}_{|(\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\hat{\boldsymbol{\pi}}\,\widehat{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}}) = \pi_i \delta R^i,$$

где $\widehat{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}} = (d\mathbf{R})\mathbf{R}^{-1}$ — правоинвариантная 1-форма Маурера–Картана. Тогда для канонической симплектической 2-формы, используя уравнение Маурера–Картана [2, p. 276], получаем

$$\Omega^{T^*SO(3)}_{can} = -d\Theta^{T^*SO(3)} = \delta R^i \wedge d\pi_i - \pi_i[\delta R, \delta R]^i =$$
$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta R_{jk}\wedge d\pi_i + \frac{1}{2}\pi_i\varepsilon_{ijk}\delta R_{js}\wedge \delta R_{sk}.$$

Любая заданная симплектическая структура Ω определяет пуассонову структуру на том же многообразии следующим образом:

$$\{F, G\}(z) = \Omega(\xi_F(z), \xi_G(z)) = \partial_{\xi_G} F = -\partial_{\xi_F} G,$$

где для векторного поля ξ_G выполняется $i_{\xi_G}\Omega = dG$.

Рассматривая элементы матрицы $\mathbf{R}$ и компоненты момента $\boldsymbol{\pi}$ как динамические переменные на $T^*SO(3)$, получаем следующий набор скобок Пуассона (СП), полностью определяющий пуассонову структуру на $T^*SO(3)$:

$$\{R_{ij}, R_{kl}\} = 0,\ \{\pi_i, R_{jk}\} = \varepsilon_{ijl}R_{lk},\ \ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l. \tag{2}$$

Отметим, что в инерциальной системе СП для матричных элементов $\mathbf{R}$ группируются в столбцы, например, СП для третьего столбца выражаются только через элементы этого столбца.

2. РЕДУКЦИЯ ПУАССОНОВОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

Пуассонова структура (2) инвариантна относительно правых сдвигов постоянной матрицей $\mathbf{B} \in SO(3)$:

$$\{(RB)_{ij}, (RB)_{kl}\} = 0, \quad \{\pi_i, (RB)_{jn}\} = \varepsilon_{ijl}(RB)_{ln}, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l.$$

Для симметричного волчка интерес представляет подгруппа $S^1 \in SO(3)$, где $S^1 = \{\mathbf{Z} \in SO(3) \colon Z_{i3} = \delta_{i3}\}$ (предполагается, что ось симметрии тела направлена по вектору $\mathbf{E}_3$ системы отсчета, связанной с телом). Тогда $(\mathbf{RZ})_{i3} = R_{ij}Z_{j3} = R_{i3}$, т.е. третья строка матрицы $\mathbf{R}$ инвариантна при правых сдвигах, соответствующих подгруппе S^1.

Рассмотрим проекцию $SO(3)$ на сферу S^2 (как множество векторов $\boldsymbol{\nu}$ при $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$)

$$\tau \colon \mathbf{R} \mapsto \boldsymbol{\nu} = R_{i3}\boldsymbol{e}_i, \ \nu_i = R_{i3}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{e}_i$ — базисные векторы инерциальной системы отсчета. Эта проекция порождает отображение

$$\tilde{\tau} \colon T^*SO(3) \ni (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi}) \mapsto (\tau(\mathbf{R}), \boldsymbol{\pi}) = (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}) \in K_1,$$

где $K_1 \simeq S^2 \times \boldsymbol{so}(\mathbf{3})^* \subset \mathbb{R}^3 \times \boldsymbol{so}(\mathbf{3})^* \simeq \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^* = (\mathbb{R}^3 \circledS \boldsymbol{so}(\mathbf{3}))^*$.

Как и на любом пространстве, дуальном к алгебре Ли, на $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ имеется каноническая структура Ли–Пуассона [2, p. 425]. В данном случае [2, p. 367, 491] эта структура определяется такими СП:

$$\{\nu_i, \nu_k\} = 0, \ \{\pi_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijl}\nu_l, \ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l. \tag{4}$$

Сравнение (4) с (2) показывает, что сюръективное отображение $\tilde{\tau}$ является пуассоновым. Таким образом, выполняются условия теоремы 10.5.1 из [2, p. 355], и следовательно, $K_1 \simeq T^*SO(3)/S^1$.

Если гамильтониан H на $T^*SO(3)$ S^1-инвариантен, то на K_1 существует гамильтониан h такой, что $H = h \circ \tilde{\tau}$ и траектории динамической системы с гамильтонианом H $\tilde{\tau}$-связаны с траекториями для гамильтониана h [2, p. 355].

3. СТРОЕНИЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ЛИСТОВ ДЛЯ ДИНАМИКИ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

Предложение 1. Рассмотрим функции на $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$

$$C_1(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\nu}^2, \ C_2(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\pi}. \tag{5}$$

1. Функции C_1, C_2 являются независимыми во всех точках $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$, для которых $\boldsymbol{\nu} \neq 0$.

2. Совместный уровень $L_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ функций (5) при $\boldsymbol{\nu}_0 \neq 0$ есть подмногообразие в $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$.

3. В окрестности любой точки $(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0) \in \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ $(\boldsymbol{\nu}_0^2 > 0)$ существует такая система координат $(c^1, c^2, u^1, \ldots, u^4)$, что в этой окрестности $L_{(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})}$ определяется уравнениями

$$\begin{cases} c^1 = C_1(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}); \\ c^2 = C_2(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}). \end{cases}$$

Замечание 1. Координаты $(u^1, \ldots, u^4)$ являются внутренними на подмногообразии, определяемом фиксированными значениями (c^1, c^2).

Доказательство.

1. Функции независимы в окрестности точки $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})$, если в ней независимы дифференциалы этих функций.

Имеем

$$\begin{cases} dC_1 = \dfrac{\partial C_1}{\partial_{\nu_k}} d\nu_k + \dfrac{\partial C_1}{\partial_{\pi_k}} d\pi_k = 2\nu_k d\nu_k; \\ dC_2 = \dfrac{\partial C_2}{\partial_{\nu_k}} d\nu_k + \dfrac{\partial C_2}{\partial_{\pi_k}} d\pi_k = \pi_k d\nu_k + \nu_k d\pi_k. \end{cases}$$

Предположим противное, т.е существуют α, β такие, что $\alpha dC_1 + \beta dC_2 = 0$, тогда, приравнивая нулю коэффициенты при дифференциалах $d\pi_k$, получаем

$$(\mathbf{v}^2 > 0) \,\&\, (\beta \nu_k d\pi_k = 0) \to \beta \nu_k = 0 \quad \forall k \to \beta = 0.$$

Соответствено, приравнивая нулю коэффициенты при дифференциалах $d\nu^k$, получаем

$$(\mathbf{v}^2 > 0) \,\&\, (\alpha dC_1) = 0 \to \alpha \nu_k d\nu_k = 0 \to \alpha \nu_k = 0 \quad \forall k \to \alpha = 0.$$

2. Согласно доказанному в п. 1 отображение $C = C_1 \times C_2$ регулярно в точках $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) \in \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$, где $\mathbf{v} \neq 0$, поэтому п. 2 есть прямое следствие Submersion Theorem [8, p. 175].

3. Данное утверждение является простым следствием Local Onto Theorem [8, p. 175] для отображения $C - C_0$. ■

Коприсоединенное действие группы $SE(3)$ на $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ имеет вид (14.7.10) в [2, p. 492]

$$\mathrm{Ad}^*_{(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})^{-1}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) = (\mathbf{A}[\mathbf{v}], \boldsymbol{a} \times \mathbf{A}[\mathbf{v}] + \mathbf{A}[\boldsymbol{\pi}]). \tag{6}$$

Предложение 2. Пусть $K = \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^* \setminus \{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) \colon \mathbf{v} = 0\}$, т.е. K является открытым подмногообразием $\boldsymbol{se}\,(\mathbf{3})^*$ с индуцированными из $\boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ структурой Ли–Пуассона (4) и коприсоединенным действием (6), тогда

1. Функции C_1, C_2 являются функциями Казимира на K.
2. Совместный уровень $L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ является орбитой $O_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ коприсоединенного представления группы $SE(3)$.
3. Совместный уровень $L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ является симплектическим листом K, и каждый симплектический лист K можно представить в виде $L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$.
4. Совместный уровень $L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ является пуассоновым подмногообразием в K.

Доказательство.

1. Функции (5) инвариатны относительно коприсоединенного действия (6), поэтому согласно предложению 12.6.1. из [2, p. 421] можно утверждать, что C_1, C_2 являются функциями Казимира.

2. Для любой точки $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) \in L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ найдутся параметры $(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})$ такие, что $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) = \mathrm{Ad}^*_{(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})^{-1}}(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)$. Действительно, $\mathbf{v} \in S^2_{\mathbf{v}_0}$ и найдется вращение $\mathbf{A}$ такое, что $\mathbf{v} = \mathbf{A}[\mathbf{v}_0]$, а подходящий вектор $\boldsymbol{a}$ можно найти по формуле $\boldsymbol{a} = \dfrac{1}{\mathbf{v}_0^2} \mathbf{v} \times (\boldsymbol{\pi} - \mathbf{A}[\boldsymbol{\pi}_0])$.

3. Из Corollary 14.4.3 и Definition 10.4.3 [2, p. 477, (i)]] следует, что связная компонента орбиты коприсоединенного представления является симплектическим листом. Орбиты группы $SE(3)$ связаны.

4. Согласно предложению 1.2 из [2, p. 347] $L_{(\nu_0, \pi_0)}$ является не только immersed submanifold, но и Poisson submanifold K (и $\boldsymbol{se(3)}^*$).

Орбиты коприсоединенного представления группы $SE(3)$ исследованы в [2, разд. 14.7, и 9, разд. 4.4]. Их строение как симплектических многообразий с 2-формой Кириллова–Костанта–Сурьо (ККС) $\Omega_{\text{KKS}}^{O_{(\nu_0, \pi_0)}}$ описано в теореме 4.4.1 (см. [9, p. 142]).

Рассмотрим орбиты $O_{(\nu_0, \pi_0)}$ при $\nu_0 \neq 0$, для которых как следствие из теоремы 4.4.1 из [9] получаем следующее предложение.

Предложение 3. Орбита $O_{(\nu_0, \pi_0)}$ при $\nu_0 \neq 0$ диффеоморфна кокасательному расслоению сферы $T^* S^2_{|\nu_0|}$, а симплектическая форма на орбите отличается от канонической симплектической формы на кокасательном расслоении к сфере так называемым магнитным членом

$$\begin{cases} O_{(\nu_0, \pi_0)} \simeq T^* S^2_{|\nu_0|}; \\ \Omega_{\text{KKS}}^{O_{(\nu_0, \pi_0)}} = \Omega_{can}^{T^* S^2_{|\nu_0|}} - \rho^* B; \\ B(\xi \times \nu, \eta \times \nu)_{|\nu} = -\dfrac{C_2(\nu_0, \pi_0)}{C_1(\nu_0, \pi_0)} \langle \xi \times \eta, \nu \rangle, \end{cases}$$

где $\rho\colon T^* S^2_{|\nu_0|} \to S^2_{|\nu_0|}$ — проекция на кокасательное расслоение, B — 2-форма на сфере, $\nu \in S^2_{|\nu_0|}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$.

4. ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ НА $T^* SE(3)$

Расслоение ортонормированных ориентированных триад $O^+(E^3)$ как конфигурационное пространство для динамики твердого тела. Рассмотрим систему отсчета, связанную с телом, что эквивалентно ортонормированному реперу (триаде) с началом отсчета $x \in E^3$ в центре масс твердого тела и единичными векторами $\vec{E}_i$, направленными вдоль главных осей тензора инерции тела, причем с такой же ориентацией, что и инерциальная система отсчета $\{\vec{e}_i\}$, $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3)$.

Таким образом, конфигурационное пространство для твердого тела совпадает с расслоением $(O^+(E^3), \rho, E^3)$, $O^+(E^3) \xrightarrow{\rho} E^3$ ортонормированных ориентированных реперов евклидова пространства E^3.

Элементами $O^+(E^3)$ являются $z = (x, \{\vec{E}_i\})$, $(\vec{E}_1 \times \vec{E}_2 = \vec{E}_3)$, тогда $\rho(z) = x \in E^3$.

На $O^+(E^3)$, как на главном расслоении со структурной группой $SO(3)$, определено каноническое правое действие группы $SO(3)$:

$$r_{\mathbf{B}}\colon z = (x, \{\vec{E}_i\}) \in O^+(E^3) \mapsto (x, B_i^k \{\vec{E}_k\}), \quad \mathbf{B} \in SO(3). \tag{7}$$

Кроме того, для плоского евклидового пространства E^3 имеется левое действие группы $SE(3)$, которое не является каноническим согласно общей теории расслоений [10, с. 96].

Выберем фиксированную точку $O \in E^3$ и фиксированную триаду, образующие декартову систему отсчета $z_0 = (O, \{\vec{e}_i\})$, тогда каждая точка $x \in E^3$ представляется радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ и каждое вращение $\mathbf{A} \in SO(3)$ представляется матрицей A_{ki} такой, что $\mathbf{A}\vec{e}_i = A_{ki}\vec{e}_k$.

Таким образом, левое действие $SE(3)$ на $z \in O^+(E^3)$ имеет вид

$$l_{(\boldsymbol{a},\mathbf{A})} z = (\boldsymbol{a} + \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \{\mathbf{A}\vec{E}_i\}) . \tag{8}$$

Это действие $SE(3)$ является транзитивным, т.е. любой элемент $z \in O^+(E^3)$ можно получить левым действием (8) из $z_0 \in O^+(E^3)$ единственным способом $z = l_{(\boldsymbol{x},\mathbf{R})} z_0$, $R_{ik} = \langle \vec{E}_k, \vec{e}_i \rangle$.

Отображение Ψ: $z = (x, \{\vec{E}_i\}) \mapsto (\boldsymbol{x}, \mathbf{R})$, $R_{ik} = \langle \vec{E}_k, \vec{e}_i \rangle$ является глобальной картой расслоения $O^+(E^3)$, причем действия (7) и (8) в этой карте — соответственно правые и левые сдвиги на $SE(3)$

$$\Psi \circ r_{\mathbf{B}} \circ \Psi^{-1} = R_{\mathbf{B}}, \quad \Psi \circ l_{(\boldsymbol{a},\mathbf{A})} \circ \Psi^{-1} = L_{(\boldsymbol{a},\mathbf{A})}.$$

Диффеоморфизм Ψ позволяет также считать группу $SE(3)$ конфигурационным пространством для динамики твердого тела, что и будет в дальнейшем предполагаться.

Пуассонова и симплектическая структуры на $T^*SE(3)$ в инерциальной системе отсчета. Учитывая, что группа $SE(3)$ как многообразие является прямым произведением, имеем

$$T^*(SE(3)) \simeq T^*(\mathbb{R}^3 \times SO(3)) \simeq T^*(\mathbb{R}^3) \times T^*(SO(3)) . \tag{9}$$

Представление (9) есть прямое произведение [11, p. 81, 82], где поступательные и вращательные степени свободы отделены одна от другой в симплектической и пуассоновой структурах

$$\Omega_{can}^{T^*SE(3)} = \Omega_{can}^{T^*R^3} + \Omega_{can}^{T^*SO(3)} =$$

$$= dx^i \wedge dp_i - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\delta R_{jk} \wedge d\pi_i + \frac{1}{2}\pi_i \varepsilon_{ijk}\delta R_{js} \wedge \delta R_{sk} .$$

Скобки Пуассона, соотвествующие $\Omega_{can}^{T^*SE(3)}$, имеют вид

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l, \ \{\pi_i, R_{jk}\} = \varepsilon_{ijl}R_{lk} . \tag{10}$$

Скобки Пуассона (10) показывают, что базовые динамические переменные относятся к инерциальной системе отсчета.

Пусть $R_{\mathbf{B}}^{ct}$ — Cotangent Lift правого сдвига $R_{\mathbf{B}}$ на группе $SE(3)$ элементами $(0, \mathbf{B}) \in SO(3)$, $L_{(\boldsymbol{b},\mathbf{B})}^{ct}$ — Cotangent Lift левого сдвига соответственно.

Расширяя (1), в инерциальной системе отсчета имеем

$$\begin{cases}(\boldsymbol{b}, \mathbf{B}) \in SE(3), \ ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \in T^* SE(3); \\ R_{\mathbf{B}} : (\boldsymbol{x}, \mathbf{R}) \to (\boldsymbol{x}, \mathbf{RB}); \\ L(\boldsymbol{a}, \mathbf{A}) : (\boldsymbol{x}, \mathbf{R}) \to (\boldsymbol{a} + \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{AR}); \\ R_{\mathbf{B}}^{ct} : ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \to ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{RB}, \boldsymbol{\pi})); \\ L_{(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})}^{ct} : ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \to ((\boldsymbol{a} + \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{p}), (\mathbf{AR}, \mathbf{A}\boldsymbol{\pi})).\end{cases} \tag{11}$$

Для перехода к системе отсчета, связанной с телом, необходимо в соответствии с последней строкой в (11) провести следующее каноническое преобразование динамических переменных (д.п.):

$$\begin{cases}\boldsymbol{P} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{p}; \\ \boldsymbol{\Pi} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\pi}; \\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, \ \mathbf{R} = \mathbf{R},\end{cases} \tag{12}$$

где $\boldsymbol{p}$ — импульс тела в инерциальной системе отсчета; $\boldsymbol{\pi}$ — собственный момент импульса тела в инерциальной системе отсчета; $\boldsymbol{P}$ — импульс тела в системе отсчета, связанной с телом; $\boldsymbol{\Pi}$ — собственный момент импульса тела в системе отсчета, связанной с телом.

Подставляя выражения (12) в (10), получаем в системе отсчета, связанной с телом, следующие базовые СП (только отличные от 0):

$$\begin{cases}\{X_i, P_j\} = R_{ij}, & \{\Pi_i, P_j\} = -\varepsilon_{ijk} P_k, \\ \{\Pi_i, \Pi_j\} = -\varepsilon_{ijk}\Pi_k, & \{\Pi_k, R_{ij}\} = -\varepsilon_{kjl} R_{il}.\end{cases}$$

Замечание 2. Арифметические векторы, являющиеся компонентами физического вектора в инерциальной системе отсчета, обозначены малыми жирными буквами, а большими — компоненты того же вектора в системе отсчета, связанной с телом. Например,

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix}\langle \vec{e}_1, \vec{\pi}\rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{\pi}\rangle \\ \langle \vec{e}_3, \vec{\pi}\rangle\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix}\langle \vec{E}_1, \vec{\pi}\rangle \\ \langle \vec{E}_2, \vec{\pi}\rangle \\ \langle \vec{E}_3, \vec{\pi}\rangle\end{bmatrix}.$$

Замечание 3. Выражения для симплектической $\Omega_{can}^{T^* SE(3)}$ и пуассоновой (10) структур не соответствуют правой тривиализации $T^* SE(3)$, описанной в [12], правая тривиализация в этих выражениях относится только к вращательным степеням свободы из $T^* SO(3)$, тогда как (12) в точности соответствует левой тривиализации $T^* SE(3)$ [12].

Это согласуется с пониманием $O^+(E^3)$ как конфигурационного пространства для динамики твердого тела и с предназначением правых и левых действий (7), (8).

Замечание 4. Карта расслоения $O^+(E^3)$, соответствующая инерциальной системе отсчета, имеет преимущество: в ней разделяются поступательные и вращательные степени свободы, и это полностью реализуется в модели симметричного волчка. Что касается general top, то кинетическая энергия вращения является левоинвариантной функцией на $T^* SE(3)$ и поэтому традиционно используется система отсчета, связанная с телом. Для general top можно совместить преимущества этих двух карт, если вместо (12) использовать преобразование из [7]

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\pi}; \\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}, \ \ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}, \ \ \mathbf{R} = \mathbf{R}. \end{cases}$$

5. РЕДУКЦИЯ $T^*SE(3)$ К ПУАССОНОВОЙ СТРУКТУРЕ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

Как и в случае $T^*SO(3)$, скобки Пуассона для $T^*SE(3)$ инвариантны относительно правых сдвигов

$$R_{\mathbf{B}}: ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \mapsto ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{RB}, \boldsymbol{\pi})), \ \ \mathbf{B} \in SO(3). \tag{13}$$

Как видно из (13), переменные $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{p}$ поступательных степеней свободы не подвергаются преобразованиям и их можно не принимать во внимание в последующем рассмотрении.

В общем случае кинетическая энергия тела является левоинвариантной, а не правоинвариантной функцией, но для симметричного волчка система инвариантна относительно правых сдвигов из $S^1 \in SO(3)$, где группа S^1 — симметрия тела (предполагается, что ось симметрии тела направлена по вектору $\mathbf{E}_3$).

Как и в разд. 2, выполняются условия теоремы 10.5.1 из [2, p. 355], и следовательно, для пуассонова многообразия P_1 получаем

$$P_1 = T^*SE(3)/S^1 \simeq T^*\mathbb{R}^3 \times K_1 \subset P = T^*\mathbb{R}^3 \times K, \tag{14}$$

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \ \ \{\nu_i, \nu_k\} = 0, \ \ \{\pi_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijl}\nu_l, \ \ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l.$$

Для того чтобы провести редукцию системы полностью, необходимо преобразовать стандартный гамильтониан для твердого тела (а именно вклад в него кинетической энергии собственного вращения тела) к инерциальной системе отсчета, что нетрудно сделать для симметричного волчка, для которого два момента инерции равны в системе отсчета, связанной с телом.

Используя $I_1 = I_2 = I_\perp$, после некоторых преобразований получаем

$$T_{spin}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) = \frac{1}{2I_1}\boldsymbol{\pi}^2 + \left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}\rangle^2 + V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}).$$

Таким образом, гамильтониан для симметричного волчка после отбрасывания функции Казимира $\left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right)\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}\rangle^2$ принимает вид

$$h((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})) = \frac{1}{2M}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2I_1}\boldsymbol{\pi}^2 + V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}),$$

где M — масса тела.

Гамильтониан h зависит только от д.п. на P_1.

Динамическая система окончательно приведена к $(P_1, \{\cdot, \cdot\}, h)$, так как согласно теореме 10.5.1 в [2, p. 355] динамические траектории исходной системы проектируются в динамические траектории приведенной системы пуассоновым отображением

$$T^*SE(3) \ni ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \mapsto ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\tau(\mathbf{R}), \boldsymbol{\pi})) \in P_1.$$

Относительно строения симплектических листов $L^{P_1}_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ пуассонова многообразия P_1 с учетом результатов разд. 3 (см. предложение 3) имеем

$$L^{P_1}_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)} = T^* \mathbb{R}^3 \times O_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}. \tag{15}$$

6. ОТОБРАЖЕНИЕ МОМЕНТА ДЛЯ ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ $SE(3)$

Отображение группы $SE(3)$ на себе левыми сдвигами. Рассмотрим соотношения, важные для понимания отображения момента группы $SE(3)$ и представления инерциальной системы.

Придадим СП в инерциальной системе инвариантный вид.

Будем считать, что $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — постоянные арифметические векторы, т.е. их компоненты постоянны в инерциальной системе отсчета. Имеем

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \ \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl}\pi_l, \ \{\pi_i, R_{jk}\} = \varepsilon_{ijl} R_{lk} .$$

Отсюда

$$\{\boldsymbol{x}, \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\upsilon}\rangle\} = \boldsymbol{\upsilon}. \tag{16}$$

Имеем также

$$\{\mathbf{R}, \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \hat{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{R} \tag{17}$$

и аналогично

$$\{\boldsymbol{\pi}, \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi} = \hat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\pi}. \tag{18}$$

Соотношениям (17) и (18) можно также придать вид, использующий физические векторы

$$\{\vec{E}_k, \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{E}_k, \ \vec{\omega} = \omega_i \vec{e}_i, \tag{19}$$

$$\{\vec{\pi}, \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{\pi}. \tag{20}$$

Выражение (19), (20) показывает, что $\boldsymbol{\pi}$ является моментом (импульса) собственного вращения тела, так как генерирует вращение только векторов, описывающих собственное вращение тела.

Чтобы генерировать вращение всех физических векторов системы, следует использовать полный момент импульса системы с учетом орбитального момента импульса $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \{\vec{x}, \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{x}; \\ \{\vec{p}, \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{p}; \\ \{\vec{E}_k, \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{E}_k; \\ \{\vec{\pi}, \langle \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{\pi}. \end{cases} \tag{21}$$

Из (21) и (16) находим отображение момента, соответствующее действию группы $SE(3)$ на себе левыми сдвигами

$$\boldsymbol{J}_L \colon ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \mapsto (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}) . \tag{22}$$

Отображение момента для действия группы $SO(3)$ на $SE(3)$ правыми сдвигами. Найдем отображение момента, соответствующее правому действию группы $SO(3)$ на $SE(3)$.

Пусть теперь $\boldsymbol{\Omega}$ — постоянный арифметический вектор, т.е. $\vec{\omega}$ имеет постоянные компоненты в системе отсчета, связанной с телом. Тогда

$$\{\mathbf{R}, \langle \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega}\rangle\} = \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\Omega}} , \tag{23}$$

$$\{\vec{E}_k, \langle \boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Omega}\rangle\} = \vec{\omega} \times \vec{E}_k, \ \vec{\omega} = \Omega_i \vec{E}_i .$$

Несмотря на сходство с (18), гамильтониан $\langle \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Omega} \rangle$ генерирует такое вращение, что угловая скорость постоянна не в инерциальной системе, а в теле. В этом случае вектор угловой скорости испытывает вращение $\vec{\omega} = R_{ik}\Omega^k \vec{\boldsymbol{e}}_i$. Имеем также

$$\{\mathbf{\Pi}, \langle \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Omega} \rangle\} = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{\Omega}}.$$

Именно так должен изменяться арифметический вектор $\mathbf{\Pi}$, чтобы для физического вектора $\vec{\pi} = \pi_k \vec{e}_k = \Pi_k \vec{E}_k$ получить

$$\{\vec{\pi}, \langle \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Omega} \rangle\} = 0. \tag{24}$$

Уравнения (23), (24) показывают, что соответствующее правому действию группы $SO(3)$ на $SE(3)$ отображение момента есть $\boldsymbol{J}_R = \mathbf{\Pi}$.

Для general top кинетическая энергия является лево-, а не правоинвариантной функцией, поэтому компоненты этого момента не сохраняются. В случае symmetric top компонента Π_3 сохраняется, а при редукции (14) к symmetric top она переходит в функцию Казимира C_2 в соответствии с общим правилом (см. (12.6.1) в [2, p. 421, 422]).

Отображение момента для действия группы $\boldsymbol{SE(3)}$ на пуассоновом многообразии $\boldsymbol{P}$. Для левого сдвига на $T^*SE(3)$ в инерциальной системе отсчета имеем $L^{ct}_{(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})}: ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \to ((\boldsymbol{a} + \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{p}), (\mathbf{AR}, \mathbf{A}\boldsymbol{\pi}))$.

Поскольку $\tau\colon \mathbf{R} \mapsto \boldsymbol{\nu} = R_{i3}\boldsymbol{e}_i$, $\nu_i = R_{i3}$, то $\tau(\mathbf{BR})_3 = (\mathbf{BR})_{i3} = B_{ik}R_{k3} = B_{ik}\nu_k$, т.е. $\tau(\mathbf{BR}) = \mathbf{B}[\boldsymbol{\nu}]$.

Следовательно, для левого действия $SO(3)$ на P имеем

$$l_{(\boldsymbol{a}, \mathbf{A})}((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})) = ((\boldsymbol{a} + \mathbf{A}\boldsymbol{x}, \mathbf{A}\boldsymbol{p}), (\mathbf{A}\boldsymbol{\nu}, \mathbf{A}\boldsymbol{\pi})). \tag{25}$$

Отображение момента для действия (25) имеет вид, аналогичный (22)

$$\boldsymbol{J}_L\colon ((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})) \mapsto (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}). \tag{26}$$

Отображение момента на симплектическом листе $\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$. Прежде всего функции Казимра C_1, C_2 инвариантны относительно действия (26), и следовательно, сохраняют симплектические листы, а генераторы этого действия будут касательными к этим листам.

Таким образом, следует сравнить отображение момента на многообразии P с его пуассоновой структурой и отображение момента на симплектическом листе — с внутренней пуассоновой структурой листа, соответствующей симплектической структуре ККС.

Пусть $\xi = (\boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{se(3)}$. Векторное поле ξ_P имеет вид

$$\xi_K((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})) = ((\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\pi})).$$

Отображение момента определяется из соотношений (см. (11.2.3) в [2, p. 374])

$$\{F, J(\xi)\} = \partial_{\xi_K} F. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь внутреннюю пуассонову структуру на симплектическом листе (15). Если f — функция на многообразии P, то обозначим $\bar{f}$ сужение f на подмногообразие (3), т.е. $\bar{f} = f_{|\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}}$. Тогда согласно предложению 10.4.2 [2, p. 346] $\{\bar{f}, \bar{g}\} = \overline{\{f, g\}}$, например

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\bar{\nu}_i, \bar{\nu}_k\} = 0, \quad \{\bar{\pi}_i, \bar{\nu}_j\} = \varepsilon_{ijl}\bar{\nu}_l, \quad \{\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j\} = \varepsilon_{ijl}\bar{\pi}_l. \tag{28}$$

Используя в выражении (27) в качестве $\overline{F}$ базовые д.п. x^i, p_i, $\overline{\nu}^i$, $\overline{\pi}_i$ и СП (28), получаем, что д.п. $\overline{J(\xi)}$ удовлетворяет (21), т.е. является моментом для симплектической структуры на $\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$ и справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. Пусть $J: P \to \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ — отображение момента, соответствующее действию группы $SE(3)$ на пуассоновом многообразии P, а $J_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$: $\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)} \to \boldsymbol{se}(\mathbf{3})^*$ — отображение момента, соответствующее действию группы $SE(3)$ на симплектическом листе $\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$, тогда

1. $\boldsymbol{J}_L$: $((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\mathbf{R}, \boldsymbol{\pi})) \mapsto (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})$.
2. $J_{\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}} = J_{|\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}}$.

7. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Имеем скобки Пуассона

$$\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\nu_i, \nu_k\} = 0, \quad \{\pi_i, \nu_j\} = \varepsilon_{ijl} \nu_l, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = \varepsilon_{ijl} \pi_l$$

и гамильтониан

$$h((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}), (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})) = \frac{1}{2M} \boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2I_1} \boldsymbol{\pi}^2 + V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}).$$

Применяя $\dot{f} = \{f, h\}$ к базовым д.п., получаем

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \dfrac{1}{M} \boldsymbol{p}; \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\nabla^x V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}); \\ \dot{\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{1}{I_\perp} \boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{\nu}; \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} = \nabla^\nu V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

Развитием предложенной математической модели может стать задача импульсного управления источником аксиально-симметричного внешнего поля для компенсации потерь энергии в связи с воздействием внешних факторов (трение, излучение и др.). Основные подходы и идеи формирования таких математических моделей для задач оптимизации и управления изложены в [13–18].

8. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕТОДА ЭНЕРГИИ-МОМЕНТА И ТЕОРЕМЫ РАТЬЮ–ОРТЕГА В ЗАДАЧЕ ОБ ОРБИТРОНЕ

Необходимые условия. Как метод энергии-момента, так и теорема Ратью–Ортега (см. теорему 4.8 в [19]) формулируют условия в фиксированной (опорной) точке предполагаемого относительного равновесия.

Дополним список переменных п. 3 в предложении 1 переменными $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$, переименовав их $u_5, u_6, \ldots$ Ничего не изменив по существу, такой порядок и название переменных будет более удобен в дальнейших вычислениях. Важно, что переменные c^1, c^2 «нумеруют» симплектические слои $\Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$, тогда как переменные $u_1, u_2, \ldots$ являются внутренними переменными на листе.

Пусть $z_0 \in \Lambda_{(\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\pi}_0)} \subset P, (\boldsymbol{\nu}_0^2 > 0)$. Тогда в окрестости этой точки существуют две системы координат: первая — глобальная $z^i = ((\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi}), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}))$, и вторая — вообще говоря, локальная $(c^1, c^2, u^1, u^2, u^3, u^4, \ldots)$.

Будем предполагать, что присоединенный гамильтониан $\bar{h}^{\xi}$ на симплектическом листе является сужением присоединенного гамильтониана h^{ξ} на P (это выполняется для задачи об Орбитроне [3, 12, 20] и в более общем случае, например, для полиномиальных по $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\pi})$ гамильтонианов).

Итак, первым условием в методе энергии-момента является

$$\mathrm{d}\bar{h}^{\xi}_{|z_0} = 0 . \tag{29}$$

Для любой функции f в окрестности z_0 имеет место $\mathrm{d}f = \mathrm{d}_c f + \mathrm{d}_u f$. Условие (29) можно записать так: $\mathrm{d}_u h^{\xi}_{|z_0} = 0$.

Очевидно также, что

$$\begin{cases} \mathrm{d}_u C_1 = 0; \\ \mathrm{d}_u C_2 = 0. \end{cases}$$

Для любых констант λ^1, λ^2 выполняется

$$\mathrm{d}_u (h^{\xi} + \lambda^1 C_1 + \lambda^2 C_2)_{|z_0} = 0 . \tag{30}$$

Для того чтобы условие (30) выполнялось не только для частного, но и для полного дифференциала, λ^1, λ^2 должны принимать вполне определенные значения, которые удовлетворяют уравнениям в точке z_0

$$\begin{cases} \lambda^1 \partial_{c^1} C_1 + \lambda^2 \partial_{c^1} C_2 = -\partial_{c^1} h^{\xi}; \\ \lambda^1 \partial_{c^2} C_1 + \lambda^2 \partial_{c^2} C_2 = -\partial_{c^2} h^{\xi}. \end{cases} \tag{31}$$

Вследствие специального выбора системы координат $(c^1, c^2, u^1, u^2, u^3, u^4, \dots)$ имеем

$$\begin{cases} \lambda^1 = -\partial_{c^1} h^{\xi}; \\ \lambda^2 = -\partial_{c^2} h^{\xi}. \end{cases} \tag{32}$$

Если λ^1, λ^2 удовлетворяют (31), (32), то

$$\mathrm{d}h^{\xi,\lambda}_{|z_0} = 0 , \tag{33}$$

где $h^{\xi,\lambda} = h^{\xi} + \lambda^1 C_1 + \lambda^2 C_2$.

Условие (33) имеет вид первого условия теоремы Ратью–Ортега.

Достаточные условия. Рассмотрим второе условие G_{μ}-устойчивости метода энергии-момента и теоремы Ратью–Ортега.

Прежде всего приведем преобразование гессиана при переходе от одной системы локальных координат (y^k) к другой (z^i):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} + \frac{\partial f}{\partial y^k} \frac{\partial^2 y^k}{\partial z^i \partial z^j} .$$

Отсюда $\mathrm{d}_z^2 f(\eta_1, \eta_2) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \nabla_{\eta_1} y^k \nabla_{\eta_2} y^l + \dfrac{\partial f}{\partial y^k} \mathrm{d}_z^2 y^k (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1, \eta_2 \in T_{z_0} P$.

Если система координат y^k — это $(c^1, c^2, u^1, u^2, u^3, u^4, \ldots)$, то

$$\mathrm{d}_z^2 f(w_1, w_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial c^A \partial c^B} \nabla_{\eta_1} c^A \nabla_{\eta_2} c^B +$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial c^A \partial u^\alpha}(\nabla_{\eta_1} c^A \nabla_{\eta_2} u^\alpha + \nabla_{\eta_2} c^A \nabla_{\eta_1} u^\alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \nabla_{\eta_1} u^\alpha \nabla_{\eta_2} u^\beta +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y^k} \mathrm{d}_z^2 y^k(\eta_1, \eta_2).$$

Предположим теперь, что каждый из векторов $\eta_1, \eta_2 \in T_{z_0} L_{(\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\pi}_0)}$, т.е. $\eta = \eta^\alpha \dfrac{\partial}{\partial u^\alpha} \to (\nabla_\eta c^A = 0) \& (\nabla_\eta u^\alpha = \eta^\alpha)$, тогда

$$\mathrm{d}_z^2 f(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \eta^\alpha \eta^\beta + \frac{\partial f}{\partial y^k} \mathrm{d}_z^2 y^k(\eta_1, \eta_2),$$

$$\mathrm{d}_z^2 f(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{d}_u^2 f(\eta_1, \eta_2) + \langle \nabla f, \mathrm{d}_z^2 \boldsymbol{y}(\eta_1, \eta_2) \rangle. \tag{34}$$

Применим формулу (34) к функции $h^{\xi, \lambda}$ в точке z_0

$$\mathrm{d}_z^2 h^{\xi, \lambda}(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{d}_u^2 h^{\xi, \lambda}(\eta_1, \eta_2) + \langle \nabla h^{\xi, \lambda}, \mathrm{d}_z^2 \boldsymbol{y}(\eta_1, \eta_2) \rangle. \tag{35}$$

Вследствии условия (33) второй член в (35) обращается в 0. Поэтому имеем

$$\mathrm{d}_z^2 h^{\xi, \lambda}(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{d}_u^2 (h^\xi + \lambda^1 C_1 + \lambda^2 C_2)(\eta_1, \eta_2),$$

так как $\mathrm{d}_u^2 C_1 = \mathrm{d}_u^2 C_2 = 0$, то

$$\mathrm{d}_z^2 h^{\xi, \lambda}(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{d}_u^2 h^\xi(\eta_1, \eta_2) = \mathrm{d}_u^2 \bar{h}^\xi(\eta_1, \eta_2). \tag{36}$$

Таким образом, положительная определенность квадратичной формы метода энергии-момента (правая часть в (36)) эквивалентна положительной определенности соответствующей квадратичной формы Ратью–Ортега (левая часть в (36)) на векторах, касательных к симплектическому листу.

Заметим также, что требования, накладываемые методом энергии-момента на подпространство W, в рассматриваемом случае совпадают с соотвествующими требованиями теоремы Ратью–Ортега.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные структуры гамильтонового формализма на $T^* SO(3)$ исследованы в представлении правой тривиализации, что соответствует использованию инерциальной системы отсчета. Дано описание канонической симплектической и пуассоновой структур на основе формы Лиувилля на $T^* SO(3)$. Проведена редукция пуассоновой структуры к симметричному волчку. Исследовано строение симплектических листов для динамики симметричного волчка. Показано, что расширение динамики на поступательные степени свободы приводит к расслоению ортономированых ориентированных триад $O^+(E^3)$ как естественному конфигурационному пространству для описания динамики твердого тела. Получена пуассонова и симплектическая структуры на $T^* SE(3)$ в инерциальной системе отсчета и проведена редукция к пуассоновой структуре для симметричного волчка. Приведено отображение момента для группы $SE(3)$. Выведены уравнения движения симметричного волчка во внешнем поле. В задаче об Орбитроне доказана эквивалентность применения метода энергии-момента и теоремы Ратью–Ортега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lewis D., Ratiu T., Simo J.C., Marsden J.E. The heavy top: a geometric treatment. *Nonlinearity*. 1992. Vol. 5, N 1. P. 1–48.
2. Marsden J., Ratiu T. Introduction to mechanics and symmetry. New York: Springer, 1999. 553 p.
3. Zub S.S. Stable orbitalic motion of magnetic dipole in the field of permanent magnets. *Physica D.* 2014. Vol. 275. P. 67–73.
4. Dullin H.R. Poisson integrator for symmetric rigid bodies. *Reg. and Ch. Dyn.* 2004. Vol. 9, N 3. P. 255–264.
5. Abraham R., Marsden J. Foundations of mechanics. Massachusetts: American Mathematical Soc. 2002. 826 p.
6. Zub S.S. Lie group as a configuration space for a simple mechanical system (in russian). *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2013. Vol. 112, N 2. P. 89–99.
7. Zub S.S. The canonical Poisson structure on $T^*SE(3)$ and Hamiltonian mechanics of the rigid body. Magnetic dipole dynamics in an external field. *Bulletin of NAS Ukraine*. 2013. N 4. P. 25–31.
8. Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T.S. Manifolds, tensor analysis, and applications. New York: Springer. 1988. 617 p.
9. Marsden J.E., Misiolek G., Ortega J.-P., Perlmutter M., Ratiu T.S. Hamiltonian reduction by stages. New York: Springer. 2007. 524 p.
10. Зуланке Р., Винтген П. Дифференциальная геометрия и расслоения. Москва: Мир. 1975. 348 с.
11. Souriau J.M. Structure of dynamical systems. Boston: Birkhauser. 1997. 406 p.
12. Grigoryeva L., Ortega J.-P., Zub S.S. Stability of hamiltonian relative equilibria in symmetric magnetically confined rigid bodies. *The Journal of Geometric Mechanics*. 2014. Vol. 6, N 3.
13. Lyashko S.I., Semenov V.V. Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2001. Vol. 37, N 1. P. 13–32.
14. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A. Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid. *Differential Equations*. 2003. Vol. 39, N 1. P. 90–98.
15. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A. The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2003. Vol. 39, N 5. P. 737–745.
16. Lyashko N.I., Grishchenko A.E., Onotskii V.V. A regularization algorithm for singular controls of parabolic systems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2006. Vol. 42, N 1. P. 75–82.
17. Klyushin D.A., Lyashko N.I., Onopchuk Yu.N. Mathematical modeling and optimization of intratumor drug transport. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 6. P. 886–892.
18. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц., Волянский К.Ю. Квазилинейные позиционные интегральные игры сближения. *Пробл. упр. и информатики.* 2001. № 6. С. 5–28.
19. Ortega J.-P., Ratiu T.S. Non-linear stability of singular relative periodic orbits in hamiltonian systems with symmetry, *J. Geom. Phys.* 1999. Vol. 32, 2. 160–188.
20. Zub S.S. Magnetic levitation in Orbitron system. *Problems of Atomic Science and Technology*. 2014. Vol. 93, N 5. P. 31–34.

Надійшла до редакції 05.07.2016

С.І. Зуб, С.С. Зуб, В.С. Ляшко, Н.І. Ляшко, С.І. Ляшко

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ СИМЕТРИЧНОЇ ДЗИГИ З АКСІАЛЬНО-СИМЕТРИЧНИМ ЗОВНІШНІМ ПОЛЕМ

Анотація. Розглянуто симетричну дзигу — окремий випадок механічної дзиги, поширеним методом опису якої є канонічна структура Пуасона на $T^* SE(3)$. Ця структура інваріантна щодо правої дії групи $SO(3)$, але гамільтоніан симетричної дзиги інваріантний тільки до правої дії підгрупи S^1, що відповідає обертанню навколо осі симетрії симетричної дзиги. Таку структуру Пуасона отримано як редукцію $T^* SE(3)/S^1$. Запропоновано гамільтоніан і рівняння руху, що описують широкий клас моделей взаємодії симетричної дзиги з аксіально-симетричним зовнішнім полем.

Ключові слова: математична модель симетричної дзиги, пуасонівська редукція, симплектичні листки, 2-форма Кирилова–Костанта–Суріо, відносна рівновага, метод енергії-моменту.

S.I. Zub, S.S. Zub, V.S. Lyashko, N.I. Lyashko, S.I. Lyashko,

MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERACTION OF THE SYMMETRIC TOP WITH AXIALLY-SYMMETRIC EXTERNAL FIELD

Abstract. Symmetric top is a special case of the general top, and canonical Poisson structure on $T^* SE(3)$ is a common method of its description. This structure is invariant under the right action of $SO(3)$, but the Hamiltonian of the symmetric top is invariant only under the right action of subgroup S^1 that corresponds to the rotation around the symmetry axis of the symmetric top. So, its Poisson structure was obtained as the reduction $T^* SE(3)/S^1$. We propose the Hamiltonian and motion equations that describe the wide class of the interaction models of symmetric top and axially-symmetric external field.

Keywords: mathematical model of the symmetric top, Poisson reduction, symplectic leaves, 2-form of Kirillov–Kostant–Souriau, relative equilibrium, energy-momentum method.

Зуб Сергей Иванович,
ведущий научный сотрудник Национального научного центра «Институт метрологии» Министерства экономического развития и торговли Украины, Харьков, e-mail: sergii.zub@gmail.com.

Зуб Станислав Сергеевич,
ведущий научный сотрудник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: stah@univ.kiev.ua.

Ляшко Виктор Сергеевич,
младший научный сотрудник Национальной медицинской академии последипломного образования им. П.Л. Шупика, Киев.

Ляшко Наталья Ивановна,
кандидат техн. наук, научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lyashko.natali@gmail.com.

Ляшко Сергей Иванович,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: silsil1@yandex.ua.