

## РІЗНИЦЕВА ДИФУЗІЙНА МОДЕЛЬ З ДВОМА РІВНОВАЖНИМИ СТАНАМИ

**Анотація.** Різницеву дифузійну модель з двома рівноважними станами задано стохастичним рівнянням з двома компонентами: передбачуваною, що визначається функцією регресії приростів з двома еквілібріумами, та стохастичною, яка є мартингал-різницею. Запропоновано класифікацію зон впливу еквілібріумів за асимптотичними властивостями траєкторій статистичних експериментів. Досліджено асимптотичну поведінку статистичних експериментів, заданих сумами  $N$  вибірових величин для  $N \rightarrow \infty$ .

**Ключові слова:** дискретна марковська дифузія, еволюційний процес, класифікація еквілібріумів, стохастична апроксимація.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У роботах [1, 2] досліджено статистичні експерименти (СЕ), задані усередненими сумами вибірових величин, які набувають бінарних значень.

Статистичні експерименти визначають усередненими сумами вибірових величин  $\delta_n(k)$ ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $k \geq 0$ , незалежних у сукупності при фіксованому  $k \geq 0$  і однаково розподілених для різних  $n \in [1, N]$ , що набувають скінченної кількості значень (для простоти значення  $\pm 1$ ):

$$S_N(k) := \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \delta_r(k), \quad -1 \leq S_N(k) \leq 1, \quad k \geq 0. \quad (1)$$

Відповідні частотні СЕ задають усередненими сумами

$$S_N^\pm(k) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta_n^\pm(k), \quad \delta_n^\pm(k) := I\{\delta_n(k) = \pm 1\}, \quad k \geq 0. \quad (2)$$

Тут індикатор випадкової події  $I(A) = 1$ , якщо  $A$  відбувається, або  $I(A) = 0$ , якщо  $A$  не відбувається. Параметр  $k \geq 0$  означає послідовність етапів спостережень і його вважають дискретним часом, що параметризує динаміку СЕ.

Очевидна умова балансу має вигляд

$$S_N^+(k) + S_N^-(k) \equiv 1 \quad \forall k \geq 0.$$

Співвідношення зв'язку

$$S_N(k) = S_N^+(k) - S_N^-(k), \quad S_N^\pm(k) = \frac{1}{2}[1 \pm S_N(k)] \quad (3)$$

дозволяють вивчати еволюцію СЕ, що задаються одним із процесів, визначених (1) або (2).

Надалі основну увагу приділено дослідженню динаміки СЕ, яку визначають позитивні частоти  $S_N^+(k)$ ,  $k \geq 0$ . Разом з тим корисно вивчати також динаміку бінарних СЕ  $S_N(k)$ ,  $k \geq 0$ , що задаються усередненими сумами (1).

Динаміку СЕ визначають еволюційними процесами (ЕП)  $P_\pm(k)$ ,  $k \geq 0$ , заданими умовними математичними сподіваннями

$$P_\pm(k+1) := E[S_N^\pm(k+1) | S_N^\pm(k) = P_\pm(k)], \quad k \geq 0, \quad (4)$$

$$C(k+1) := E[S_N(k+1) | S_N(k) = C(k)], \quad k \geq 0. \quad (5)$$

Співвідношення (3) породжує зв'язок ЕП (4) і (5):  $C(k) = P_+(k) - P_-(k)$ . З урахуванням очевидної умови балансу

$$P_+(k) + P_-(k) \equiv 1 \quad \forall k \geq 0,$$

частотні ЕП  $P_{\pm}(k)$ ,  $k \geq 0$ , мають представлення (див. (3))

$$P_{\pm}(k) = \frac{1}{2}[1 \pm C(k)], \quad k \geq 0.$$

У розд. 2 різницеву еволюційну модель задано приростами частотних ймовірностей

$$\Delta P_{\pm}(k+1) = P_{\pm}(k+1) - P_{\pm}(k), \quad k \geq 0, \quad (6)$$

а також приростами бінарних ЕП

$$\Delta C(k+1) = C(k+1) - C(k), \quad k \geq 0. \quad (7)$$

Динаміку ЕП (4) і (5) визначають умовними математичними сподіваннями

$$V^{\pm}(p_{\pm}) := E[\Delta S_N^{\pm}(k+1) | S_N^{\pm}(k) = p_{\pm}], \quad 0 \leq p_{\pm} \leq 1, \quad (8)$$

$$V_0(c) := -E[\Delta S_N(k+1) | S_N(k) = c], \quad |c| \leq 1. \quad (9)$$

Очевидний зв'язок умовних математичних сподівань (8) і (9) має вигляд

$$V_0(c) := -[V^+(p_+) - V^-(p_-)], \quad c = p_+ - p_-, \quad p_{\pm} = \frac{1}{2}[1 \pm c].$$

**Зауваження 1.** Умовні математичні сподівання (8) і (9) визначають передбачувані компоненти СЕ (2) і (1).

Основною метою цієї роботи є дослідження динаміки СЕ (1) і (2) та їхніх ЕП (4) і (5) за етапами  $k \rightarrow \infty$  з урахуванням особливостей подання умовних математичних сподівань (8) і (9). Досліджуються «зони впливу» двох еквілібріумів, що породжуються за принципом «стимулювання – стримання». Універсальність цього принципу можна підтвердити реальними інтерпретаціями динаміки економічних процесів [3, 4], розвитком моделей популяційної генетики [5] та інтерпретацією процесів навчання [6].

Дослідження передбачуваних компонент з урахуванням принципу «стимулювання – стримання» реалізовано в розд. 3–8. У розд. 3 вивчено частотні та бінарні ЕП, які характеризуються «зонами впливу» еквілібріумів  $\pi_{\pm}$ , і визначено притягувальний  $\pi_+$  та відштовхувальний  $\pi_-$  еквілібріуми (теорема 1 у частотному представленні і її бінарний варіант — теорема 2). У розд. 4 наведено інтерпретацію зон впливу двох еквілібріумів з урахуванням асимптотичної поведінки ЕП для  $k \rightarrow \infty$ . У розд. 5–8 дослідження СЕ з функцією регресії приростів, що має два еквілібріуми, проведено за схемою робіт [1, 2]. Спочатку (розд. 5) динаміку СЕ (1) та (2) задано різницеvim стохастичним рівнянням з урахуванням мартингалів та їхніх перших двох моментів. Потім (розд. 6) запропоновано класифікувати еквілібріуми стохастичної моделі СЕ з використанням методу стохастичної апроксимації [7]. У розд. 7 стохастичну компоненту апроксимовано за розподілом послідовністю незалежних нормально розподілених випадкових величин. Відповідна гранична теорема дає підставу для нормальної апроксимації СЕ. У розд. 8 нормалізовані СЕ розглянуто у дискретно-неперервному часі і апроксимовано неперервним процесом Орнштейна–Уленбека типу [8, 9].

## 2. ПРИНЦИП «СТИМУЛЮВАННЯ–СТРИМАННЯ»

Частотні ймовірності  $P_+(k)$  значень вибірових величин  $\delta_n^+(k)$ ,  $k \geq 1$ , визначаються ЕП, динаміку яких (за етапами  $k \geq 0$ ) задають функціями регресії приростів, що відображає фундаментальний принцип взаємодії колективної поведінки сукупності об'єктів — принцип «стимулювання – стримання» [10]. З математичної точки зору цей принцип описують лінійною функцією частот значень

$p_{\pm}$  ( $0 \leq p_{\pm} \leq 1$ ,  $p_+ + p_- = 1$ ) вибірових величин  $\delta_n^{\pm}(k)$ :  $\pi_- p_+ - \pi_+ p_-$  з двома напрямними параметрами  $\pi_{\pm}$ , які також задовольняють властивості частот:

$$0 < \pi_{\pm} < 1, \pi_+ + \pi_- = 1.$$

Звідси випливає, що принцип «стимулювання – стримання» виражається флюктуацією частот

$$\pi_- p_+ - \pi_+ p_- = p_+ - \pi_+.$$

Лінійну компоненту функції регресії приростів можна представити у такій формі:

$$\pi_+ p_+ - \pi_- p_- = p_+ - \pi_-.$$

Добуток двох флюктуацій частот

$$(p_+ - \pi_+)(p_+ - \pi_-) = (p_- - \pi_-)(p_- - \pi_+)$$

породжує нелінійну функцію регресії приростів з двома еквілібріумами  $\pi_{\pm}$ . Завершення побудови частотної функції регресії приростів з урахуванням межових поглинальних станів 0, 1 визначає прирости частотних ймовірностей

$$V^{\pm}(p_{\pm}) = \mp V p_{\pm} (1 - p_{\pm})(p_{\pm} - \pi_{\pm})(p_{\pm} - \pi_{\mp}), V > 0.$$

Має місце умова балансу

$$V^+(p_+) + V^-(p_-) \equiv 0, p_+ + p_- = 1.$$

Згідно з принципом «стимулювання – стримання» лінійні функції регресії приростів можуть мати такий вигляд:

$$\pi_{\pm} p_+ + \pi_{\mp} p_- = \pm \pi (p_+ - \bar{\pi}_{\mp}), \bar{\pi}_{\mp} := \mp \pi_{\mp} / \pi, \pi := \pi_+ - \pi_-.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати  $\pi := \pi_+ - \pi_- > 0$ . Тоді еквілібріуми  $\bar{\pi}_{\mp} = \mp \pi_{\mp} / \pi$  набувають значень поза інтервалом (0, 1):

$$\bar{\pi}_- := -\pi_- / \pi < 0, \bar{\pi}_+ := \pi_+ / \pi > 1.$$

Отже, рівноважні стани, що визначаються еквілібріумами  $\bar{\pi}_{\mp}$ , «підсилюють» або «стримують» динаміку частотних ймовірностей, не розділяючи області значень — інтервал (0, 1) — на додаткові зони впливу. Такі еквілібріуми також розглянуто в економічних дослідженнях В.П. Маслова [3, 4].

Наявність двох еквілібріумів у функції регресії приростів, що задають різницеві еволюційні рівняння (РЕР) для приростів частотних ймовірностей (4) та приростів бінарних ЕП (5), суттєво змінює динаміку як ЕП, так і СЕ.

### 3. РІЗНИЦЕВА ЕВОЛЮЦІЙНА МОДЕЛЬ

Прирости частотних ймовірностей (6) та бінарних ЕП (7) задають умовними математичними сподіваннями (8) і (9).

**Означення 1.** Частотні ймовірності  $P_{\pm}(k)$ ,  $k \geq 0$ , задають розв'язками РЕР

$$\Delta P_{\pm}(k+1) = V^{\pm}(P_{\pm}(k)), k \geq 0, \quad (10)$$

$$\Delta C(k+1) = -V_0(C(k)), k \geq 0. \quad (11)$$

Умовні математичні сподівання (8), (9) визначають функціями регресії приростів

$$V^{\pm}(p_{\pm}) = \mp V p_{\pm} (1 - p_{\pm})(p_{\pm} - \pi_{\pm})(p_{\pm} - \pi_{\mp}), 0 \leq p_{\pm} \leq 1, \quad (12)$$

$$V_0(c) = -V_0(1 - c^2)(c + \pi)(c - \pi), \quad (13)$$

$$\pi = \pi_+ - \pi_-, V_0 := V/4, |c| \leq 1.$$

Функція регресії приростів (13) бінарних ЕП  $C(k)$ ,  $k \geq 0$ , також має два еквілібріуми:  $\mp \pi$ .

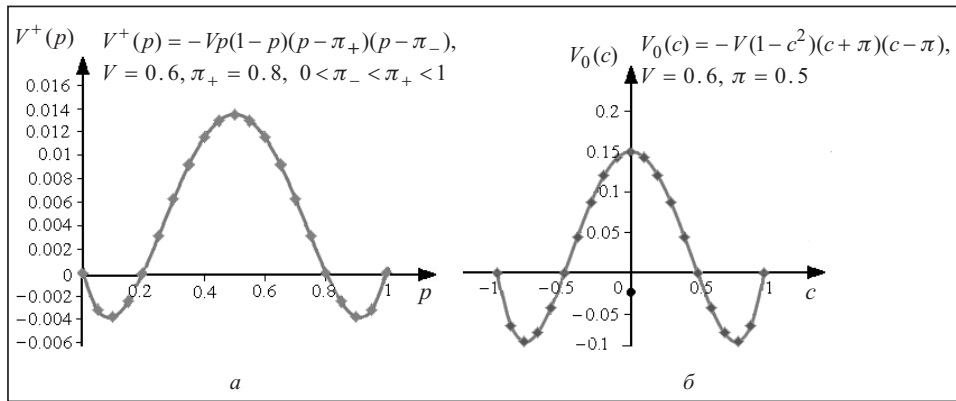


Рис. 1. Функції регресії приростів з двома еквілібріумами: частотна (а); бінарна (б)

Подальший аналіз ЕП, заданих РЕР (10) і (11) з урахуванням функцій регресії приростів (12) і (13), проведено за схемою робіт [1, 2].

Функції регресії приростів (12) і (13) виділяють зони, задані еквілібріумами  $\pi_{\pm}$  та  $\mp\pi$  (рис. 1).

Еквілібріуми  $\pi_{\pm}$  виділяють три зони:

$$0 < p_+ < \pi_-, \pi_- < p_+ < \pi_+, \pi_+ < p_+ < 1. \quad (14)$$

Аналогічно мають місце три зони, що визначають бінарні функції регресії приростів  $V_0(c)$ :

$$-1 < c < -\pi, -\pi < c < \pi, \pi < c < 1. \quad (15)$$

Використовуючи класифікацію моделей ЕП з урахуванням граничної поведінки частотних ймовірностей  $P_{\pm}(k)$  та бінарних ЕП  $C(k)$  при  $k \rightarrow \infty$ , сформулюємо теорему класифікації.

**Теорема 1.** Частотні ймовірності альтернатив  $P_{\pm}(k)$ ,  $k \geq 0$ , задані розв'язками РЕР (10), визначають зони впливу (14) такою асимптотичною поведінкою:

- у моделі МА (притягувальна)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k) = \pi_+, \pi_- < P_+(0) \leq 1; \quad (16)$$

- у моделі MR (відштовхувальна):

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k) &= 0, 0 < P_+(0) < \pi_-; \\ \lim_{k \rightarrow \infty} P_-(k) &= 1, \pi_+ < P_-(0) < 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогічно бінарні ЕП визначаються зонами впливу (15) еквілібріумів  $\mp\pi$  за їхньою асимптотичною поведінкою.

**Теорема 2.** Бінарні ЕП  $C(k)$ ,  $k \geq 0$ , задані розв'язками РЕР (11), визначають зони впливу еквілібріумів  $\mp\pi$ :

- у моделі МА (притягувальна)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C(k) = \pi, -\pi < C(0) < 1;$$

- у моделі MR (відштовхувальна)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C(k) = 0, 0 < C(0) < -\pi.$$

Доведення теорем 1 і 2 аналогічні. Тому розглянемо лише частотні позитивні ймовірності альтернатив  $P_+(k)$ ,  $k \geq 0$ , з функцією регресії приростів (12) (див. рис. 1, а):

$$V^+(p_+) = -Vp_+(1-p_+)(p_+-\pi_-)(p_+-\pi_+), \quad (18)$$

яка набуває таких значень:

$$\begin{aligned} V^+(P_+(k)) < 0, \quad 0 < P_+(0) < \pi_- \quad \text{або} \quad \pi_+ < P_+(0) < 1, \\ V^+(P_+(k)) > 0, \quad \pi_- < P_+(0) < \pi_+. \end{aligned} \quad (19)$$

Монотонність приростів (19) у зонах впливу еквілібріумів та обмеженість ймовірностей  $P_+(k): 0 \leq P_+(k) \leq 1$  дозволяють зробити висновок про існування границь (16) та (17) для частот  $p_+^* = \lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k)$ .

Значення границь (16) та (17) випливає з очевидного рівняння

$$0 = V^+(p_+^*) = p_+^*(1 - p_+^*)(p_+^* - \pi_-)(p_+^* - \pi_+).$$

Для початкового значення у зоні впливу  $\pi_- < P_+(0) < \pi_+$  монотонне зростання приростів (19) означає  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k) = p_+^* = \pi_+$ .

Аналогічно визначають граничну поведінку позитивних частотних ймовірностей  $P_+(k), k \geq 0$ , у зонах впливу  $\pi_+ < P_+(0) < 1$  та  $0 < P_+(0) < \pi_-$ , що забезпечується монотонним спаданням приростів.

Класифікація зон впливу еквілібріумів функцій регресії приростів дозволяє зробити попередній висновок щодо реальної інтерпретації еквілібріумів у сучасному економічному просторі, а також моделях популяційної генетики [5] або моделях навчання [6].

#### 4. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ЗОН ВПЛИВУ ЕКВІЛІБРІУМІВ $\pi_{\pm}$ В ЕКОНОМІЧНОМУ ПРОСТОРИ

Динаміка частотних ймовірностей  $P_+(k), k \geq 0$ , у зоні притягувального еквілібріуму  $\pi_+$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k) = \pi_+, \quad P_+(0) > \pi_+,$$

означає, що наявність «відносного» капіталу  $CP_+(k) > C\pi_+$  призводить до загального зменшення капіталу до рівноважного стану  $C\pi_+$ , що характеризує об'єктивність принципу «стимулювання – стримування». Разом з тим притягувальний еквілібріум  $\pi_+$  у зоні  $\pi_- < P_+(0) < \pi_+$  зумовлює зростання капіталу до рівноважного стану  $C\pi_+$ , що також характеризує об'єктивність цього принципу.

У зоні відштовхувального еквілібріуму динаміка «відносного» капіталу

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_+(k) = 0, \quad 0 < P_+(0) < \pi_-,$$

означає, що суб'єкт економічного простору з «відносним» капіталом, меншим, ніж  $C\pi_-$ , втрачає капітал.

Виникає стратегічна проблема: зменшення зони «зубожіння» суб'єктів економічного простору, а в ідеалі — ліквідація зони  $(0, \pi_-)$ .

#### 5. РІЗНИЦЕВА СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ

Різницеві еволюційні рівняння (10), (11) разом з функціями регресії приростів (12), (13) породжують детерміновані ЕП, які можна описати за допомогою передбачуваних характеристик СЕ.

Динаміку СЕ (1) або (2) задамо різницеvim стохастичним рівнянням (РСР) з використанням мартингалів (при  $k \geq 0$ )

$$\Delta \mu_N^{\pm}(k+1) := \Delta S_N^{\pm}(k+1) - V^{\pm}(S_N^{\pm}(k)), \quad k \geq 0, \quad (20)$$

$$\Delta \mu_N(k+1) := \Delta S_N(k+1) + V_0(S_N(k)), \quad k \geq 0. \quad (21)$$

**Означення 2.** Частотні СЕ (2) задають розв'язками РСР

$$\Delta S_N^{\pm}(k+1) = V^{\pm}(S_N^{\pm}(k)) + \Delta \mu_N^{\pm}(k+1), \quad k \geq 0.$$

Бінарні СЕ (1) визначають розв'язком РСР

$$\Delta S_N(k+1) = -V_0(S_N(k)) + \Delta \mu_N(k+1), \quad k \geq 0. \quad (22)$$

Мартингали (20) і (21) характеризуються першими двома моментами:

$$E[\Delta \mu_N^\pm(k+1)] = 0, \quad E[\Delta \mu_N(k+1)] = 0, \quad k \geq 0, \quad (23)$$

$$E[(\Delta \mu_N^\pm(k+1))^2 | S_N^\pm(k)] = V_+(S_N^+(k))V_-(S_N^-(k)) / N, \quad k \geq 0, \quad (24)$$

$$E[(\Delta \mu_N(k+1))^2 | S_N(k)] = [1 - V^2(S_N(k))] / N, \quad k \geq 0.$$

Тут функції регресії мають вигляд

$$V_\pm(p_\pm) := p_\pm \mp V^\pm(p_\pm), \quad 0 \leq p_\pm \leq 1,$$

$$V(c) := c - V_0(c), \quad |c| \leq 1.$$

Для обчислення других моментів мартингалів (20) і (21) використаємо очевидні співвідношення:

$$\begin{aligned} E[(\delta_n^\pm(k+1))^2 | S_N^\pm(k) = p_\pm] &= E[\delta_n^\pm(k+1) | S_N^\pm(k) = p_\pm] = \\ &= E[S_N^\pm(k+1) | S_N^\pm(k) = p_\pm] = V_\pm(p_\pm), \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (25)$$

а також

$$E[(\delta_n(k+1))^2] \equiv 1 \quad \forall k \geq 0,$$

$$E[\delta_n(k+1) | S_N(k) = c] = E[S_N(k+1) | S_N(k) = c] = V(c), \quad |c| \leq 1.$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} D[\delta_n(k+1) | S_N(k) = c] &:= E[(\delta_n(k+1))^2 | S_N(k) = c] - \\ &- [E[\delta_n(k+1) | S_N(k) = c]]^2 = 1 - V^2(c). \end{aligned}$$

Аналогічно

$$D[\delta_n^\pm(k+1) | S_N^\pm(k) = p_\pm] = V_\pm(p_\pm) - V_\pm^2(p_\pm) = V_+(p_+)V_-(p_-).$$

Крім того, використовуємо співвідношення

$$D[S_N(k+1) | S_N(k) = c] = \frac{1}{N} D[\delta_n(k+1) | S_N(k) = c] = [1 - V^2(c)] / N,$$

що пояснює наявність множника  $N^{-1}$  у формулах (24).

Залишається зауважити, що за означенням мартингалів (20), (21) їхні умовні дисперсії визначаються рівністю (див. (25))

$$E[(\Delta \mu_N(k+1))^2 | S_N(k)] = D[S_N(k+1) | S_N(k)].$$

Дійсно, з означення (21) маємо

$$\begin{aligned} E[(\Delta \mu_N(k+1))^2 | S_N(k)] &= E[(\Delta S_N(k+1) + V_0(S_N(k)))^2 | S_N(k)] = \\ &= E[S_N^2(k+1) | S_N(k)] - [E[S_N(k+1) | S_N(k)]]^2 = D[S_N(k+1) | S_N(k)]. \end{aligned}$$

## 6. КЛАСИФІКАЦІЯ ЕКВІЛІБРІУМІВ СТОХАСТИЧНОЇ МОДЕЛІ СЕ

Наявність стохастичної компоненти  $\Delta \mu_N(k+1)$  у РСР (22) для бінарних СЕ значно ускладнює розв'язання проблеми стійкості СЕ. Для знаходження кореня рівняння регресії зі стохастичною компонентою пропонуємо використати метод стохастичної апроксимації, розроблений Робінсоном і Монро [7].

Введемо параметри стохастичної апроксимації  $a_k := a/k$ ,  $k \geq 1$ , що задовольняють апроксимаційні умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = a \frac{\pi^2}{6} < \infty, \quad k \geq 0. \quad (26)$$

Процедуру стохастичної апроксимації для РСР (22) опишемо схемою

$$\Delta \alpha_N(k+1) = a_k [-V_0(\alpha_N(k)) + \sigma(\alpha_N(k)) \Delta \mu_N(k+1)], \quad k \geq 1. \quad (27)$$

Параметри нормалізації стохастичної апроксимації задовольняють умови (26).

**Зауваження 2.** Дискретна марковська дифузія  $\alpha_N(k)$ ,  $k \geq 0$ , задана розв'язком РСР (27), характеризується першими двома моментами:

$$E[\Delta \alpha_N(k+1) | \alpha_N(k) = c] = -a_k V_0(c), \quad k \geq 0, \\ E[(\Delta \alpha_N(k+1))^2 | \alpha_N(k) = c] = a_k^2 [\sigma^2(c) + V_0^2(c) / N].$$

Для класифікації зон впливу еквілібріумів  $\pm \pi$  ( $|\pi| < 1$ ) введемо класифікатори еквілібріумів:

$$\Lambda_{\pm}(c) := -V_0(1-c^2)(c \mp \pi), \quad |c| \leq 1. \quad (28)$$

Далі послуговуємось властивістю класифікаторів (28)

$$\Lambda_+(c) < 0, \quad -\pi < c < 1; \quad \Lambda_-(c) < 0, \quad -1 < c < -\pi.$$

Процедура стохастичної апроксимації використовує теорему Невельсона–Хасьмінського [11, теорема 2.7.2], адаптовану до моделей СЕ.

**Теорема 3** [11]. Нехай існує невід'ємна функція  $\Lambda_0(c)$ ,  $|c| \leq 1$ , що має точку рівноваги  $c_0$ :  $\Lambda_0(c_0) = 0$  та задовольняє нерівності в околі точки  $c_0$  для фіксованого  $h > 0$ :

$$\sup_{\frac{1}{h} \leq |c-c_0| \leq h} \Lambda_0(c)(c-c_0) < 0.$$

Тоді процедура СА  $\alpha_N(k)$ ,  $k \geq 0$ , збігається з ймовірністю 1 до точки рівноваги  $c_0$ :

$$\alpha_N(k) \xrightarrow{P1} c_0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тепер класифікацію зон впливу еквілібріумів  $\pm \pi$  формулюємо таким чином.

**Теорема 4.** Динаміка СЕ  $S_N(k)$ ,  $k \geq 0$ , характеризується класифікаторами (28):

- у зоні впливу притягувального еквілібріуму  $\pi$

$$P \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_N(k) = \pi, \quad -\pi < \alpha_N(0) < 1;$$

- у зоні впливу відштовхувального еквілібріуму  $-\pi$

$$P \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_N(k) = 0, \quad -1 < \alpha_N(0) < -\pi.$$

**Доведення.** Використовуємо класифікатори (28) та теорему Невельсона–Хасьмінського (теорема 3).

З обчислення значення генератора дискретної марковської дифузії  $\alpha_N(k)$ ,  $k \geq 0$ , на тест-функціях  $\varphi_{\pm}(c) = (c \pm \pi)^2$  отримуємо

$$L_{\alpha} \varphi_{\pm}(c) := E[\varphi_{\pm}(c + \Delta \alpha_N(k+1)) - \varphi_{\pm}(c) | \alpha_N(k) = c] = \\ = 2E[\Delta \alpha_N(k+1) | \alpha_N(k) = c](c \pm \pi) + E[(\Delta \alpha_N(k+1))^2 | \alpha_N(k) = c],$$

тобто маємо

$$L_{\alpha} \varphi_{\pm}(c) = -2a_k \Lambda_{\pm}(c)(c \mp \pi)^2 + a_k^2 B_N(c).$$

З урахуванням властивостей класифікаторів (28) теорема Невельсона–Хасьмінського обґрунтовує твердження теореми 4.

## 7. АПРОКСИМАЦІЯ СТОХАСТИЧНОЇ КОМПОНЕНТИ

Мартингальна властивість (для  $k \geq 0$ ) стохастичних компонент (20) і (21) дозволяє більш детально їх характеризувати. А саме, нормовані мартингали (20) і (21) визначаються бернуллієвими розподілами можливих значень частот  $\nu_N^\pm$

за заданим розподілом  $p_\pm$ :

- у частотному представленні

$$P \{ \Delta \mu_N^\pm(p_\pm) = \nu_N^\pm / N \mid S_N^\pm(k) = p_\pm \} = \\ = \frac{N!}{\nu_N^+! \nu_N^-!} (p_+)^{\nu_N^+} (p_-)^{\nu_N^-}, \nu_N^+ + \nu_N^- = N, 0 \leq \nu_N^\pm \leq N; \quad (29)$$

- у бінарному представленні

$$P \{ \Delta \mu_N(c) = \nu_N / N \mid S_N(k) = c \} = \\ = \frac{N!}{\nu_N^+! \nu_N^-!} (p_+)^{\nu_N^+} (p_-)^{\nu_N^-}, \nu_N = \nu_N^+ - \nu_N^-, -N \leq \nu_N \leq N. \quad (30)$$

Мартингальна властивість стохастичних компонент (20) і (21), а також їхні бернуллієві розподіли (29) і (30) забезпечують «умовну форму» апроксимації з використанням ЕП (4) і (5).

**Теорема 5.** Нормовані стохастичні компоненти (29) і (30) апроксимуються за розподілом (при  $N \rightarrow \infty$ ) послідовністю незалежних, нормально розподілених випадкових величин  $W_{k+1}^\pm$ ,  $W_{k+1}$ ,  $k \geq 0$ :

$$\sqrt{N} \Delta \mu_N^\pm(p_\pm) \xrightarrow{D} W_{k+1}^\pm, E[W_{k+1}^\pm]^2 = \bar{\sigma}^2(p_+, p_-), \quad (31)$$

$$\sqrt{N} \Delta \mu_N(c) \xrightarrow{D} W_{k+1}, E[W_{k+1}]^2 = \sigma^2(c), \quad (32)$$

які характеризуються другими моментами

$$\bar{\sigma}^2(p_+, p_-) = V_+(p_+)V_-(p_-), \sigma^2(c) = 1 - V^2(c)$$

і визначаються функціями регресії

$$V_\pm(p_\pm) := p_\pm \mp V^\pm(p_\pm), V(c) := c - V_0(c). \quad (33)$$

**Доведення.** Бернуллієві розподіли (29) і (30) нормованих мартингалів (20) і (21) в умовній формі породжуються нормованими сумами вибірових величин

$$\Delta \mu_N^\pm(p_\pm) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \beta_n^\pm(p_\pm), \beta_n^\pm(p_\pm) = \delta_n^\pm(k+1) - V_\pm(p_\pm), \quad (34)$$

$$\Delta \mu_N(c) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \beta_n(c), \beta_n(c) = \delta_n(k+1) - V(c). \quad (35)$$

Згідно з означенням частотних мартингалів (20) та частотних функцій регресії (33) частотні випадкові величини у сумі (34) мають представлення

$$\beta_n^\pm(p_\pm) = \begin{cases} 1 - V_\pm(p_\pm) & \text{з ймовірністю } P_\pm = V_\pm(p_\pm), \\ -V_\pm(p_\pm) & \text{з ймовірністю } P_\mp = V_\mp(p_\mp). \end{cases} \quad (36)$$

Аналогічно, з урахуванням означення бінарних мартингалів (21) та бінарних функцій регресії (33) бінарні випадкові величини у сумі (35) мають представлення

$$\beta_n(c) = \begin{cases} 1 - V(c) & \text{з ймовірністю } P_+(c) = \frac{1}{2}[1 + V(c)], \\ -(1 + V(c)) & \text{з ймовірністю } P_-(c) = \frac{1}{2}[1 - V(c)]. \end{cases} \quad (37)$$



Вибіркові величини (36) і (37) характеризуються першими двома моментами:

$$E\beta_n^\pm = E\beta_n = 0,$$

$$E(\beta_n^\pm)^2 = \bar{\sigma}^2(p_+, p_-) = V_+(p_+)V_-(p_-), \quad E(\beta_n)^2 = \sigma^2(c) = 1 - V^2(c).$$

Отже, нормовані мартингали (31), (32) також характеризуються першими двома моментами:

$$E\Delta\mu_N^\pm(p_\pm) = E\Delta\mu_N(c) = 0,$$

$$E(\Delta\mu_N^\pm(p_\pm))^2 = \bar{\sigma}^2(p_+, p_-) = V_+(p_+)V_-(p_-), \quad (38)$$

$$E(\Delta\mu_N(c))^2 = \sigma^2(c) = 1 - V^2(c). \quad (39)$$

Застосування центральної граничної теореми для сум незалежних, однаково розподілених випадкових величин [12] завершує доведення теореми 5.

**Пропозиція 1.** Статистичний експеримент з нормальною апроксимацією стохастичної компоненти задамо такими РСР:

$$\Delta\xi_N^\pm(k+1) = V^\pm(\xi_N^\pm(k)) + \frac{1}{\sqrt{N}}\bar{\sigma}(\xi_N^\pm(k))W^\pm(k+1),$$

$$\Delta\xi_N(k+1) = -V_0(\xi_N(k)) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(\xi_N(k))W(k+1),$$

де  $W^\pm(k+1)$ ,  $W(k+1)$ ,  $k \geq 0$ , — послідовності нормально розподілених стандартних випадкових величин; параметри  $\bar{\sigma}^2$ ,  $\sigma^2$  визначені у (38), (39).

#### 8. АПРОКСИМАЦІЯ СЕ У ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНОМУ ЧАСІ

Апроксимація нормованої стохастичної компоненти, яка встановлена у теоремі 5, породжує нову проблему апроксимації СЕ у дискретно-неперервному часі.

**Означення 3.** Різницеве стохастичне рівняння у дискретно-неперервному часі  $k = [Nt]$ ,  $t \geq 0$ , задається двома нормованими компонентами:

$$\Delta\xi_N(t+1/N) = -\frac{1}{N}V_0(\xi_N(t)) + \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma(\xi_N(t))\Delta\mu_N(t+1/N), \quad t \geq 0. \quad (40)$$

Прирости СЕ у дискретно-неперервному часі визначають рівністю

$$\Delta\xi_N(t+1/N) := \xi_N(t+1/N) - \xi_N(t), \quad t \geq 0.$$

Нормована стохастична мартингальна компонента задається умовним бернуллієвим розподілом

$$P\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\Delta\mu_N(k+1) = \nu_N / N \mid S_N(k) = C(k)\right\} = \frac{N!}{\nu_N^+! \nu_N^-!} (p_+)^{\nu_N^+} (p_-)^{\nu_N^-}, \quad \nu_N := \nu_N^+ - \nu_N^-.$$

Тут за означенням

$$P_\pm(k) := \frac{1}{2}[1 \pm C(k)], \quad k = [Nt], \quad t > 0.$$

Отже, перші два моменти мають значення

$$E\Delta\mu_N(t+1/N) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0,$$

$$E[(\Delta\mu_N(t+1/N))^2 \mid \xi_N(t) = C(k)] = 1 - V^2(C(k)), \quad k = [Nt].$$

Тепер маємо теорему апроксимації.

**Теорема 6.** Нормалізовані СЕ, задані розв'язком РСР (40), апроксимуються процесом Орнштейна–Уленбека типу, який визначається розв'язком диференційного стохастичного рівняння

$$d\zeta_N(t) = -V_0(\zeta(t))dt + \sigma(\zeta(t))dW(t), \quad t \geq 0, \quad (41)$$

що характеризується генератором

$$L_\zeta \varphi(c) = -V_0(c)\varphi'(c) + \frac{1}{2}\sigma^2(c)\varphi''(c), \quad |c| \leq 1. \quad (42)$$

**Доведення.** Використовуємо мартингальну характеристику марковського процесу  $\zeta_N(t)$ ,  $t \geq 0$ , який визначають розв'язком РСР (40):

$$\mu_N(t) := \varphi(\zeta_N(t)) - \varphi(\zeta_N(0)) - \int_0^{N[t/N]} L_\zeta^{(N)} \varphi(c)(\zeta_N(s)) ds, \quad k = [Nt]. \quad (43)$$

Нормований генератор задамо так:

$$L_\zeta^N \varphi(c) = NE[\varphi(c + \Delta\zeta_N(t)) - \varphi(c) | \zeta_N(t) = c]. \quad (44)$$

Неважно перекопатися в тому, що права частина рівності (43) з урахуванням (44) визначає мартингал

$$E\mu_N(t) = 0, \quad E[\mu_N(t+s) | \mu_N(t)] = \mu_N(t), \quad s > 0, \quad t \geq 0.$$

Далі використовуємо апроксимацію генератора (44) на достатньо гладких числових тест-функціях  $\varphi(c) \in C_B^3(R)$ , обмежених та тричі неперервно-диференційованих з обмеженими похідними

$$L_\zeta^N \varphi(c) = L_\zeta \varphi(c) + R_N \varphi(c) \quad (45)$$

із залишковим членом

$$R_N \varphi(c) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \varphi(c) \in C_B^3(R). \quad (46)$$

Апроксимація (45), (46) обґрунтовує збіжність генераторів марковських процесів  $\zeta_N(t)$ ,  $t \geq 0$ , у схемі серій з параметром серії  $N \rightarrow \infty$ , до генератора (42) процесу Орнштейна–Уленбека типу (41), що забезпечує збіжність скінченновимірних розподілів нормованих СЕ

$$\zeta_N(t) \Rightarrow \zeta(t), \quad N \rightarrow \infty,$$

при додатковій умові збіжності початкових станів

$$\zeta_N(0) \Rightarrow \zeta(0), \quad N \rightarrow \infty.$$

Теорему 6 доведено.

У роботі досліджено статистичні експерименти, що визначаються лінійними функціями регресії приростів, які відображають основний принцип взаємодії «стимулювання – стримання». Виявляється, що дві лінійні функції регресії приростів мають еквілібріуми в зоні взаємодії. Основну увагу приділено статистичним експериментам з двома еквілібріумами, що породжуються добутком двох лінійних функцій регресії приростів, при цьому один з еквілібріумів є притягувальним, а другий — відштовхувальним. Така схема побудови функції регресії приростів породжує три зони впливу з двома еквілібріумами.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Koroliouk D. Two component binary statistical experiments with persistent linear regression. *Theor. Probability and Math. Statist.* 2015. Vol. 90. P. 103–114. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/tpms/952>.
2. Koroliouk D. Binary statistical experiments with persistent nonlinear regression. *Theor. Probability and Math. Statist.* 2015. Vol. 91. P. 71–80. DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/tpms/967>.

3. Маслов В.П. Аксиомы нелинейного осреднения в финансовой математике и динамика курса акций. *Теория вероятностей и ее применения*. 2003. Т. 48, вып. 4. С. 799–810.
4. Маслов В.П. Нелинейное финансовое осреднение, эволюционный процесс и законы экономифизики. *Теория вероятностей и ее применения*. 2004. Т. 49, вып. 3. С. 269–296.
5. Koroliouk D., Koroliuk V.S., Rosato N. Equilibrium process in biomedical data analysis: the Wright–Fisher model. *Cybernetics and System Analysis*. 2014. Vol. 50, N 6. P. 890–897. DOI: 10.1007/s10559-014-9680-y.
6. Koroliouk D., Bertotti M.L., Koroliuk V.S. Stochastic behavioral models. Classification. *Cybernetics and System Analysis*. 2016. Vol. 52, N 6. P. 884–895. DOI: 10.1007/s10559-016-9890-6.
7. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. *Ann. Math. Stat.* 1951. Vol. 22, N 1. P. 400–407.
8. Королюк Д.В. Диффузионная аппроксимация статистических экспериментов с настойчивой линейной регрессией и эквilibriumом. *Доп. НАНУ*. 2014. № 3. С. 18–24.
9. Королюк Д.В. Дифузійна апроксимація статистичних експериментів з наполегливою нелінійною регресією і еквилібриумом. *Доп. НАНУ*. 2014. № 8. С. 28–34.
10. Koroliouk D. Classification of binary deterministic statistical experiments with persistent regression. *Cybernetics and System Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 644–649, DOI: 10.1007/s10559-015-9755-4.
11. Nevelson M.B., Hasminskii R.Z. Stochastic approximation and recursive estimation. Amer. Math. Soc., Translations of Mathematical Monographs. 1973. Vol. 47. 244 p.
12. Ширяев А.Н. Вероятность-1. Москва: МЦНМО, 2004. 519 с.

*Надійшла до редакції 09.06.2017*

**Д.В. Королюк, В.С. Королюк**

**РАЗНОСТНАЯ ДИФFUЗИОННАЯ МОДЕЛЬ С ДВУМЯ РАВНОВЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ**

**Аннотация.** Разностная диффузионная модель с двумя равновесными состояниями задана стохастическим уравнением с двумя компонентами: предсказуемой, определяемой функцией регрессии приращений с двумя эквilibriumумами, и стохастической, являющейся мартингал-разностью. Предложена классификация зон влияния эквilibriumумов по асимптотическим свойствам траекторий статистических экспериментов. Исследовано асимптотическое поведение статистических экспериментов, заданных суммами  $N$  выборочных величин при  $N \rightarrow \infty$ .

**Ключевые слова:** дискретная марковская диффузия, эволюционный процесс, классификация эквilibriumумов, стохастическая аппроксимация.

**D.V. Koroliuk, V.S. Koroliuk**

**A DIFFERENCE DIFFUSION MODEL WITH TWO EQUILIBRIUM STATES**

**Abstract.** A difference diffusion model with two equilibrium states is given by a stochastic equation with two components: a predictable one, defined by increments regression function with two equilibrium states and a stochastic one, which is a martingale difference. Zone classification based on the asymptotic properties of the trajectories of statistical experiments is proposed. The asymptotic behavior of statistical experiments defined by sums of  $N$  sample values for  $N \rightarrow \infty$  is analyzed.

**Keywords:** discrete Markov diffusion, evolutionary process, classification of equilibrium states, stochastic approximation.

**Королюк Дмитро Володимирович,**

доктор фіз-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, Київ, e-mail: dimitri.koroliouk@ukr.net.

**Королюк Володимир Семенович,**

академік НАН України, доктор фіз-мат. наук, радник при дирекції Інституту математики НАН України, Київ, e-mail: vskorol@yahoo.com.