УДК 519.217; 519.718

Т.О. ЛУКАШИВ, В.К. ЯСИНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ С МАРКОВСКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Аннотация. С помощью аппарата функционалов Ляпунова–Красовского исследована устойчивость по вероятности, асимптотическая стохастическая устойчивость, устойчивость в среднем квадратическом, экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом в целом стохастических динамических систем случайной структуры с марковскими переключениями и возмущениями.

Ключевые слова: стохастическая динамическая система, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по вероятности, устойчивость в среднем квадратическом.

ВВЕДЕНИЕ

Одни из первых исследований устойчивости вероятностных систем в различных постановках проводились в работах [1–4]. Однако особенно значимы работы [5, 6], в которых предложен подход, предусматривающий использование для стохастических дифференциальных уравнений основных результатов классической теории устойчивости, что привело к получению ряда характерных свойств вероятностных систем. Это позволило применять метод функций Ляпунова, ранее использовавшийся только для детерминированных уравнений.

В [6] представлена модель стохастических уравнений с марковскими параметрами, которые позволяют рассматривать устойчивость систем с разрывными фазовыми траекториями. В [7] изучена устойчивость детерминированных разностных и динамических систем с учетом марковских параметров и импульсных марковских переключений.

Результаты работ [6, 7] обобщены в [8, 9]. В них рассмотрено стохастическое диффузионное уравнение с марковскими параметрами, обусловливающими внутреннее изменение структуры системы по И.Я. Кацу [6], с учетом импульсных возмущений типа цепи Маркова по Е.Ф. Царькову [7]. Дальнейшее изучение систем такого типа позволило получить определенные результаты в других постановках задач. Например, в [10, 11] исследована проблема стабилизации для стохастических динамических систем случайной структуры с импульсными марковскими возмущениями, а в [12–16] — устойчивость стохастических систем с марковскими параметрами и переключениями в различных постановках.

В настоящей работе изучена устойчивость стохастических динамических систем случайной структуры с конечным последействием и марковскими переключениями, пребывающих под воздействием внешних возмущений, источником которых является ограниченный с вероятностью 1 случайный процесс.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На вероятностном базисе $(\Omega, \mathsf{F}, \boldsymbol{F} \equiv \{\mathsf{F}_t \subset \mathsf{F},\, t \ge t_0 \ge 0\}, \boldsymbol{P})$ рассмотрим стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$dx(t) = \alpha(t) \cdot a(t, \xi(t), x_t)dt + b(t, \xi(t), x_t)dw(t),\ t \in [t_0, +\infty) \setminus S, \qquad (1)$$

с марковскими переключениями

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k -, \xi(t_k -), \eta_k, x_{t_k -}),\ t_k \in S \equiv \{t_n, n \in \boldsymbol{N}\},\ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty, \qquad (2)$$

и с начальными условиями

$$x_{t_0} = \varphi(\theta) \in \boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}([t_0 - \tau, t_0], \boldsymbol{R}^m),\ \xi(t_0) = y \in \boldsymbol{Y},\ \eta_0 = h \in \boldsymbol{H}. \qquad (3)$$

Здесь $\xi(t)$, $t \ge t_0$, — марковский процесс со значениями в измеримом пространстве $\boldsymbol{Y}$; η_k, $k \ge 0$, — цепь Маркова со значениями в измеримом пространстве $\boldsymbol{H}$; $x_t \equiv x(t+\theta)$, $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$, $\tau > 0$; $w(t), t \ge t_0$, — стандартный одномерный винеровский процесс [17–19]; $\alpha(t), t \ge t_0$, — ограниченный с вероятностью 1 при каждом заданном $t \ge t_0$ случайный процесс; $\alpha(t)$, $\xi(t), w(t)$, $t \ge t_0$, и η_k, $k \ge 0$, — F_t-измеримые и независимы в совокупности; $\boldsymbol{D} \equiv$ $\equiv \boldsymbol{D}([t_0 - \tau, t_0], \boldsymbol{R}^m)$ — пространство Скорохода непрерывных справа функций, имеющих левосторонние пределы [4, 20] с нормой

$$||\varphi|| = \sup_{t_0 - \tau \le \theta \le t_0} |\varphi(\theta)|. \qquad (4)$$

Предположим, что измеримые по совокупности переменных отображения $a:[t_0, +\infty) \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^m$, $b:[t_0, +\infty) \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^m$ и $g:[t_0, +\infty) \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^m$ удовлетворяют по последнему аргументу условию Липшица равномерно по всем другим аргументам

$$|a(t, y, \varphi_1) - a(t, y, \varphi_2)|^2 + |b(t, y, \varphi_1) - b(t, y, \varphi_2)|^2 +$$
$$+ |g(t, y, h, \varphi_1) - g(t, y, h, \varphi_2)|^2 \le L||\varphi_1 - \varphi_2||^2,\ L > 0 \qquad (5)$$
$$\forall t \ge t_0,\ y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H},\ \varphi_1, \varphi_2 \in \boldsymbol{D},$$

и условию

$$|a(t, y, 0)| + |b(t, y, 0)| + |g(t, y, h, 0)| = c < \infty\ \ \forall t \ge t_0,\ y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H}, \qquad (6)$$

кроме того, $\forall T < +\infty$

$$\sup_{y \in \boldsymbol{Y}, \varphi \in \boldsymbol{D}} \int_0^T |b(t, y, \varphi)|^2\, dt < +\infty. \qquad (7)$$

Понятно, что выполнение условий (5)–(7) с нормой (4) гарантирует существование единственного решения системы (1)–(3) [14, 20].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайные изменения структуры параметра ξ в уравнении (1) будем учитывать одним из следующих способов [6, 7].

I. Пусть параметр $\xi(t)$, $t \ge t_0$, — цепь Маркова с конечным числом состояний $\boldsymbol{Y} := \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$ и генератором Q.

В момент s изменения структуры параметра ξ системы $(y_i \to y_j)$ происходит скачкообразное изменение фазового вектора x_s, для которого известна переходная вероятность $\boldsymbol{P}_{ij}(s, \varphi, A)$:

$$\boldsymbol{P}_{ij}(s, \varphi, A) := \boldsymbol{P}\{x_s \in A / x_{s-} = \varphi, \xi(s-0) = y_i, \xi(s) = y_j\},\ A \in \boldsymbol{D}.$$

II. В момент изменения структуры $y_i \to y_j$ фазовый вектор изменяется по детерминированному закону $x(s) = \psi_{ij}(x(s-0))$, $i \ne j$.

III. Чисто разрывный марковский процесс $\xi(t)$, $t \ge t_0$, допускает разложение вероятностей

$$\boldsymbol{P}\{\xi(t+\Delta t) \in [\mu, \mu+\Delta\mu] | \xi(t) = \nu \ne \mu\} = p(t, \nu, \mu)\Delta\mu\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\boldsymbol{P}\{\xi(s) = \nu,\ t < s < t+\Delta t | \xi(t) = \nu\} = 1 - p(t, \nu)\Delta t + o(\Delta t),$$

а в моменты скачка ξ фазовый вектор изменяется непрерывно.

Можно доказать [21], что пара $\{x_t, \xi(t)\}$ представляет собой феллеровский марковский процесс, и рассмотреть оператор Ляпунова на измеримых функциях $v(t, y, h, \varphi, \alpha): [t_0, +\infty) \times \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{D} \times \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$, заданный равенством [18]

$$\mathsf{L}v(t, y, h, \varphi, \alpha) := \lim_{\Delta t \downarrow o} \frac{1}{\Delta t} [\boldsymbol{E}^{(t)}_{y,h,\varphi} \{v(t+\Delta t, \xi(t+\Delta t), \eta(t+\Delta t), x_{t+\Delta t}, \alpha(t+\Delta t))\} -$$
$$-v(t, y, h, \varphi, \alpha)], \tag{8}$$

где $\boldsymbol{E}^{(t)}_{y,h,\varphi} v := \boldsymbol{E}\{v / \xi(t) = y,\ \eta(t) = h,\ x_t = \varphi,\ \alpha(t) = \alpha\}$, $\eta(t) := \eta_k$, $t_k \le t < t_{k+1}$, $k \ge 0$.

Определение 1. Функционалом Ляпунова–Красовского для системы случайной структуры (1)–(3) назовем неотрицательную функцию $v(t, y, h, \varphi, \alpha)$, для которой выполняются условия:

— при всех $k \ge 0$, $y \in \boldsymbol{Y}$, $h \in \boldsymbol{H}$, $\varphi \in \boldsymbol{D}$ определен оператор Ляпунова (8);

— при $r \to \infty$ $\bar{v}(r) \equiv \inf\limits_{\substack{y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, \\ \|\varphi\| \ge r}} v(t, y, h, \varphi, \alpha) \to \infty;$ (9)

— при $r \to 0$ $\underline{v}(r) \equiv \sup\limits_{\substack{y \in \boldsymbol{Y}, h \in \boldsymbol{H}, \\ \|\varphi\| \le r}} v(t, y, h, \varphi, \alpha) \to 0.$

Здесь $\bar{v}(r)$ и $\underline{v}(r)$ непрерывны и монотонны.

Замечание 1. Не нарушив общности, рассмотрим устойчивость решения $x \equiv 0$ системы (1)–(3), т.е. выполнение (6) при $c = 0$.

Поскольку сильное решение $x(t)$, $t \ge t_0$, уравнения (1) однозначно определяется начальными условиями (3), то далее будем обозначать его $x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha) := x(t+\theta, t_0, y, h, \varphi, \alpha)$, $-\tau \le \theta \le 0$.

Определение 2. Систему случайной структуры (1)–(3) назовем:

— устойчивой по вероятности в целом, если $\forall \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $||\varphi|| < \delta$ следует неравенство

$$\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t \ge t_0} ||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)|| > \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2 \quad \forall\, y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H},\ \varphi \in \boldsymbol{D};$$

— асимптотически стохастически устойчивой в целом, если она устойчива по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что из неравенства $||\varphi|| < \delta_1$ следует

$$\lim_{T \to \infty} \boldsymbol{P}\left\{\sup_{t \ge T} ||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)|| > \varepsilon\right\} = 0 \quad \forall\, y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H},\ \varphi \in \boldsymbol{D} \text{ и } T \ge t_0 \ge 0;$$

— p-устойчивой (при некотором $p > 0$) в целом, если $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta_2 > 0$, что из неравенства $||\varphi|| < \delta_2$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\{||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||^p\} < \varepsilon \quad \forall\, y \in \boldsymbol{Y},\ h \in \boldsymbol{H},\ \varphi \in \boldsymbol{D} \text{ и } t \ge t_0 \ge 0;$$

— асимптотически p-устойчивой (при некотором $p>0$) в целом, если она p-устойчива и существует такое $\delta_3>0$, что из неравенства $||\varphi||<\delta_3$ следует

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in \boldsymbol{Y},\, h\in \boldsymbol{H},\, \varphi\in \boldsymbol{D}} \boldsymbol{E}\{||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||^p\}=0$$

при всех $t\ge t_0\ge 0$ (заметим, что при $p=2$ будем иметь устойчивость в среднем квадратическом (l.i.m));

— экспоненциально устойчивой в среднем квадратическом в целом, если существует такое $\delta_4>0$, что из неравенства $||\varphi||<\delta_4$ следует неравенство

$$\boldsymbol{E}\{||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||^2\}\le Me^{-\gamma(t-t_0)}||\varphi||^2$$

при некоторых $M>0$, $\gamma>0$ и для всех $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $\varphi\in\boldsymbol{D}$, $t\ge t_0\ge 0$.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Для дальнейшего изложения понадобится оценка решения задачи (1)–(3) на интервалах $[t_k, t_{k+1})$ [12].

Лемма 1. При выполнении условий (5)–(7) при всех $k\ge 0$ для сильного решения задачи Коши (1)–(3) имеет место неравенство

$$\boldsymbol{E}\left\{\sup_{t_k\le t\le t_{k+1}} ||x_t||^2\right\}\le 15(1+4L)[\boldsymbol{E}\{x^2(t_k)\}+2c^2(t_{k+1}-t_k)]\times$$
$$\times\exp\{5L^2(1+4L)(t_{k+1}-t_k)^2\}. \tag{10}$$

Замечание 2. В дальнейшем будем считать, что $c=0$ (см. замечание 1), а также использовать обозначение

$$k_0\equiv\begin{cases}\sup\{k\in\boldsymbol{N}: t_k\le t_0\} & \text{для}\quad t_0\ge t_1,\\ 0 & \text{при}\quad t\in[0, t_1).\end{cases}$$

Теорема 1. Пусть

1) $0<|t_{k+1}-t_k|\le\Delta$, $k\ge 0$, $\Delta>0$;

2) выполнено условие Липшица (5);

3) существуют последовательности функционалов Ляпунова–Красовского $v_k(t, y, h, \varphi, \alpha)$ и $a_k(t, y, h, \varphi, \alpha)$, $k\ge 0$, такие, что в силу системы имеет место неравенство

$$\mathsf{L}v_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\le -a_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\,. \tag{11}$$

Тогда сильное решение системы случайной структуры (1), (3) с марковскими возмущениями типа цепи Маркова (2) асимптотически стохастически устойчиво в целом.

Доказательство. Обозначим F_{t_k} минимальную σ-алгебру, относительно которой измеримы $\xi(t)$ при всех $t\in[t_0, t_k]$ и η_n при $n\le k$. Тогда условное математическое ожидание вычислим по формуле [18]

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}, \alpha(t_{k+1}))/\mathsf{F}_{t_k}\}=$$
$$=\lim_{t_{k+1}\downarrow t_k}\frac{1}{\Delta t}[\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \alpha(t_{k+1}))\}-$$
$$-v_k(t_k, \xi(t_k), \eta(t_k), x_{t_k}, \alpha(t_k))]\,. \tag{12}$$

По определению оператора Ляпунова $\mathsf{L}v_k(t, y, h, \varphi, \alpha)$ из равенства (12) получаем, учитывая (11), неравенство

$$E\{v_{k+1}(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}, \alpha(t_{k+1})) / \mathsf{F}_{t_k}\} =$$
$$= v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) + \mathsf{L}v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) \le \bar{v}(||x_{t_k}||). \quad (13)$$

Из леммы 1 и свойств функции $\bar{v}$ следует существование условного математического ожидания левой части неравенства (13).

Теперь на основании (12) запишем оператор Ляпунова $\mathsf{L}v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))$ вдоль решений (1)–(3)

$$\mathsf{L}v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) = E\{v_{k+1}(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}, \alpha(t_{k+1})) / \mathsf{F}_{t_k}\} -$$
$$- v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) \le -a_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) \le 0. \quad (14)$$

Тогда при $k \ge 0$ выполняется неравенство

$$E\{v_{k+1}(t_{k+1}, \xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}, \alpha(t_{k+1})) / \mathsf{F}_{t_k}\} \le v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))),$$

а значит, последовательность случайных величин $v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))$ при $k \in \boldsymbol{N}$ образует супермартингал относительно F_{t_k}.

Далее, используя математическое ожидание обеих частей неравенства (14), суммируя по k от $n \ge k_0$ до N полученные выражения, имеем

$$E\{v_{N+1}(t_{N+1}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}}, \alpha(t_{N+1}))\} - E\{v_n(t_n, \xi(t_n), \eta_n, x_{t_n}, \alpha(t_n))\} =$$
$$= \sum_{k=n}^{N} E\{\mathsf{L}v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))\} \le$$
$$\le -\sum_{k=n}^{N} E\{a_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))\} \le 0. \quad (15)$$

Затем получаем

$$P\{\sup_{t \ge t_0} ||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)|| > \varepsilon_1\} = P\{\sup_{n \in \boldsymbol{N}} \sup_{t_{k_0+n-1} \le t \le t_{k_0+n}} ||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)|| > \varepsilon_1\} \le$$
$$\le P\{\sup_{n \in \boldsymbol{N}} ||x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, y, h, \varphi, \alpha)|| > \varepsilon_1\} \le$$
$$\le P\{\sup_{n \in \boldsymbol{N}} v_{k_0+n-1}(t_{k_0+n-1}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x_{t_{k_0+n-1}},$$
$$\alpha(t_{k_0+n-1})) \ge \bar{v}(\varepsilon_1)\} \quad \forall \varepsilon_1 > 0. \quad (16)$$

Действительно, если $\sup ||x_{t_k}|| \ge r$, то на основании (9) должно выполняться неравенство

$$\sup_{k \ge k_0} v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) \ge \inf_{\substack{k \ge k_0,\, y \in \boldsymbol{Y}, \\ h \in \boldsymbol{H},\, ||\varphi|| \ge r}} v_k(t, y, h, \varphi, \alpha) = \bar{v}(r).$$

Теперь воспользуемся известным неравенством для неотрицательных супермартингалов [17] для оценки правой части (16):

$$P\{\sup_{n \in \boldsymbol{N}} v_{k_0+n-1}(t_{k_0+n-1}, \xi(t_{k_0+n-1}), \eta_{k_0+n-1}, x_{t_{k_0+n-1}}, \alpha(t_{k_0+n-1})) \ge \bar{v}(\varepsilon_1)\} \le$$
$$\le \frac{1}{\bar{v}(\varepsilon_1)} v_{k_0}(t, y, h, \varphi, \alpha) \le \frac{v(||\varphi||)}{\bar{v}(\varepsilon_1)}. \quad (17)$$

С учетом (16) неравенство (17) гарантирует выполнение неравенства

$$\boldsymbol{P}\{\sup_{t\ge t_0}||x_t\ (t_0, y, h, \varphi, \alpha)||>\varepsilon_1\}<\varepsilon_2 \quad \forall\, \varepsilon_1>0,\ \varepsilon_2>0,$$

а это значит, что система (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

Из неравенства (15) следует оценка

$$\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(t_{N+1}, \xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}}, \alpha(t_{N+1}))\}\le v_{k_0}(t, y, h, \varphi, \alpha)-$$

$$-\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\{a_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))\}\le v_{k_0}(t, y, h, \varphi, \alpha)$$

$$\forall\, N\ge k_0,\ y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H},\ \varphi\in\boldsymbol{D}. \tag{18}$$

В силу того, что последовательность $\{a_k\}$, $k\ge 0$, образует функционалы Ляпунова–Красовского, существуют непрерывные строго монотонные функции $\underline{a}(r)$ и $\bar{a}(r)$ такие, что

$$\bar{a}(||\varphi||)\le a_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\le \underline{a}(||\varphi||)\ \ \forall\, k\in N,\ y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H},\ \varphi\in\boldsymbol{D},\ \underline{a}(0)=\bar{a}(0)=0.$$

Таким образом, из сходимости ряда в (18) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\boldsymbol{E}\{\bar{a}(||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||)\}\ \ \forall\, t_0\ge 0,\ y\in\boldsymbol{Y},\ h\in\boldsymbol{H},\ \varphi\in\boldsymbol{D}.$$

Тогда в силу непрерывности $\underline{a}(r)$ и равенства $\underline{a}(0)=0$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||=0. \tag{19}$$

Из (19) следует стремление к нулю по вероятности последовательности $\bar{v}(||x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||)$ при $k\to\infty$ для всех $t_0\ge 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $\varphi\in\boldsymbol{D}$.

Значит, из свойств функционалов Ляпунова–Красовского [7] заключаем, что неотрицательный супермартингал $v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))$ при $k\to+\infty$ стремится к нулю по вероятности при всех реализациях процесса ξ и последовательности η_k.

Далее неотрицательный ограниченный сверху супермартингал имеет предел с вероятностью единица [17]. Тогда используя (10), получаем

$$\lim_{T\to\infty}\boldsymbol{P}\left\{\sup_{t\ge T}||x_t(t_0, y, h, \varphi, \alpha)||>\varepsilon\right\}=0$$

для всех $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $\varphi\in\boldsymbol{D}$ и $T\ge t_0\ge 0$, что подтверждает асимптотическую стохастическую устойчивость в целом сильного решения системы (1)–(3).

Теорема 1 доказана. ■

Как следствие теоремы 1 следует утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы 1, а в силу системы (1)–(3) для последовательности функционалов Ляпунова–Красовского $\{v_k, k\ge 0\}$ имеет место $\mathsf{L}v_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\le 0\ \ \forall\, k\in N$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$ и $\varphi\in\boldsymbol{D}$.

Тогда импульсная система (1)–(3) устойчива по вероятности в целом.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1–3 теоремы 1 и функционалы Ляпунова–Красовского $\{v_k\}$, $\{a_k\}$, $k\ge 0$, удовлетворяют неравенствам

$$c_1||\varphi||^2\le v_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\le c_2||\varphi||^2, \tag{20}$$

$$c_2||\varphi||^2\le a_k(t, y, h, \varphi, \alpha)\le c_4||\varphi||^2 \tag{21}$$

при некоторых $c_i>0$, $i=\overline{1,4}$, для всех $k\ge 0$, $y\in\boldsymbol{Y}$, $h\in\boldsymbol{H}$, $\varphi\in\boldsymbol{D}$.

Тогда система случайной структуры (1)–(3) асимптотически устойчива в среднем квадратическом в целом.

Доказательство. Использовав неравенство (14) при $n=k_0$, на основании (20) легко получим неравенство

$$\boldsymbol{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\} \le \frac{1}{c_1}\boldsymbol{E}\{v_{N+1}(t_{N+1},\xi(t_{N+1}),\eta_{N+1},x_{t_{N+1}},\alpha(t_{N+1}))\} \le$$
$$\le \frac{1}{c_1}\boldsymbol{E}\{v_{k_0}(t_{k_0},\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0},x_{t_{k_0}},\alpha(t_{k_0}))\} \le \frac{c_2}{c_1}||\varphi||^2$$

для всех $N \ge k_0$, $k_0 \in N$, $\varphi \in \boldsymbol{D}$ и начальных распределениях случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0}\}$. Поэтому можно утверждать, что выполняется неравенство

$$\boldsymbol{E}\{||x_t(t_0,y,h,\varphi,\alpha)||^2\} < \varepsilon \quad \forall\,\varepsilon > 0,$$

а это означает, что система (1)–(3) устойчива в среднем квадратическом.

Далее, использовав неравенства (15), (20) и (21), получим неравенство

$$\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\} \le \frac{1}{c_3}\sum_{k=k_0}^{N}\boldsymbol{E}\{a_k(t_k,\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k},\alpha(t_k))\} \le$$
$$\le \frac{1}{c_3}\boldsymbol{E}\{v_{k_0}(t_{k_0},\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0},x_{t_{k_0}},\alpha(t_{k_0}))\} \le \frac{c_2}{c_3}||\varphi||^2,$$

гарантирующее сходимость ряда, членами которого являются $\boldsymbol{E}\{||x_{t_{N+1}}||^2\}$ для любых начальных данных $x_{t_{k_0}}=\varphi$ и начальных распределений случайного вектора $\{\xi(t_{k_0}),\eta_{k_0}\}$. Таким образом,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in\boldsymbol{Y},\,h\in\boldsymbol{H},\,\varphi\in\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}\{||x_{t_k}(t_0,y,h,\varphi,\alpha)||^2\}=0 \text{ при всех } t_0 \ge 0,$$

что и доказывает теорему 3. ■

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 2 и имеет место неравенство (20), то тривиальное решение — динамическая система (1)–(3) устойчива в l.i.m. в целом.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и существует такое число $\Delta_1 > 0$, что

$$|t_{k+1}-t_k| \ge \Delta_1 \quad \forall\,k \ge 0. \tag{22}$$

Тогда система (1)–(3) экспоненциально устойчива в l.i.m. в целом.

Доказательство. На основании (10) достаточно показать, что неравенство из определения экспоненциальной устойчивости в l.i.m. в целом выполняется $\forall\,x \in \boldsymbol{R}^m$, $t \in S$, поскольку для $t \in [t_k, t_{k+1})$, $k > n$, из определения k_0 следует неравенство

$$e^{-\gamma(t_k-t_{k_0})} \le e^{-\gamma(t_k-t_0)}e^{\gamma\Delta_1}.$$

Воспользуемся обозначениями из теоремы 1 и доказанным ранее равенством

$$\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(t_{k+1},\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x_{t_{k+1}},\alpha(t_{k+1}))/\mathsf{F}_{t_k}\}=$$
$$=v_k(t_k,\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k},\alpha(t_k))+\mathsf{L}v_k(t_k,\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k},\alpha(t_k)) \tag{23}$$

для любых $k \ge 0$ и начальных значений x_{t_0}, $\xi(t_0),\eta_0$.

Из условий теоремы 4 следует неравенство

$$\mathsf{L}v_k(t,y,h,\varphi,\alpha) \le -a_k(t,y,h,\varphi,\alpha) \le -c_3||\varphi||^2 \le -\frac{c_3}{c_2}v_k(t,y,h,\varphi,\alpha).$$

Тогда из (23) легко получить неравенство

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{v_{k+1}(t_{k+1},\xi(t_{k+1}),\eta_{k+1},x_{t_{k+1}},\alpha(t_{k+1}))/\mathsf{F}_{t_k}\}\} \le$$
$$\le \left(1-\frac{c_3}{c_2}\right)\boldsymbol{E}\{v_k(t_k,\xi(t_k),\eta_k,x_{t_k},\alpha(t_k))\}.$$

Если $k_0 \geq 1$, то из последней оценки $\forall k \geq k_0$ получим неравенство

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{E}\{v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k)) / \mathsf{F}_{t_k}\}\} \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \boldsymbol{E}\{v_{k_0}(t_{k_0}, \xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x_{t_{k_0}}, \alpha(t_{k_0}))\}.$$

Отсюда, используя условие теоремы 3, получаем

$$\boldsymbol{E}\{\|x_{t_k}(t_0, y, h, \varphi, \alpha)\|^2\} \leq \frac{1}{c_1} \boldsymbol{E}\{v_k(t_k, \xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}, \alpha(t_k))\} \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1}\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{k-k_0} \|x_{t_k}\|^2.$$

Не теряя общности, можно считать $c_2 > c_3$. Тогда $\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) \in (0, 1)$.

Остается воспользоваться неравенством (10), что и доказывает теорему 4. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для стохастической динамической системы случайной структуры с марковскими переключениями и внешними возмущениями получены достаточные условия устойчивости в различных вероятностных смыслах, а именно: устойчивости по вероятности в целом, асимптотической стохастической устойчивости в целом, устойчивости в среднем квадратическом в целом, асимптотической устойчивости в среднем квадратическом в целом, экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом в целом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С., Витт А.А. О стохастическом рассмотрении динамических систем. *ЖЭТТ*. 1933. Вып. 3, № 3. С. 165–180.
2. Мильмар В.Д., Мышкис А.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков *Сиб. матем. журн*. 1960. Т. 1, № 2. С. 233–237.
3. Ворович Н.Н. Об устойчивости движения при случайных возмущениях. *Изв. АН СССР*. Сер. Матем. 1965. Т. 20, № 1. С. 43–48.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. Киев: Наук. думка, 1982. 612 с.
5. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами *Прикл. мат. и механ*. 1960. Т. 1, № 2. С. 809–823.
6. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной струкутры. Екатеринбург: Изд-во Уральской госакадемии путей сообщения, 1998. 222 с.
7. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем. Рига: РТУ, 1994. 300 с.
8. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K. Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. I. General theorems on the stability of stochastic impulse systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 2. P. 281–290.
9. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasinskii V.K. Lyapunov function method for investigation of stability of stochastic Ito random-structure systems with impulse Markov switchings. II. First-approximation stability of stochastic impulse systems with markov parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 3. P. 464–476.
10. Lukashiv T.O., Yasinskiy V.K., Yasinskiy E.V. Stabilization of stochastic diffusive dynamical systems with impulse Markov switchings and parameters. Part I. Stability of impulse stochastic systems with Markov parameters. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2009. Vol. 41, N 2. P. 1–24.
11. Lukashiv T.O., Yasinskaya L.I., Yasinskiy V.K. Stabilization of stochastic diffusive dynamical systems with impulse Markov switchings and parameters. Part II. Stabilization of dynamical systems of random structure with external Markov switchings. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2009. Vol. 41, N 4. P. 26–42.

12. Лукашів Т.О., Чабанюк Я.М., Ясинський В.К. Вибрані питання стійкості систем випадкової структури зі скінченною післядією з урахуванням зовнішніх марковських перемикань. *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*. Сер.: Фізико-математичні науки. 2010. № 601. С. 67–72.
13. Yasinsky V.K. Stability of stochastic dynamic random-structure systems with aftereffect and external Markov switchings. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 5. P. 706–719.
14. Лукашів Т.О., Ясинський В.К. Стійкість за ймовірністю в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з постійним запізненням. *Волинський математичний вісник*. Сер.: Прикладна математика. 2013. Вип. 10 (191). С. 140–151.
15. Yasinsky V.K. Stability in the first approximation of random-structure diffusion systems with aftereffect and external Markov switchings. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 248–259.
16. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasinskyy V.K. Behavior of the second moment of the solution to the autonomous stochastic linear partial differential equation with random parameters in the rigth-hand side. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 1. P. 56–63.
17. Дуб Дж. Вероятностные процессы. Москва: Физматгиз, 1963. 605 с.
18. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. Москва: Физматгиз., 1969. 859 с.
19. Ethier S.N., Kurtz T.G. Markov processes. Characterization and convergence. New York: Wiley, 2005. 552 p.
20. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1987. 328 с.
21. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.

Надійшла до редакції 21.12.2016

Т.О. Лукашів, В.К. Ясинський

СТІЙКІСТЬ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ВИПАДКОВОЇ СТРУКТУРИ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ І ЗБУРЕННЯМИ

Анотація. За допомогою апарату функціоналів Ляпунова–Красовського досліджено стійкість за ймовірністю, асимптотичну стохастичну стійкість, стійкість в середньому квадратичному, експоненційну стійкість в середньому квадратичному в цілому стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями і збуреннями.

Ключові слова: стохастична динамічна система, асимптотична стійкість, експоненційна стійкість, стійкість за ймовірністю, стійкість у середньому квадратичному.

T.O. Lukashiv, V.K. Yasinsky

STABILITY OF STOCHASTIC SYSTEMS OF RANDOM STRUCTURE WITH MARKOV SWITCHINGS AND PERTURBATIONS

Abstract. The authors use Lyapunov–Krasovsky functionals to investigate the stability in probability, asymptotic stability in probability, stability in the mean square, exponential stability in the mean square in the whole of stochastic dynamic systems of random structure with Markov switchings and perturbation.

Keywords: stochastic dynamic systems, asymptotic stability, exponential stability, stability over probability, stability in the mean square.

Лукашив Тарас Олегович,
ассистент кафедры Черновицкого национального университета имени Юрия Федьковича,
e-mail: t.lukashiv@gmail.com.

Ясинский Владимир Кириллович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Черновицкого национального университета
имени Юрия Федьковича, e-mail: yasinsk@list.ru.