УДК 519.1

Г.П. ДОНЕЦЬ

ГРАФОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ

Анотація. Розглянуто проблему комбінаторного розпізнавання за допомогою серії тестових перевірок. До неї зводиться задача пошуку двох радіоактивних куль поміж множини заданих. Для розв'язання задачі запропоновано використати теорію графів. Цей підхід продемонстровано на прикладі для 22 куль.

Ключові слова: обмежена вибірка, необмежена вибірка, повний граф, двочастковий граф, граф пошуку, активні кулі, активне ребро, позитивний результат випробувань, негативний результат випробувань.

ВСТУП

Останнім часом широкого розповсюдження набули різноманітні експертні системи, які стали комерційним продуктом на ринку нової інформаційної технології завдяки своїй корисності при розв'язанні складних, важко структурованих і формалізованих задач із сфери бізнесу, управління, планування та діагностики. У процесі економічної діяльності суб'єкта доводиться здійснювати різні експерименти і в залежності від отриманої інформації приймати управлінські рішення. А проте інколи кількість альтернатив настільки велика, що виникає загроза комбінаторного вибуху. Це вимагає вироблення правил, які звужують повний перебір варіантів, або розроблення спеціальних методів оптимізації перебирання. Отже, з'явилася потреба у розробленні спеціальної теорії перебирання — теорії комбінаторного розпізнавання. Згідно з цією теорією алгоритми розпізнавання властивостей окремих предметів розглядаються стосовно всієї їхньої множини за допомогою тестів, або експериментів, які можна трактувати доволі широко. З такою проблемою стикаються на митниці, у відділах технічного контролю на підприємствах та в соціальній сфері. Розглянемо формальну постановку задачі, що може мати широку інтерпретацію.

ЗАДАЧА КОМБІНАТОРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ

Нехай задано множину з n чисел $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, яка складається з m одиниць і $n-m$ нулів. Експеримент полягає у виборі певної кількості k $(k \leq m)$ чисел, після чого стає відомим їхній добуток. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти всі числа, що дорівнюють 0 (або, що те ж саме, дорівнюють 1). Останнє означає, що маємо задачу комбінаторного пошуку. Якщо величина вибірки фіксована, то такі задачі називаються задачами обмеженого комбінаторного розпізнавання (ОКР), інакше — задачами необмеженого комбінаторного розпізнавання (НКР).

Поняття механізму отримання відповіді у цьому експерименті можна трактувати в широкому сенсі слова. Наведемо кілька прикладів.

Приклад 1 (задача ОКР). Задача про вимикачі. Нехай n вимикачів незалежно приєднані до однієї лампочки. Відомо, що поміж них є m несправних. Експеримент полягає в одночасному ввімкненні k, $1< k \leq m$, вимикачів. Якщо поміж них є хоча б один справний, то лампочка загорятиметься. Необхідно за мінімальну кількість спроб знайти k несправних вимикачів.

Багато задач про монети, поміж яких трапляються фальшиві, можна звести до задачі ОКР, і відповіддю на різні експерименти є результат зважування на двочасткових вагах визначених комбінацій монет.

Стратегія оптимального розв'язування задач ОКР полягає в такому розбиванні вихідної множини чисел на групи, щоб, провівши експерименти за допомогою k вибірок у кожній з них, знайти необхідну кількість визначених чисел.

Таким чином, розв'язок задачі має вигляд деякого розбиття вихідної множини чисел.

Приклад 2 (задача НКР). Задача про активні кулі. Нехай задано n більярдних куль, поміж яких дві радіоактивні (далі активні). Необхідно їх знайти за мінімальну кількість перевірок. У результаті перевірки будь-якого набору куль можна дізнатися, чи є в ньому бодай одна активна (але не можна довідатися про їхню кількість). До задач НКР належать такі, де треба з множини однорідних предметів (товарів) визначити за допомогою різноманітних засобів (вимірювальних приладів, хімічних реактивів, деформацій тощо) окремі специфічні предмети (товари). Вочевидь, задачу легко розв'язати за n перевірок, вибираючи щоразу один елемент. Однак, якщо кожна перевірка пов'язана з будь-якими матеріальними витратами, то такий розв'язок буде найгіршим. Це зокрема стосується транспортних перевезень, де перевірка здійснюється у великих за розміром певним чином обладнаних приміщеннях. Доставляння кожної одиниці вантажу пов'язане зі значною витратою енергоресурсів, складним маневруванням засобів перевезення (локомотивів, тягачів, буксирів) і, найголовніше, витратою часу.

Задачу ОКР і її розв'язок наведено в роботі [1], в ній також запропоновано новий підхід до розв'язання задачі НКР, який базується на застосуванні теорії графів.

ПРИНЦИПИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕОБМЕЖЕНОГО КОМБІНАТОРНОГО РОЗПІЗНАВАННЯ

Сформулюємо загальні принципи, які використовують під час розв'язування задач НКР [2–8].

1. Якщо з 2^s куль радіоактивна одна, то її можна знайти за s перевірок: на першому кроці перевірити половину куль, потім методом дихотомії перевірити ту множину куль, де знаходиться активна куля.

2. Якщо з n куль активні дві, то існує $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ варіантів різних активних пар. Тому, якщо $\dfrac{n(n-1)}{2} > 2^s$, то за s випробувань не можливо знайти активну пару.

3. Якщо з n куль на першому кроці випробовувати k куль, то результат випробування «–» відповідає C_{n-k}^2 варіантам (обидві активні кулі знаходяться поміж $n-k$ куль, що залишилися), а результат «+» — іншим $C_n^2 - C_{n-k}^2$ варіантам. Якщо залишилося тільки i випробувань, то обов'язково повинні виконуватися нерівності $C_{n-k}^2 \le 2^i$ і $C_n^2 - C_{n-k}^2 \le 2^i$.

4. Якщо за s перевірок знайдено розв'язок для n куль, то для меншої кількості куль також можна знайти розв'язок за s перевірок. Це випливає з міркувань, що подібного результату можна досягти, якщо доповнити множину куль до числа n фіктивними (неактивними) кулями. А це означає, що для двох однакових значень s і різних значень n для всіх проміжних значень кількості куль задача розв'язується за ті самі s перевірок.

Під час розв'язування задачі будемо будувати стратегію послідовних випробувань. Якщо чергова перевірка куль аніяк (ні кількістю, ні якістю) не залежить від попередньої перевірки, то назвемо таку стратегію незалежною. Якщо визначення кількості куль та їхня якість залежать від результату попередньої перевірки, то назвемо таку стратегію покроковою. Результати перевірки будемо позначати «+», якщо знайдено активну кулю, і «–», якщо куля неактивна.

Для незалежної стратегії визначальним є розбиття множини n куль на m частин $R_n = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$, де k_i — кількість куль, які випробовують на i-му кроці ($1 \le i \le m$), та $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Після m випробувань залежно від знаків задача зводиться або до отримання однієї множини (з меншою кількістю), що містить обидві активні кулі, або до двох множин, які містять тільки одну активну кулю.

Введемо позначення чотирьох функцій, які знадобляться під час розв'язування конкретних задач:

- $f_1(n)$ — мінімальна кількість перевірок для виявлення однієї активної кулі із n заданих;
- $f_2(n)$ — мінімальна кількість перевірок для виявлення двох активних куль із n заданих;
- $g(n_1, n_2)$ — мінімальна кількість перевірок для виявлення двох активних куль, які знаходяться поодинці у двох множинах, одна з яких містить n_1, а друга — n_2 кулі;
- $h(n_1^+, n_2)$ — мінімальна кількість перевірок для пошуку двох активних куль, якщо перша множина містить бодай одну активну кулю.

Із принципу 2 випливає очевидна рівність $f_1(n) = \lceil \log_2 n \rceil$. Однак, як буде показано далі, $g(n_1, n_2) \le f_1(n_1) + f_1(n_2)$, причому можлива й строга нерівність. Доведемо низку тверджень, необхідних для побудови оптимальних незалежних стратегій.

Лема 1. Для незалежної стратегії розв'язання задачі виконується нерівність $f_2(n) \le m + f_2(\max_i k_i)$ $(1 \le i \le m)$.

Це випливає з того, що після m перевірок знак «+» одержить група з максимальним значенням k_i, а інші матимуть знак «–».

Ця лема накладає певні обмеження на розбиття n куль на m груп. З іншого боку, під час складання стратегії розбивання необхідно вибирати k_1 так, щоб після одержання результату «–» значення $f_2(n - k_1)$ було менше очікуваного $f_2(n)$.

Лема 2. Для незалежної стратегії розв'язання задачі необхідно, щоб $f_2(n) \le m + g(a, b)$, де $a, b \in R$ та $a + b = \max \sum_{i,j} (k_i + k_j)$, $i, j \in N_m$.

Це випливає з того, що за результатами двох перевірок для $\max k_i$ $(1 \le i \le m)$ та для $\max k_j$ $(j \in N_m \setminus i)$ маємо «+», тоді загальна кількість перевірок буде дорівнювати в найгіршому випадку $m + g(a, b)$, де a й b дорівнюють цим двом елементам розбиття.

Переходимо тепер до вивчення функції $f_2(n)$.

Теорема 1. Справедлива рівність $f_2(2^s) = 2s$ $(s \ge 3)$.

Перевіряючи кулі поодинці, легко встановити, що $f_2(4) = 3$. Нехай $n = 8 = 2^3$. Розіб'ємо множину куль на рівні частини по чотири в кожній. Якщо перевіркою одержимо результат (+, −) або (−, +), то достатньо виконати ще $f_2(4)$ вимірювань, а всього $2 + 3 = 5$. Але для результату $(+, +)$ знадобиться $2 + 2 \cdot f_1(4) = 6$ перевірок, що остаточно дає $f_2(2^3) = 6$.

Припустимо тепер, що теорема справедлива для $s \ge 3$. Доведемо її для $n = 2^{s+1}$. Нехай спочатку $m = 2$, тобто множина куль поділена на дві групи по 2^s куль у кожній, які послідовно перевіряються. Можливі три результати: (+, +), (+,–) і (–, +), де два останні ідентичні. У першому випадку $f_2(2^{s+1}) = 2 + 2f_1(2^s)$ і за припущенням це дорівнює $2 + 2s = 2(s+1)$. В інших випадках одержуємо $f_2(2^{s+1}) = 2 + f_2(2^s) = 2(s+1)$. За будь-якого результату справедливість теореми підтверджується.

Перевіримо інші розбиття на дві групи: $R = (2^s + c, 2^s - c)$, де $c \geq 1$. Тоді за результатами двох перевірок (+,–) одержимо оцінку $g(2^{s+1}) = 2 + f_2(2^s + c) \geq$ $\geq 2 + 2s$. Аналогічну оцінку маємо для розбиття, симетричного R, якщо результат перевірок буде (–, +).

Нехай тепер $m \geq 3$. Якщо $k_1 \geq 2^s$, то за результатами перевірок $(+, -, - \dots)$ одержимо оцінку $f_2(2^{s+1}) = m + f_2(k_1) \geq 2s + 3$. Якщо $k_1 < 2^s$, то за першим результатом «–» одержимо оцінку $f_2(2^{s+1}) = 1 + f_2(2^{s+1} - k_1)$, оскільки $2^{s+1} - k_1 > 2^s$, маємо $f_2(2^{s+1}) \geq 2s + 1$. Якщо активні кулі містяться у двох різних групах, що залишилися, то необхідно виконати як мінімум ще дві перевірки. Якщо активні кулі знаходяться в одній групі, що залишилася, то двох перевірок недостатньо — доведеться перевіряти усі групи, що залишилися. У кожному із цих варіантів завжди $f_2(2^{s+1}) \geq 2s + 3$, що й підтверджує справедливість теореми.

Згідно з доведеними лемами і теоремою розглянемо конкретні значення $f_2(n)$. Для $n = 3, 4, 5$ легко знайти пару активних куль, перевіряючи їх поодинці. Одержуємо $f_2(3) = 2$, $f_2(4) = 3$ та $f_2(5) = 4$. Далі застосовуємо незалежну стратегію шляхом побудови розбиттів і перевірки кожної групи окремо. Для $n = 6$ існує два розбиття, що призводять до розв'язку: $R_1 = (4, 2)$ і $R_2 = (2, 2, 2)$. Якщо в R_1 одержимо результат (+,–), то $f_2(6) = 2 + f_2(4) = 5$, а якщо результат (+, +) — одержимо $f_2(6) = g(4, 2) + 2 = 5$.

Покажемо, що $f_2(7) = 5$. Почнемо з $m = 2$. За лемою 1 маємо $f_2\{\max(k_1, k_2)\} = 3$, тобто $\max(k_1, k_2) = 4$. Одержуємо $R = (4, 3)$. Але після двох перевірок можна отримати результат (+, +), що означає $f_2(7) = 2 + g(4, 3) = 6$, а це нас не влаштовує. Нехай $m = 3$, тоді за лемою 1 $\max(k_1, k_2, k_3) = 3$ і $R = (3, 2, 2)$. Якщо за результатами перевірки маємо тільки один «+», то $f_2(7) \leq 5$, але результат (+, –, +) зумовлює розв'язок $f_2(7) = 3 + g(3, 2) = 6$, що також не влаштовує.

Залишилося дослідити випадок $m = 4$. Тоді одержимо єдине розбиття $R = (2, 2, 2, 1)$. Чотири перевірки знадобляться тільки в комбінації із двома знаками «+» для функції $g(2, 1)$, яка вимагає однієї перевірки. Дві двійки зі знаком «+» з'являться за трьома перевірками, і тоді $f_2(7) = 3 + g(2, 2) = 5$. У такий спосіб $f_2(7) = 5$ тільки за заданим розбиттям. Раніше було показано, що $f_2(8) = 6$. Нехай $n = 9$ і $R = (4, 4, 1)$. Якщо після трьох перевірок буде тільки один знак «+», то в найгіршому випадку маємо $f_2(9) = 3 + f_2(4) = 6$. Для двох знаків «+» у найгіршому випадку $f_2(9) = 2 + g(4, 4) = 6$, отже, $f_2(9) = 6$. Для $n = 10$ розглянемо розбиття $R = (4, 4, 2)$. Якщо в трьох перевірках виявиться один знак «+», то в найгіршому випадку $f_2(10) = 3 + g(4, 4) = 7$. Цей варіант нас не влаштовує, тому кожну перевірку виконуватимемо виважено згідно з розбиванням. Якщо в першій перевірці одержали результат «–», то $f_2(10) = 1 + f_2(10 - 4) =$ $= 1 + f_2(6) = 6$. Якщо одержали знак «+», то перевіряємо другу групу куль. Якщо одержимо знак «+», то немає сенсу перевіряти третю групу, і тоді $f_2(10) = 2 + g(4, 4) = 6$. Якщо перевірка другої групи дала результат «–», то перевіряємо останню групу із двох куль. Нерозглянутим залишився випадок, коли ця перевірка матиме результат «+». Тоді $f_2(10) = 3 + g(4, 2) = 6$ й остаточно $f_2(10) = 6$.

Для $n=11$ для вибору k_1 будемо дотримуватися тієї ж стратегії. Припустимо, що $f_2(11)=6$. Тоді згідно з лемою 1 для $m=3$ маємо $f_2(k_1)\le 3$. З іншого боку, необхідно, щоб для результату «–» після першої перевірки виконувалась умова $f_2(11-k_1)<6$. Цій умові відповідає тільки $k_1=4$, тому складніший варіант виникає, якщо результат першої перевірки буде «+». Другий знак «+» отримуємо для другої або третьої перевірки. У такий спосіб необхідно розв'язати задачу: знайти x і y такі, що $x+y=7$, $2+g(4,x)\le 6$ та $3+g(4,y)\le 6$. Нерівності рівносильні тому, що існують x, y із умов $f_1(x)\le 2$, $f_1(y)\le 1$ і $x+y=7$. Однак, як легко переконатися, ця задача розв'язків не має. Якщо припустити, що $f_2(11)=7$, то умова задачі буде інша: знайти x і y такі (для $f_2(k_1)\le 4$, $f_2(11-k_1)<7$ отримуємо $k_1=5$), що $2+g(5,x)\le 7$, $3+g(5,y)\le 7$ і $x+y=6$. Цій задачі відповідають розбиття $R_1=(5,3,3)$ і $R_2=(5,4,2)$. Для $n=12$ має місце розбиття $R=(4,4,4)$, для $n=13$ — розбиття $R=(4,4,4,1)$ і для $n=14$ — розбиття $R=(4,4,4,2)$. Це легко перевірити тим, що $f_2(n)=7$ для $11\le n\le 14$. Для $n=16$, як відомо з теореми 2, $f_2(16)=8$. Необхідно обчислити $f_2(15)$, значення якої дорівнює 7 або 8.

Лема 3. $f_2(15)=7$.

Під час першої перевірки вибираємо п'ять куль, тобто $k_1=5$. Якщо результат «–», то поміж 10 куль, що залишилися, як відомо, дві активні кулі можна знайти за шість перевірок, що не суперечить лемі. Якщо отримали «+», то перевіряємо наступні п'ять куль, до яких включаємо одну з уже перевірених і чотири нові. Якщо результат «–», то вилучаємо ці кулі, а шість куль, що залишилися, розбиваємо на дві групи $4+2$ і послідовно їх перевіряємо. З урахуванням перших двох перевірок маємо: якщо $(+,-,+)$, то $g(4,4)=4$ і $f_2(15)=3+4=7$; якщо $(+,-,-,+)$, то $g(4,2)=3$ і $f_2(15)=4+3=7$; якщо $(+,-,-,-)$, то $f_2(15)=4+f_2(4)=4+3=7$. Залишається дослідити випадок, коли за другою перевіркою одержимо результат «+». Тоді на третьому кроці перевіряємо спільну для двох перевірок кулю. Якщо вона активна, то другу кулю знайдемо поміж 14, що залишилися за $f_1(14)=4$ перевірок, що в сумі складає сім перевірок $(3+4=7)$. Якщо така куля неактивна, то після її вилучення задача зводиться до визначення $g(4,4)=4$ перших двох груп, що в сумі дає такий самий результат. Лему доведено.

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Водночас з логічним розв'язанням цієї задачі далі пропонуємо підхід, що ґрунтується на поняттях теорії графів. Базуючись на загальних принципах, будь-яку активну пару можна представити ребром повного n-вершинного графа K_n (рис. 1). Шляхом перевірок можна домогтися зменшення кількості цих допустимих ребер.

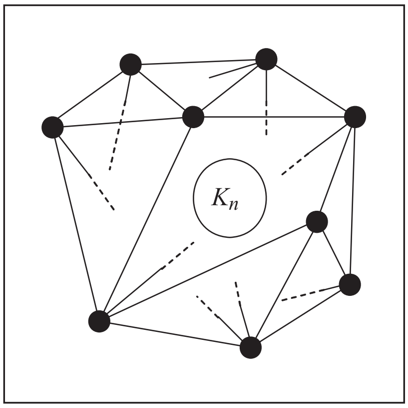

Рис. 1. Повний підграф K_n

Під час вибору множини куль для перевірки (перевірної множини) будемо користуватися трьома правилами:

1) якщо отримано позитивну відповідь, то всі допустимі ребра починаються в перевірній множині, а інші ребра зникають і ніколи не відновлюються;

2) якщо отримано негативну відповідь, то всі ребра, що починаються в перевірній множині, зникають, а інші зберігаються;

3) кількість допустимих ребер, що залишаються і зникають, повинна бути в межах степеня двійки, що на одиницю менше, ніж у попередній перевірці.

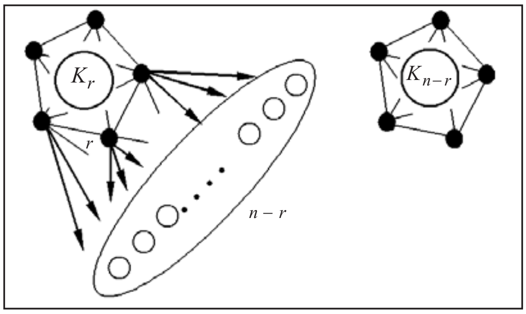

Рис. 2. Результати першої вибірки

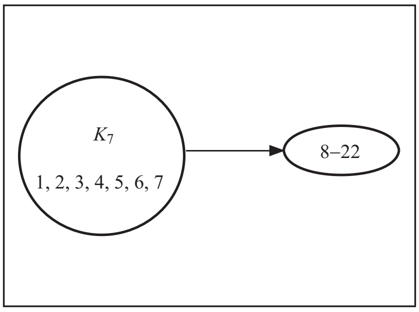

Рис. 3. Вибірка K_7 для $m = 7 \cdot 15 + C_7^2 = 126$

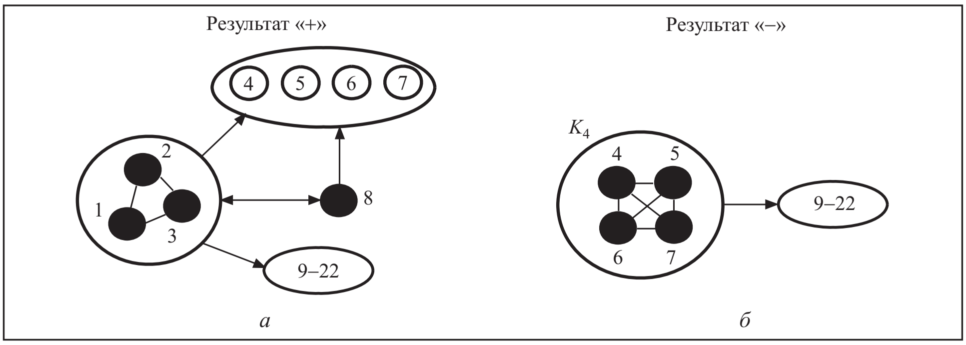

Рис. 4. Перша вибірка для $m = 3 \cdot 19 + C_3^2 + 4 = 64$ (*а*) та її залишок для $m = 4 \cdot 14 + C_4^2 = 62$ (*б*)

Якщо для першої перевірки виберемо r куль, то для позитивної реакції залишиться $m = r(n-r) + \frac{r(r-1)}{2}$ варіантів, а при негативній $m = \frac{(n-r)(n-r-1)}{2}$ варіантів, як показано на рис. 2.

Для другої перевірки можна вибирати кулі з двох множин: k_1 куль поміж r куль множини, яка перевірялася перший раз, а k_2 куль з множини, що залишалася. У результаті цієї перевірки поряд з очевидною кількістю варіантів $k_1 \cdot (n-k_1) + C_{k_1}^2$ отримуємо ще додаткову кількість варіантів за рахунок ребер, що починаються в множині, яка містить k_2 вершин, і закінчуються в множині, що містить $r - k_1$ вершин, тобто $k_2 \cdot (r - k_1)$ варіантів. Можливі і складніші вибірки ребер графа, але одночасно є важливим дотримання правила 3.

Покажемо застосування теорії графів на прикладі для $n = 22$. Отже, доведемо таку теорему.

Теорема 2. Виконується рівність $f_2(22) = 8$.

Для певності позначимо кулі номерами від 1 до 22. Для першої перевірки виберемо таку кількість куль, щоб за негативної або позитивної реакцій решта перевірок була на одну менше. Відомо, що семи перевірок достатньо для 15 куль, тобто можна вибрати спочатку сім куль. З іншого боку за позитивної реакції, як відомо, залишиться $m = \frac{7(7-1)}{2} + 7 \cdot 15 = 126$ варіантів, що менше 2^7. Отже, виконаємо таку послідовність кроків.

Крок 1. Виберемо для перевірки сім перших куль.

На другому кроці необхідно вибирати кулі з двох множин. До того ж треба пам’ятати три основні правила.

Крок 2. Беремо три перші кулі з першої множини та кулю 8 з другої множини (рис. 4, позначені чорним кольором).

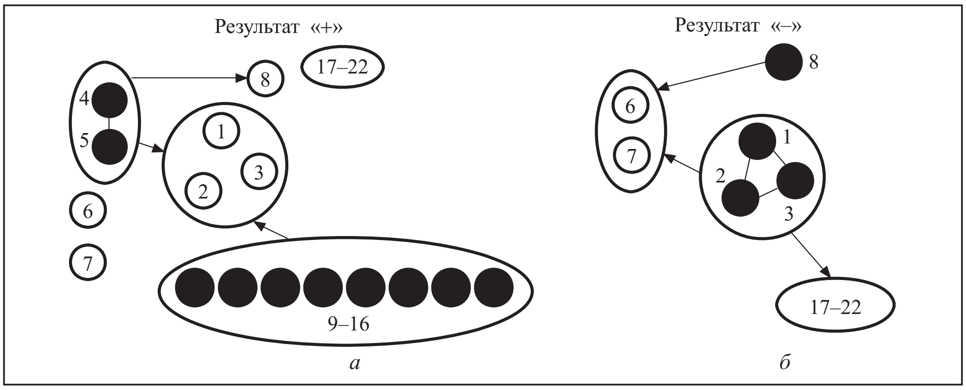

Рис. 5. Друга вибірка для $m = 8 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = 32$ (*а*) та її залишок для $m = 3 \cdot 9 + C_3^2 + 2 = 32$ (*б*)

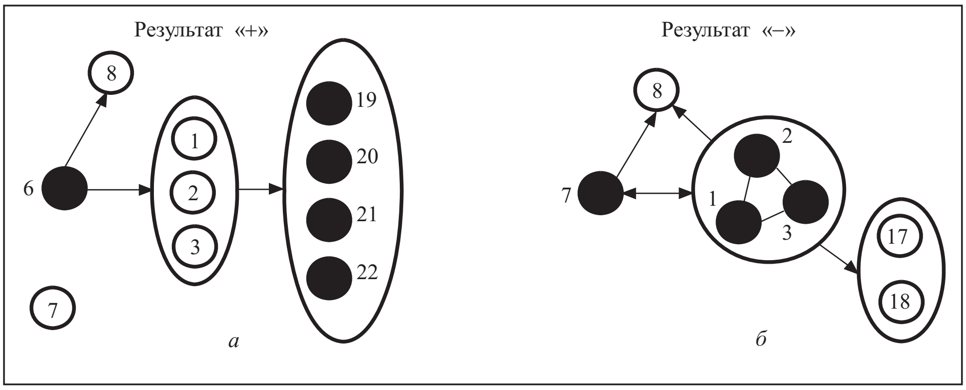

Рис. *6*. Третя вибірка для $m = 4 + 4 \cdot 3 = 16$ (*а*) та її залишок для $m = 3 \cdot 4 + 3 + 1 = 16$ (*б*)

Згідно з викладеними раніше міркуваннями маємо такі параметри: $k_1 = 3$, $k_2 = 1$. Отже, маємо кількість варіантів m, яку наведено у підписах до рисунків.

Як і раніше, ребер між вершинами 9–22 немає, але також зникають ребра між вершинами 4–7.

Як у випадку позитивного результату, так і негативного кількість варіантів зменшується в два рази.

Крок 3. Після послідовності (+, +) (див. рис. 4, *а*) вибираємо вісім куль з номерами 9–16 та дві кулі з номерами 4, 5 (рис. 5*, а*), далі виконуємо крок 4.

Після послідовності (+, –) (див. рис. 4, *б*) задача зводиться до обчислення функції $h(4^+, 14)$. Доведемо, що її значення дорівнює 6. Для цього 14 куль розіб'ємо на три групи (8, 4, 2) і будемо послідовно їх перевіряти. Якщо результат буде (+) або (–, +), або (–, –, +), то відповідно отримаємо $g(4,8) = 5$ або $g(4, 4) = 4$, або $g(4, 2) = 3$, а якщо результат буде (–, –, –), то залишаться чотири кулі, для яких $f_2(4) = 3$, тобто необхідно виконати шість кроків.

Крок 4. Після послідовності (+, +, –) (див. рис. 5, *б*) вибираємо чотири кулі з номерами 19–22 та кулю 6 (рис. 6). До того ж відповідно до основних принципів внутрішні ребра між вершинами 1, 2, 3 зникають. Кількість варіантів, що залишилися, відповідає чотирьом останнім крокам, що і потрібно.

Крок 4 для ситуації, як на рис. 3, збігається з кроком 4 для випадку, як на рис. 4, тільки замість кулі 6 вибираємо кулю 5, а замість куль 19–22 вибираємо кулі 9–12, причому маємо тільки позитивний результат перевірки.

Крок 5. Після послідовності (+, +, –, +) (див. рис. 6, *а*) вибираємо кулі 1 і 6 (рис. 7).

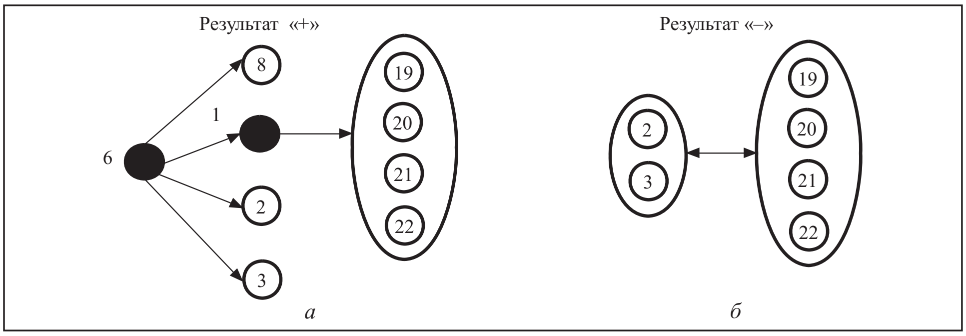

Рис. 7. Четверта вибірка для $m = 4 + 4 = 8$ (*а*) та її залишок для $m = 4 \cdot 2 = 8$ (*б*)

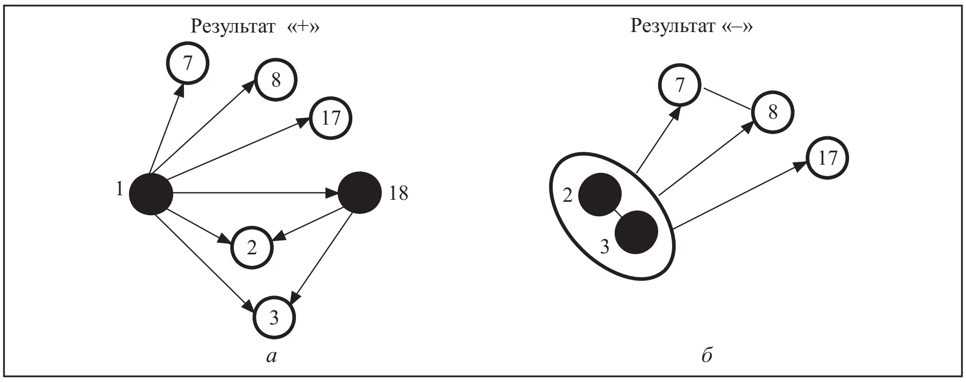

Рис. 8. П'ята вибірка для $m = 1 \cdot 6 + 2 = 8$ (*а*) та її залишок для $m = 2 \cdot 3 + 1 + 1 = 8$ (*б*)

Далі ці графи легко розбираються до одного ребра. У графі на кроці 6 вибираємо кулю 6, що призведе до утворення двох двочасткових графів $D(1, 4)$, в яких задача розв'язується за два кроки. У першому графі маємо $g(2, 4) = 3$, що в сумі теж дорівнює вісьмом крокам.

Розглянемо ситуацію виникнення послідовності (+, +, –, –) на рис. 6, *б*.

Наступний крок 5: вибираємо кулі 1 та 8 (рис. 8).

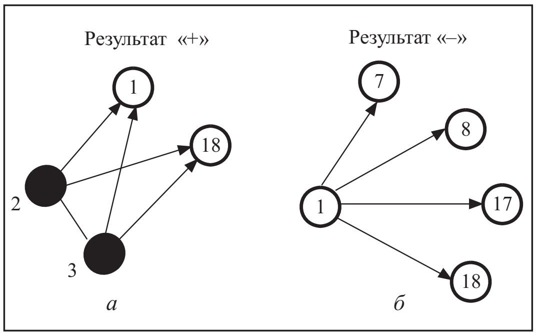

Рис. 9. Кінцева вибірка для $m = 2 + 2 = 4$ (*а*) та її залишок для $m = 1 \cdot 4 = 4$ (*б*)

Граф (див. рис. 8, *б*) відповідає функції $h(2^+, 2^k - 1)$, що дорівнює $k + 1$, для випадку, що розглядається, $k = 2$, тому $h(2^+, 3) = 3$, що і потрібно. Для графа (див. рис. 8, *а*) виконуємо крок 6.

Крок 6. Вибираємо кулі 2 та 3 (рис. 9).

Ці графи легко розбираються за два кроки, що і потрібно для остаточного доведення теореми.

Перейдемо тепер до обчислення функції $g(n_1, n_2)$. Як зазначалося раніше, безпосереднє обчислення $f_1(n_1)$ та $f_1(n_2)$ не завжди дає оптимальний результат. Доведемо спочатку таке твердження.

Лема 4. $g(3, 5) = 4$.

На першому кроці вибираємо одну кулю з кожної множини $< 1, 1 >$. Якщо отримаємо негативний результат, то маємо в залишку $g(2, 4) = 3$, що в сумі дає чо-

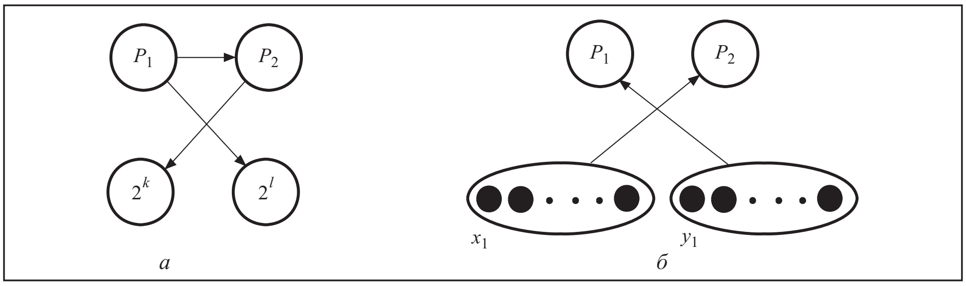

Рис. 10. Перше розбиття для $m = P_1 \cdot 2^l + P_2 \cdot 2^k + P_1 \cdot P_2$ (*а*) та його залишок для $m = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot x_1$ (*б*)

тири кроки. Якщо отримаємо позитивний результат, то на другому кроці вибираємо чотири кулі, що залишилися з другої множини. Позитивний результат буде означати, що на першому кроці з вибірки права куля була неактивною, а ліва активною. Другу кулю з чотирьох знайдемо за два кроки. Якщо отримаємо негативний результат, то на першому кроці активною була права куля, а другу кулю знайдемо з першої множини за два кроки. Отже, сума кроків завжди буде дорівнювати 4, що і потрібно було довести.

Обчислеювати функцію $g(n_1, n_2)$ можна також з застосуванням теорії графів. На самому початку маємо таку ситуацію. Задають двочастковий граф $D(n_1, n_2)$, який треба методом дихотомії розібрати до одного ребра. Здається вірогідним, що це завжди можливо, а тому вірогідним є твердження що $g(n_1, n_2) = f_1(n_1 \cdot n_2)$. Для реалізації цього представимо числа n_1 та n_2 у вигляді сум $n_1 = p_1 + x$ та $n_2 = p_2 + y$. Найчастіше як другі доданки вибирають числа 2^k та 2^l, де відповідно $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$, а $l = \lfloor \log_2 n_2 \rfloor$ (рис 10).

На першому кроці робимо перевірку $< P_1, P_2 >$. За негативного результату маємо $g(2^k, 2^l) = k + l$. Якщо буде позитивний результат, то далі вибираємо x_1 та y_1 куль з нижніх частин графа за умови дотримання правила 3. Якщо для якихось x_i та y_i отримаємо позитивний результат, то переходимо до двох двочасткових підграфів: $D_1(P_1, y_i)$ та $D_2(P_2, x_i)$, які можна розбирати незалежно. Для прикладу доведемо теорему.

Теорема 3. Справедлива рівність $g(2^k - 1, 2^k + 1) = 2k$.

Для доведення виберемо для першої перевірки $P_1 = 2^{k-1} - 1$ та $P_2 = 1$. Якщо результат буде «–», то $g(2^{k-1}, 2^k) = 2k - 1$, що в сумі з першим кроком дає $2k$. Якщо результат буде «+», то кількість варіантів $m = (2^{k-1} - 1)(2^k + 1) + 2^{k-1} = 2^{2k-1} - 1$. На другому кроці вибираємо $x_1 = y_1 = 2^{k-1}$. За негативного результату отримуємо ситуацію $g(2^{k-1} - 1, 2^{k^{-1}} + 1)$, тобто за індукцією для $k - 1$. Зменшення k на одиницю відбувається за два кроки доти, поки не отримаємо функцію $g(3, 5)$, яка дорівнює 4, що в сумі дає $2k$ кроків. За позитивного результату отримаємо два двочасткові підграфи, які після $k - 1$ кроків дихотомії перетворяться у підграфи $D_1(2^{k-1}, 1)$ та $D_2(1, 1)$ з ключовою перевіркою $< 1, 1 >$, яка має позитивний результат. За $k - 1$ кроків розбираємо перший підграф. Якщо поміж 2^{k-1} куль знайдеться активна, то в ключовій перевірці ліва куля буде неактивною, а права активною. У підсумку отримаємо активне ребро першого підграфа. Якщо поміж 2^{k-1} куль не знайдеться активної, то на першому кроці права куля була активною і отримаємо підграф $D_2(1, 1)$ як активне ребро. У сумі отримаємо $2 + k - 1 + k - 1 = 2k$ кроків. Цей факт і завершує доведення теореми.

Застосування теорії графів дало можливість довести такі твердження: $f_2(31) = 9$, $f_2(44) = 10$, $f_2(63) = 11$, $f_2(89) = 12$, $f_2(127) = 13$, $f_2(180) = 14$, $f_2(255) = 15$.

ВИСНОВКИ

Продемонстровано застосування теорії графів до розв'язання задачі пошуку двох радіоактивних куль серед множини подібних. Ця множина представлена у вигляді повного неорієнтованого графа з відповідною кількістю вершин, кідькість ребер якого дорівнює кількості варіантів задачі. На кожному кроці алгоритму виконується вибірка з куль, яка зменшує кількість ребер вдвічі до тих пір, доки не залишиться одного ребра, яке і становить розв'язок задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Донець Г.П., Пепеляєв В.А., Трофимчук О.М. Комбінаторні алгоритми підтримки прийняття управлінських рішень. *Доп. НАН України.* 2014. № 11. С. 33–39.
2. Донец Г.А. Задачи комбинаторного распознавания. *Материалы XVI Междунар.конф. «Проблемы теоретической кибернетики»*. Нижний Новгород, 2011. С. 142–144.
3. Донец Г.А. Методы комбинаторного распознавания. *Материалы Междунар. конф. «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии»*. Кишинев, 24–26 марта 2010. С. 142–147.
4. Білецький В.І., Донець Г.П., Ненахов Е.І. Комбінаторне розпізнавання. Задачі та їх розв'язування. *Теорія оптимальних рішень*: Зб. наук. пр. 2012. Вип. 2012. С. 21–29.
5. Донец Г.А., Кузнецов С.Т. Об одной комбинаторной задаче логического типа. *Теорія оптимальних рішень*: Зб. наук. пр. 2012. Вип. 2012. С. 101–108.
6. Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Графовый подход к решению задачи поиска радиоактивных шаров. *Теорія оптимальних рішень*: Зб. наук. пр. 2014. Вип. 2014. С. 147–154.
7. Донец Г.А., Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Оптимальный поиск двух активных шаров на множестве заданных. *Теорія оптимальних рішень*: Зб. наук. пр. 2015. Вип. 2015. С. 134–139.
8. Билецкий В.И., Ненахов Э.И. Алгоритмы поиска двух активных шаров на заданных множествах. *Теорія оптимальних рішень*: Зб. наук. пр. 2016. Вип. 2016. С. 78–85.

Надійшла до редакції 22.06.2017

Г.А. Донец

ГРАФОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ

Аннотация. Рассмотрена проблема кобминаторного распознавания с помощью серии тестовых проверок. К ней сводится задача поиска двух радиоактивных шаров среди массы заданных. Для решения задачи предложено применить теорию графов. Этот подход продемонстрирован на примере для 22 шаров.

Ключевые слова: ограниченная выборка, неограниченная выборка, полный граф, двудольний граф, граф поиска, активные шары, активное ребро, положительный результат проверок, отрицательный результат проверок.

G.A. Donets

GRAPH APPROACH TO SOLVING PROBLEMS OF COMBINATORIAL RECOGNITION

Abstract. The problem of finding two radioactive balls among a given set of balls is reduced to a combinatorial recognition problem, the latter solved by a series of tests. In so doing, methods of graph theory are employed. To illustrate this approach, an example with 22 balls is given.

Keywords: limited sample, unlimited sample, complete graph, bipartite graph, search graph, active balls, active edge, positive test result, negative test result.

Донець Георгій Панасович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: georgdone@gmail.com.