УДК 519.212

Д.В. ЕВГРАФОВ

ИНТЕНСИВНОСТЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ЗАДАННОГО УРОВНЯ ОДНОРОДНЫМ СЛУЧАЙНЫМ ПОЛЕМ

Аннотация. Дано определение понятия интенсивности пересечений однородным полем заданного уровня как среднего количества попаданий точек поверхности уровня в расширяющееся пространство. Показано, что независимо от положения центра расширяющегося пространства задача отыскания интенсивности сводится к подсчету поверхностей уровня в единице объема. Сформулирована возможность отыскания количества поверхностей уровня как характеристики, зависящей от количества поверхностно порождающих точек. Найдено дифференциальное уравнение, связывающее интенсивности точек локальных максимумов и локальных минимумов с искомой интенсивностью поверхностей уровня. На гауссовом стационарном процессе проверена достоверность полученных результатов, которые полностью совпадают с выражением, впервые найденным Райсом.

Ключевые слова: пересечения фиксированного уровня снизу вверх (сверху вниз) случайным полем, ожидаемое количество выбросов случайного поля, распределение абсолютного максимума случайного поля.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих приложениях теории вероятности при построении математических моделей необходимо вычислять вероятности событий или вероятностные характеристики, определяемые свойствами реализаций случайных полей. Среди подобных задач значительный интерес представляет отыскание интенсивности потока событий, обусловленных моментами пересечений случайным полем заданного уровня. При этом необходимо найти аналог результата, полученного Райсом [1] для одномерного однородного случайного поля (стационарного случайного процесса).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Выражения, характеризующие интенсивность пересечения процессом уровня u снизу вверх и сверху вниз имеют вид соответственно

$$\mu_+(u) = \int_0^{\infty} y w(u, y) dy, \tag{1}$$

$$\mu_-(u) = -\int_{-\infty}^{0} y w(u, y)\, dy, \tag{2}$$

где $w(u, y)$ — совместная плотность вероятности распределения процесса и его производной. Найдем подобное (1) и (2) выражение для многомерных случайных полей.

Аналогичные задачи возникают в процессе отыскания количества включений каких-либо пороговых устройств в зависимости от случайного поля параметров, а также для систем обработки оптической информации и расчета надежности [2]. Важными являются результаты отыскания интенсивностей, используемых в механике [3] для изучения вопросов разрушения, в том числе для расчета надежности строительных конструкций на хрупкое разрушение [4, 5], а также для решения других задач [6, 7].

Интенсивности пересечений пытались найти ученые советской [8] и западной [9] научных школ. Первые результаты подобных системных исследований опубликованы в работе Адлера, в которой определяется интенсивность потока выбросов случайного центрированного однородного гауссова поля $X(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in R^N$, N — размерность случайного поля, за уровень u выражением

$$\mu_+(u) = (2\pi)^{-(N+1)/2} |\mathbf{\Lambda}|^{1/2} \sigma^{-(2N-1)} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{[(N-1)/2]} (-1)^j \frac{(2j)!}{j! 2^j} \sigma^{2j} C_{N-1}^{2j} u^{N-1-2j}, \tag{3}$$

где $\sigma^2 = E\{X^2(\mathbf{t})\}$ — дисперсия случайного поля, C_N^k — число сочетаний без повторений, $\mathbf{\Lambda}$ — ковариационная матрица первых частных производных поля $X(\mathbf{t})$.

Для $N = 1$ (3) совпадает с (1) и (2):

$$\mu_+(u) = \mu_-(u) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right), \tag{4}$$

где λ_2 — второй спектральный момент процесса. Однако для $N = 2$ получаем выражение

$$\mu_+(u) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma^3} |\mathbf{\Lambda}|^{1/2} u \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right),$$

в котором интенсивность потока событий отрицательна при $u < 0$. На данное несоответствие полученного результата физическому смыслу величины $\mu_+(u)$ впервые указал Носко [8], ссылаясь на более раннюю совместную работу Адлера и Хасофера [9].

Спустя более двадцати лет Адлер в развитие своей теории представил новый результат для изотропного случайного гауссова поля [10], кардинально отличающийся от (3). Используя эйлеровские характеристики, Адлер предложил анализировать количество выбросов $\#\{\varphi(A_u)\}$, $\# = 0, 1, 2, \ldots$, случайного поля за уровень u в пространстве объемом $T = [0, S]^N$ и нашел математическое ожидание от количества выбросов вида

$$E\{\#\{\varphi(A_u)\}\} = \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) \sum_{k=1}^{N} \frac{C_N^k T^k \lambda_2^{k/2}}{(2\pi)^{(k+1)/2}} H_{k-1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \Psi\left(\frac{u}{\sigma}\right), \tag{5}$$

где $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds$, $H_k(x)$ — полиномы Эрмита.

Безразмерное выражение (5) для $T = 1$ очевидно описывает величину μ_+ размерности $1/t^N$: $\mu_+(u) \cong E\{\#\{\varphi(A_u)\}\}$, но поскольку для любого N математическое ожидание $E\{\#\{\varphi(A_u)\}\} \to 1$, когда $u \to -\infty$, полученный результат не соответствует (4) при $N = 1$. К тому же (5) не устраняет недостаткиов (3), связанных с отрицательными значениями для $\mu_+(u)$, о которых упоминалось ранее. Например, для $N = 2$ и $\sigma = 1$ выражение (5)

$$E\{\#\{\varphi(A_u)\}\} = \left(\frac{T^2 \lambda_2}{(2\pi)^{3/2}} u + \frac{2T\lambda_2^{1/2}}{2\pi}\right) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) + \Psi(u)$$

будет отрицательным при определенных отрицательных значениях *u*.

Адлер не считал отрицательность количества выбросов помехой для признания полученного результата и объяснял это следующим образом [10, с. 204]: «Геометрический смысл отрицательных значений (5) необходимо понять. Они обусловлены выбросами, имеющими в среднем больше отверстий, чем связных компонент, характерных для большинства отрицательных значений u». Не вдаваясь в подробности терминологии эйлеровой геометрии, такое объяснение трудно принять, тем более его толкование результата (5) для $u \to -\infty$ [10, с. 202]: «Уровень u геометрически находится ниже выбросов: это просто». Далее Адлер сделал вывод о том, что, когда $u \to -\infty$, объем выброса $A_u \equiv T$ и поэтому $\#\{\varphi(A_u)\} = 1$.

Последнее объяснение не имеет особого значения, а скорее характеризует объемы выбросов для $u \to -\infty$, которые действительно стремятся к T. Не следует путать количество выбросов в единице объема с количеством пересечений случайным полем уровня u, попадающих в данную единицу объема. Изначально, поставив задачу: найти количество пересечений, Адлер свел ее к простому подсчету выбросов без учета того, было ли поле в начальный момент $\mathbf{t}_0$ ниже уровня u — для анализа выбросов снизу вверх, и выше уровня u — для анализа выбросов сверху вниз. Поскольку плотность вероятности распределения для $u \to -\infty$ стремится к нулю, вероятность пересечения полем бесконечно низкого уровня также стремится к нулю, а поэтому и пересечение происходит крайне редко. Иными словами, пересечений там быть не может, несмотря на то, что выброс с единичной вероятностью находится над бесконечно низким уровнем u.

Подобные заблуждения встречаются и в более поздних работах [11, 12], а в проекте книги Адлера, Тейлора и Ворсли, которая с 2014 г. готовится к публикации, данные ошибки пока не исправлены. Поскольку никаких более весомых публикаций в этой области не имеется, а приведенные результаты кажутся ошибочными уже для $N = 2$, поставим такую же задачу и найдем ее правильное решение.

Цель настоящей работы: найти выражения для $\mu_+(u)$ и $\mu_-(u)$ однородных случайных полей конечной размерности N.

Рассмотрим однородное, случайное поле $X(\mathbf{t})$ с дисперсией $\sigma^2 = E\{X^2(\mathbf{t})\} - E^2\{X(\mathbf{t})\}$ и конечным определителем $|\mathbf{\Lambda}| \neq \infty$ ковариационной матрицы $\mathbf{\Lambda}$ первых частных производных поля. Пусть $X(\mathbf{t})$ задано в фазовом пространстве $\mathbf{t} \in R^N$, N — конечная размерность евклидового пространства. Зададим множества $L_u = \{\mathbf{s} \in R^N : X(\mathbf{s}) = u\}$, являющиеся поверхностями уровня u, и любую точку $\mathbf{t}_{0+}$, для которой $X(\mathbf{t}_{0+}) < u$, а также $\mathbf{t}_{0-}$, для которой $X(\mathbf{t}_{0-}) > u$, где u — некоторый фиксированный вещественный уровень. Очевидно, например, что для $N = 1$ данными поверхностями будут точки перехода процесса через уровень u, для $N = 2$ — линии сечения поля плоскостью с высотою u, при $N = 3$ — поверхности, состоящие из точек $X(\mathbf{s}) = u$.

Введем $\eta_+(u, T)$, $\eta_-(u, T)$ — счетчики пересечений полем $X(\mathbf{t})$ уровня u, которые подсчитывают количество всех самых ближайших $\mathbf{s}$-точек L_u-поверхностей, т.е. $\mathbf{s}_u$-точек

$$\eta_+(u, T) = \#\{\mathbf{s}_u \in \Gamma_{T+}\}, \ \eta_-(u, T) = \#\{\mathbf{s}_u \in \Gamma_{T-}\}, \tag{6}$$

попавших в шары с радиусом r и объемом T с центрами в точках $\mathbf{t}_{0+}$ и $\mathbf{t}_{0-}$:

$$\Gamma_{T+} = \left\{\mathbf{t} \in R^N : \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{0+j})^2 \le r^2\right\}, \ \Gamma_{T-} = \left\{\mathbf{t} \in R^N : \sum_{j=1}^{N} (t_j - t_{0-j})^2 \le r^2\right\}.$$

Очевидно, что искомые интенсивности потоков пересечений полем уровня u равны усредненному по T количеству (6)

$$\mu_+(u) = \lim_{T \to \infty} \frac{\eta_+(u, T)}{T}, \ \mu_-(u) = \lim_{T \to \infty} \frac{\eta_-(u, T)}{T}. \tag{7}$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Отметим, что, каким бы ни был выбор точек $\mathbf{t}_{0+}$ и $\mathbf{t}_{0-}$, им соответствуют одинаковые значения (6), поскольку любой $\mathbf{s}_u$-точке соответствует только одна L_u-поверхность (рис. 1), т.е.

$$\mu_+(u) = \mu_-(u) = \mu_L(u), \tag{8}$$

где $\mu_L(u)$ — интенсивность поверхностей уровня *u*. В качестве областей Γ_{T+} и Γ_{T-}, кроме выбранных шаров, можно использовать любую область с гладкой границей.

Нахождение интенсивностей потоков пересечений полем заданного уровня согласно (8) сводится к отысканию интенсивности L_u-поверхностей. Известно, что для любой выборочной функции однородного поля с единичной вероятностью, интегрируемой по Риману в Γ_T-области (на N-мерных кубах $T = [0, S] \times \ldots \times [0, S] = S^N$), интенсивность, как и в случае (7), рассчитывается в соответствии с интегралом [13]

$$\mu_L(u) = E\{\eta_L(u)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T^{1/N}} \ldots \int_0^{T^{1/N}} \mathrm{N}_L(u, \mathbf{t})\, dt_1 \ldots dt_N < \infty, \tag{9}$$

если некоторый функционал $\mathrm{N}_L(u, \mathbf{t})$ вероятностного пространства, определенным образом характеризующий поле $X(\mathbf{t})$, является измеримым.

Понятие «измеримый» обычно применяют к точечным случайным множествам, а в данном случае приходится подсчитывать количество поверхностей. Существует понимание того, что количество L_u-поверхностей в определенном объеме пространства можно подсчитать, однако возникает вопрос, каким образом провести подобный подсчет.

В настоящее время известны подходы к оценке некоторых свойств L_u-поверхностей. Доказанная Коррсином теорема [14] позволяет найти среднюю длину линий L_u-поверхностей для $N = 2$ или среднюю площадь L_u-поверхностей для $N = 3$ на заданных площадях или объемах пространства соответственно. Однако применить эти результаты для расчета среднего количества L_u-поверхностей невозможно. Тем не менее можно показать, что среднее количество L_u-поверхностей в некотором пространстве объемом T связано со средним количеством некоторых $\mathbf{t}$-точек в аналогичном объеме пространства. Будем называть такие точки поверхностно порождающими [15].

Примем вначале не требующее строгого доказательства заключение. Поскольку L_u-поверхности разделяют все точки фазового пространства на четко заданные области с ненулевыми объемами, в которых $X(\mathbf{t}) < u$ и $X(\mathbf{t}) > u$, для широкого класса полей L_u-поверхности всегда замкнутые, а их количество в конечном объеме фазового пространства можно подсчитать, так как оно зависит от количества поверхностно порождающих точек.

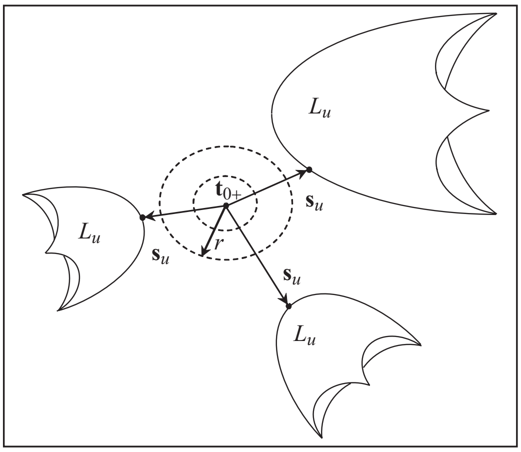

Рис. 1. Примеры $\mathbf{s}_u$-точек случайного поля для расширяющегося из точки $\mathbf{t}_{0+}$ шара

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим эволюцию L_u-поверхностей при перемещении уровня *u* от бесконечности вниз. Для наглядности примем здесь $N = 2$, хотя подобные выводы можно сделать по крайней мере для $N = 3$. В случае больших u ($u = u_1$, см. рис. 2, *а*) L_u-поверхности представляют собой редкие эллипсы вокруг точек локальных максимумов поля, находящихся выше уровня u_1.

По мере понижения u ($u = u_2$, см. рис. 2, *б*) размеры ранее порожденных L_u-поверхностей увеличиваются, а к ним добавляются новые эллипсы вокруг точек локальных максимумов поля, находящихся между уровнями u_2 и u_1, а также локальных минимумов поля, находящихся ниже уровня u_2. При этом форма контуров становится неправильной, а их расширение приводит к слиянию.

Дальнейшее снижение u ($u = u_3$, см. рис. 2, *в*) приводит к большему слиянию контуров и образованию внутри них новых контуров, расположенных вокруг точек локальных минимумов ниже уровня u_3.

Анализ эволюции L_u-поверхностей позволяет сделать вывод: количество L_u-поверхностей в заданном пространстве объемом T зависит только от количества точек $\mathbf{t}_{\min}(u)$ локальных минимумов $\eta_{t-}(u,T) = \#\{\mathbf{t}_{\min}(u) \in \Gamma_T\}$ и количества точек $\mathbf{t}_{\max}(u)$ локальных максимумов $\eta_{t+}(u,T) = \#\{\mathbf{t}_{\max}(u) \in \Gamma_T\}$ случайного поля в пространстве с аналогичным объемом T. Интеграл в (9) можно также выразить через функцию

$$\int_0^{T^{1/N}} \dots \int_0^{T^{1/N}} \mathrm{N}_L(u, \mathbf{t})\, dt_1 \dots dt_N = \eta_L(u,T) = f\,[\eta_{t-}(u,T), \eta_{t+}(u,T)], \qquad (10)$$

определенным образом связывающую $\eta_L(u,T)$ — случайное количество L_u-поверхностей в пространстве объемом T, со случайными количествами точек локальных минимумов $\eta_{t-}(u,T)$ и максимумов $\eta_{t+}(u,T)$ в пространстве объемом T.

Найдем функцию $f[\eta_{t-}(u,T), \eta_{t+}(u,T)]$, воспользовавшись выводом, сделанным при анализе эволюции L_u-поверхностей. Отыщем производную, классически определив ее в виде предела

$$\frac{\partial f[\eta_{t-}(u,T), \eta_{t+}(u,T)]}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\eta_L(u+\Delta u, T) - \eta_L(u,T)}{\Delta u}, \qquad (11)$$

где $\eta_L(u,T)$ и $\eta_L(u+\Delta u, T)$ — количество поверхностей уровней u и $u+\Delta u$ соответственно в Γ_T-области объемом T.

Отметим, что для любых конечных пространств объемом T их разность всегда конечна:

$$\Delta \eta_L(u,T) = \eta_L(u+\Delta u, T) - \eta_L(u,T) < \infty, \qquad (12)$$

т.е. интеграл вида (9) существует для (12).

С учетом представления об эволюции L_u-поверхностей очевидно, что общее количество $\eta_L(u,T)$ составят L_u-поверхности, образованные точками локальных максимумов $\mathbf{t}_{\max}(u+\Delta u)$, и поверхности $\eta_L(u+\Delta u, T)$, образованные точками локальных минимумов $\mathbf{t}_{\min}(u)$. Другие поверхности критических уровней $\eta_L(u,T)$ и $\eta_L(u+\Delta u, T)$ при $\Delta u \to 0$ только немного сместятся в Γ_T-области, а разность (12)

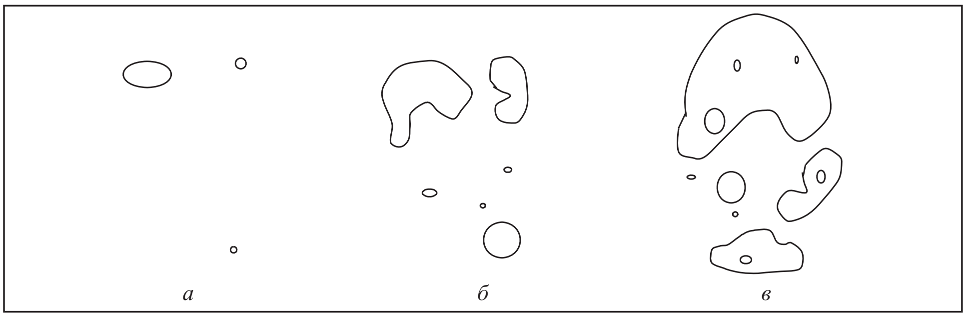

Рис. 2. Эволюция L_u-поверхностей: для $u = u_1$ (*а*), для $u = u_2$ (*б*), для $u = u_3$ (*в*) при $u_1 > u_2 > u_3$

между их количеством будет равна нулю. Поскольку количество точек $\mathbf{t}_{\max}(u+\Delta u)$ и $\mathbf{t}_{\min}(u)$ в конечном объеме T конечно, имеем

$$\lim_{\Delta u \to 0}[\eta_L(u+\Delta u, T)-\eta_L(u,T)] = \lim_{\Delta u\to 0}[\eta_{t-}(u,T)-\eta_{t+}(u+\Delta u, T)] =$$

$$= \eta_{t-}(u,T)-\eta_{t+}(u,T),$$

а для $\Delta u \to 0$ можно записать (12) в виде

$$\Delta \eta_L(u,T) = \eta_{t-}(u,T)-\eta_{t+}(u,T). \tag{13}$$

Выражения для $\eta_{t+}(u,T)$ и $\eta_{t-}(u,T)$ известны и представлены, например, в [16]. Количество максимумов (минимумов) случайного поля в интервале значений $[u, u+\Delta u]$, $\Delta u \to 0$, которые попали в пространство объемом T, равны

$$\eta_{t+}(u,T) = \Delta u T \int\limits_{\|z_{i,j}\| \prec 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij},$$

$$\eta_{t-}(u,T) = \Delta u T \int\limits_{\|z_{i,j}\| \succ 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij}, \tag{14}$$

где $w_n(u, y_1,\ldots, y_N, z_{11},\ldots, z_{NN})$ — совместная $n=(N^2+3N+2)/2$-мерная плотность вероятности распределения поля $X(\mathbf{t})=u$, его первых частных производных

$$\mathbf{y} = \left(\frac{\partial X(\mathbf{t})}{\partial t_1}, \frac{\partial X(\mathbf{t})}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial X(\mathbf{t})}{\partial t_N}\right)$$

и его вторых частных производных

$$\mathbf{z} = \left\| \frac{\partial^2 X(\mathbf{t})}{\partial t_i \partial t_j} \right\|, \ i,j=\overline{1,N},$$

для любой точки $\mathbf{t}$; символами $\prec 0$ и $\succ 0$ обозначены отрицательная и положительная определенность матрицы $\mathbf{z}=\| z_{i,j}\|$ соответственно.

С учетом (10), (13) и (14) можно записать (11) в виде

$$\frac{\partial \eta_L(u,T)}{\partial u} = \frac{\partial f[\eta_{t-}(u,T), \eta_{t+}(u,T)]}{\partial u} =$$

$$= T\left[\int\limits_{\|z_{i,j}\|\prec 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\|z_{i,j}\|\prec 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij}\right],$$

а производную от (9) — в виде

$$\frac{d\mu_L(u)}{du} = \left[\int\limits_{\|z_{i,j}\|\succ 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\|z_{i,j}\|\prec 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(u,0,\ldots,0,z_{11},\ldots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j \\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij}\right]. \tag{15}$$

Поскольку $d\mu_L(u)/du|_{u=\infty}=0$, дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными (15) соответствует простое решение, записанное с учетом (8) в виде

$$\mu_+(u)=\mu_-(u)=\int\limits_u^\infty \int\limits_{\|z_{i,j}\|\prec 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(h,0,\dots,0,z_{11},\dots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j\\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij}\,dh-$$

$$-\int\limits_u^\infty \int\limits_{\|z_{i,j}\|\succ 0} |\det\|z_{i,j}\||\, w_n(h,0,\dots,0,z_{11},\dots,z_{NN}) \prod_{\substack{i\le j\\ i,j=\overline{1,N}}} dz_{ij}\,dh. \qquad (16)$$

Заметим, что полученный результат справедлив для любых распределений случайного однородного, не обязательно изотропного поля. Кроме того, (16) не имеет недостатков «отрицательности», присущей выражениям (3) и (5). В этом легко убедиться. Первый член (16) всегда больше второго, так как суммарное количество точек максимума для любого однородного поля всегда больше суммарного количества точек минимума, находящихся выше фиксированного уровня u, за исключением случая, когда $u=-\infty$.

Для расчетов в соответствии с (16) необходимо $1+N(N+1)/2$-кратное интегрирование. Представим его в удобном для понимания виде хотя бы, когда $N=1,2$. Для $N=1$ (стационарного процесса)

$$\mu_L(u)=\int\limits_u^\infty dh\int\limits_{-\infty}^0 |z|\,w_3(h,0,z)dz-\int\limits_u^\infty dh\int\limits_0^\infty |z|\,w_3(h,0,z)dz=$$

$$=-\int\limits_u^\infty dh\int\limits_{-\infty}^\infty zw_3(h,0,z)\,dz, \qquad (17)$$

где $w_3(h,y,z)$ — совместная плотность вероятности распределения процесса, его скорости и ускорения в совпадающие моменты времени.

Для $N=2$ приходится прибегать к четырехкратному интегрированию, а **z**-матрица положительно определена, когда $z_{11}z_{22}-z_{12}^2>0$. В этом случае для любого фиксированного z_{12} должно выполняться неравенство $z_{22}>z_{12}^2/z_{11}$, что соответствует заштрихованной области выше гиперболы в первом, втором и третьем квадрантах (рис. 3).

Соответственно для отрицательно-определенной **z**-матрицы области интегрирования находятся в незаштрихованных областях первого, третьего и четвертого квадрантов (см. рис. 3), а результаты интегрирования после объединения двух пар интегралов можно представить в виде

$$\mu_L(u)=\int\limits_u^\infty dh\int\limits_{-\infty}^\infty dz_{12}\int\limits_{-\infty}^\infty dz_{22}\left[\int\limits_{-\infty}^0 (z_{11}z_{22}-z_{12}^2)w_6(h,0,0,z_{11},z_{12},z_{22})dz_{11}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\infty (z_{11}z_{22}-z_{12}^2)w_6(h,0,0,z_{11},z_{12},z_{22})\,dz_{11}\right],$$

где $w_6(h,y_1,y_2,z_{11},z_{12},z_{22})$ — совместная плотность вероятности распределения процесса, его двумерной скорости и совместных ускорений в совпадающие моменты времени, z_{11},z_{12},z_{22} — члены матрицы ускорения

$$\mathbf{z}=\begin{Vmatrix} z_{11} & z_{12}\\ z_{21} & z_{22}\end{Vmatrix},$$

в которой $z_{21}=z_{12}$.

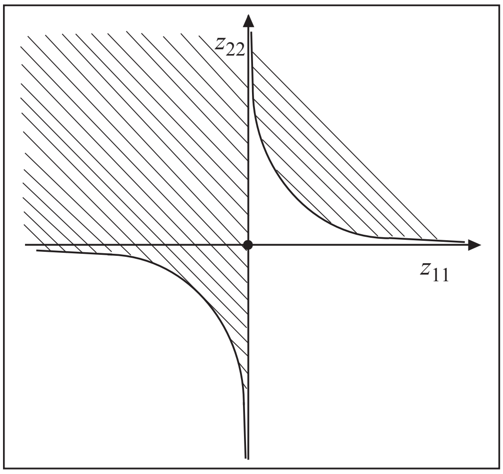

Рис. 3. Определение области интегрирования для $N=2$ и положительно-определенной **z**-матрицы

Аналогично можно представить результаты для любого конечного N путем $1+N(N+1)/2$-кратного интегрирования $(N^2+3N+2)/2$-мерных плотностей вероятности распределения поля, его первых и вторых частных производных. Однако с ростом N определить области интегрирования становится сложнее, а с учетом того, что полученные выражения аналитически громоздки, расчеты легче проводить с использованием прикладных математических пакетов, предусмотренных для таких случаев.

В заключение полезно проверить (17) для стационарного центрированного гауссова случайного процесса с дисперсией σ^2. В этом случае

$$w_3(h, y, z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi D}}\exp\left[-\frac{1}{2D}(D_{11}h^2+2D_{13}hz+D_{22}y^2+D_{33}z^2)\right], \quad (18)$$

$D=\sigma^6\lambda_2(\lambda_4-\lambda_2^2)$, $D_{11}=\sigma^2\lambda_2\lambda_4$, $D_{13}=\sigma^4\lambda_2^2$, $D_{22}=\sigma^4(\lambda_4-\lambda_2^2)$, $D_{33}=\sigma^4\lambda_2$, λ_2 — как и ранее, конечный второй спектральный момент процесса, λ_4 — четвертый спектральный момент процесса.

Подстановка (18) в (17) и интегрирование в (17) вначале по z, а потом по h приводит к ожидаемому результату (4).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для решения поставленной задачи не нужны громоздкие конструкции с использованием специальной геометрии и эйлеровских характеристик, как это сделано в работах [10–12].

2. Как и для одномерного случая, интенсивности пересечений регулярным случайным полем уровня u снизу вверх и сверху вниз одинаковы.

3. Дальнейшие исследования в данном направлении интересны для негауссовых случайных полей, а также для фазовых пространств с размерностью $N \geq 3$. Это потребует $1+N(N+1)/2$- кратного интегрирования $(N^2+3N+2)/2$-мерных плотностей вероятности распределения поля, его первых и вторых частных производных, что затрудняет получение результата в аналитическом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rice S.O. Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*. 1944. Vol. 23, N 3; 1945. Vol. 24, N 1. Перевод в сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех». Под ред. Н.А. Железнова. Москва: Изд-во иностра. лит., 1953. 284 с.
2. Беляев Ю.К. Распределение максимума случайного поля и его приложение к задачам надежности. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* 1970. № 2. С. 77–84.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Под ред. Г.С. Шапиро. Т. 1. Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. 647 с.
4. Болотин В.В. Основы теории надежности механических систем. В кн. Прочность, устойчивость, колебания. Москва: Машиностроение, 1968. Т. 1 С. 164–182.
5. Шукайло В.Ф. О распределении абсолютного максимума стационарного случайного процесса. *Радиотехника и электроника*. 1968. Т. 13, № 6. С. 996–1006.

6. Лонге-Хиггинс М.С. Статистическая геометрия поверхностей. Сб. Гидродинамическая неустойчивость. Москва: Изд-во иностр. лит., 1964. С. 124–167.
7. Лонге-Хиггинс М.С. Статистический анализ случайной движущейся поверхности. Сб. Ветровые волны. Москва: Изд-во иностр. лит., 1962, С. 125–218.
8. Носко В.П. Об определении числа выбросов случайного поля за фиксированный уровень. *Теория вероятностей и ее применение*. 1979. Т. 24, № 3. С. 3–5.
9. Adler R.J. The geometry of random fields. New York: John Wiley & Sons, 1981. 280 p.
10. Adler R.J., Taylor J.E. Random field and their geometry. New York: Springer, 2003. 288 p.
11. Adler R.J., Taylor J.E. Random field and geometry. New York: Springer, 2007. 448 p.
12. Adler R.J. The geometry of random fields. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. 295 p.
13. Носко В.П. Локальная структура гауссовских случайных полей в окрестности высоких бликов. *Докл. АН СССР*. 1969. Т. 189, № 4. С. 714–717.
14. Corrsin S. A measure of area of homogeneous random surface in space. *Quart. Appl. Math*. 1954. Vol. 12. P. 404–408.
15. Евграфов Д.В. Распределение абсолютного максимума однородного случайного поля. *Проблемы управления и информатики.* 2008. № 1. С. 96–103.
16. Беляев Ю.К. О всплесках и бликах случайных полей. *Докл. АН СССР.* 1967. Т. 176, № 3. С. 495–497.

Надійшла до редакції 07.02.2017

Д.В. Євграфов

ІНТЕНСИВНІСТЬ ПЕРЕТИНІВ ЗАДАНОГО РІВНЯ ОДНОРІДНИМ ВИПАДКОВИМ ПОЛЕМ

Анотація. Наведено визначення поняття інтенсивності перетинів однорідним полем заданого рівня як середньої кількості потрапляння точок поверхні рівня у розширному просторі. Показано, що незалежно від положення центру розширного простору задача відшукування інтенсивності зводиться до підрахунків кількості поверхонь рівня в одиниці об'єму. Сформульовано можливість відшукування кількості поверхонь рівня як характеристики, що залежить від кількості поверхнево породжувальних точок. Знайдено диференційне рівняння, яке зв'язує інтенсивності точок локальних максимумів і локальних мінімумів з шуканою інтенсивністю поверхонь рівня. На гаусівському стаціонарному процесі перевірено достовірність отриманих результатів, які повністю збігаються з виразом, уперше знайденим Райсом.

Ключові слова: перетини фіксованого рівня знизу вверх (зверху вниз) випадковим полем, очікувана кількість викидів випадкового поля, розподіл абсолютного максимуму випадкового поля.

D.V. Yevgrafov

INTENSITY OF CROSSINGS A GIVEN LEVEL OF HOMOGENEOUS RANDOM FIELD

Abstract. The author defines the concept of the intensity of crossings of a given level by a homogeneous field as the average number of points of level surface that hit the expanding space. It is shown that irrespective of the position of the center of expanding space, the problem of finding the intensity reduces to counting the level surfaces per unit volume. The author formulates the possibility of finding the number of level surfaces as a characteristic that depends on birth-surface points. A differential equation is found that relates the intensities of points of local maxima and local minima with the desired intensity of level surfaces. The accuracy of the results is verified for the stationary Gaussian process. The results completely coincide with the expression found by Rice for the first time.

Keywords: up-crossings (down-crossings) of the fixed level by random field, expected number of excursion sets for the random field, distribution of absolute maximum of random field.

Евграфов Дмитрий Викторович,
кандидат техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»,
e-mail: ramgraf@bigmir.net.