УДК 519.85

С.В. ЯКОВЛЕВ, О.С. ПИЧУГИНА

СВОЙСТВА ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВАХ

Аннотация. Рассмотрен класс задач комбинаторной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах. Обобщены результаты теории выпуклых продолжений на некоторые классы функций, заданных на сферически- и вершинно-расположенных множествах. Исходная задача эквивалентно сформулирована как задача математического программирования с выпуклыми целевой функцией и функциональными ограничениями. Приведена численная иллюстрация и возможные приложения полученных результатов к решению задач комбинаторной оптимизации.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, полиэдрально-сферическое множество, непрерывное представление, выпуклое продолжение.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи комбинаторной оптимизации вызывают постоянный интерес исследователей [1–6]. К указанному классу относятся задачи евклидовой комбинаторной оптимизации [7, 8], в которых комбинаторные объекты отображаются в арифметическое евклидово пространство. Важнейшей особенностью задач дискретной оптимизации является то, что область допустимых решений представляет конечное множество, совпадающее с множеством вершин своей выпуклой оболочки. В работах [9–12] заложены основы теории выпуклых продолжений для функций, заданных на вершинах выпуклых многогранников. Исследования специальных классов евклидовых комбинаторных множеств и функций, заданных на этих множествах, освещены, в частности, в публикациях [13–20]. Современное состояние теории выпуклых продолжений и непрерывных функциональных представлений для евклидовых комбинаторных множеств представлено в работах [21–33]. В настоящей статье развиваются основные положения данной теории при решении задач оптимизации на множестве евклидовых комбинаторных объектов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу комбинаторной оптимизации с использованием понятия комбинаторного объекта, введенного в [34–37].

Пусть $\boldsymbol{J}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{Z}$ — не более чем счетное пространство изолированных точек, которое назовем образующим, а Z — порожденное им базовое множество. Под комбинаторным объектом понимается триада (ψ, Z, Ω), где $\psi\colon \boldsymbol{J}_n \to Z$ — гомоморфизм, который удовлетворяет некоторой системе ограничений Ω. При этом множество $\boldsymbol{J}_n$ называется нумерующим. Такое определение комбинаторного объекта основано на понятии комбинаторной конфигурации, введенном К. Бержем [38], как отображение нумерующего множества в некоторое конечное абстрактное строго упорядоченное множество. Заметим, что требования конечности и строгой упорядоченности обусловлены, прежде всего, задачами, которые возникают при перечислении и построении различных классов комбинаторных конфигураций [38–41]. При определении комбинаторного объекта эти условия ослаблены без потери сущности понятия конфигурации.

Сформулируем задачу комбинаторной оптимизации в следующей постановке [34–37]. Пусть Π — локально-конечное пространство, элементами которого являются комбинаторные объекты и на котором задан функционал $\xi\colon \Pi \to R^1$.

© С.В. Яковлев, О.С. Пичугина, 2018

Требуется найти

$$\pi^* = \arg \min_{\pi \in P \subseteq \Pi} \xi(\pi), \tag{1}$$

где $P \subseteq \Pi$ — множество допустимых решений.

Установим взаимно-однозначное соответствие φ: $\Pi \to E$ между комбинаторными объектами π пространства Π и точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ некоторого множества $E \subset R^n$, положив $x = \varphi(\pi)$, $\pi = \varphi^{-1}(x)$. Множества, для которых существует такое отображение, названы евклидовыми комбинаторными множествами [7, 8]. Они обладают рядом свойств, которые определяют специфику оптимизационных задач на этих множествах.

Пусть функция $f: E \to R^1$ такова, что $f(x) = \xi(\varphi^{-1}(x))$ для всех $x \in E$. Тогда задача (1) может быть эквивалентно сформулирована в следующем виде: найти

$$x^* = \arg \min_{x \in X \subseteq E} f(x), \tag{2}$$

где $X = \varphi(P)$ — образ множества P в R^n.

Таким образом, возникает необходимость в формализации отображения $\varphi: \Pi \to E \subset R^n$. При этом можно воспользоваться основными схемами, применяемыми при формировании комбинаторных конфигураций, а в более общем случае — комбинаторных объектов.

Введем следующие определения. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — не более чем счетное множество действительных чисел и отождествим его с образующим пространством, положив $\mathbb{Z} = A$. Назовем комбинаторный объект (ψ, Z, Ω) и конфигурацию $\psi: \boldsymbol{J}_n \to Z$ (при конечном множестве A) соответственно евклидовым комбинаторным объектом и евклидовой комбинаторной конфигурацией.

Ограничимся рассмотрением комбинаторных объектов первого порядка [34–37], т.е. положим $Z = \mathbb{Z}$. Пусть (ψ, Z, Ω) — произвольный комбинаторный объект, где $\psi: \boldsymbol{J}_n \to Z$. Установим биекцию $\xi: \mathrm{Z} \to A$. Таким образом, комбинаторный объект вида (ψ, A, Ω), где $A = \xi(Z)$, является евклидовым комбинаторным объектом. Обозначим $E(A) \subset R^n$ множество точек вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in A$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Суперпозиция отображений $\psi: \boldsymbol{J}_n \to Z$ и $\xi: \mathrm{Z} \to A$ позволяет каждому комбинаторному объекту поставить в соответствие некоторую точку $x \in E(A)$, тем самым формируя искомое отображение $\varphi: \Pi \to E \subset R^n$. Система ограничений Ω позволяет выделять соответствующие классы евклидовых комбинаторных объектов, формируя тем самым различные евклидовые комбинаторные множества.

Изложенные рассуждения позволяют рассматривать задачу (1) при отображении $\varphi: \Pi \to E \subset R^n$ как задачу оптимизации (2) на множестве евклидовых комбинаторных объектов, т.е. векторов арифметического евклидового пространства. При этом задача (2) в соответствии с классификацией [2, 6, 36, 42] относится к классу задач дискретной оптимизации.

Для описания свойств задачи (2) сформулируем ее в следующей эквивалентной постановке:

$$f(x) \to \min, \; x \in X, \tag{3}$$

где множество X задается системой ограничений

$$x \in E, \tag{4}$$

$$g_i(x) \le 0, \; i \in \boldsymbol{J}_k, \tag{5}$$

$$g_i(x) = 0, \; i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k, \tag{6}$$

а функции $f(x), g_i(x), i \in \boldsymbol{J}_m$, определены на E. Ограничения (4) называют прямыми, а (5), (6) — функциональными.

Формализация задачи (3)–(6) определяется способом задания прямых ограничений (4), а также аналитическим видом функций $f(x), g_i(x), i \in \boldsymbol{J}_m$.

Заметим, что формирование прямых и функциональных ограничений в задаче (3)–(6) является условным. Действительно, евклидовы комбинаторные множества E допускают описание их системой уравнений и неравенств, часть из которых можно рассматривать как функциональные ограничения. Конкретный вид функциональных ограничений для различных классов евклидовых комбинаторных множеств дан в работах [23–27, 31, 32]. При этом наибольший интерес с точки зрения приложения методов непрерывного представления для формализации задач вида (3)–(6) имеют так называемые вершинно-расположенные [12] и полиэдрально-сферические множества [25–27, 31, 32].

ВЕРШИННО-РАСПОЛОЖЕННЫЕ И ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

Выделим класс множеств $E \subset R^n$, удовлетворяющих условию $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$, т.е. совпадающих с множеством вершин своей выпуклой оболочки. Такие множества назовем вершинно-расположенными.

Если существуют такие $\tau \in R^n$ и число $r > 0$, что для любых $x \in E$

$$\| x - \tau \|^2 = r^2, \tag{7}$$

то множество $E \subset R^n$ назовем сферически расположенным. Очевидно, что конечное сферически-расположенное множество E является вершинно-расположенным и совпадает с множеством вершин многогранника $\Pi = \operatorname{conv} E$. Представление конечных множеств в виде пересечения своей выпуклой оболочки и некоторой гиперсферы позволяет объединить их в единый класс полиэдрально-сферических множеств.

Рассмотрим примеры вершинно-расположенных и полиэдрально-сферических множеств, элементами которых в соответствии с приведенными выше рассуждениями являются евклидовые комбинаторные объекты (конфигурации). Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — множество n действительных чисел, а $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — произвольная перестановка из первых n натуральных чисел. Каждому элементу $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ поставим в соответствие вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, \ldots, a_{\pi_n}) \in R^n$. Совокупность таких векторов порождает евклидово множество перестановок $E_n(A) \subset R^n$. Если допустить, что элементы множества одинаковые, то будем считать, что речь идет о мультимножестве, и обозначать его $\widetilde{A}$. Мультимножество $\widetilde{A}$ порождает евклидово множество перестановок с повторениями $E_n(\widetilde{A}) \subset R^n$.

Множества $E_n(A)$ и $E_n(\widetilde{A})$ являются вершинно-расположенными и полиэдрально-сферическими. Действительно, не теряя общности положим, что элементы множества A упорядочены по возрастанию: $a_i < a_{i+1}, i \in \boldsymbol{J}_{n-1}$. Тогда выпуклой оболочкой множества $E_n(A)$ будет так называемый перестановочный многогранник $\Pi_n(A)$, который описывается следующей системой ограничений [43]:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i, \\ \sum_{i \in \omega} x_i \geq \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \quad \forall \omega \subseteq \boldsymbol{J}_n, \ |\omega| < n. \end{gathered} \tag{8}$$

Поскольку множество $E_n(A)$ конечно и для любого $\tau \in R^1$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \tau)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i - \tau)^2, \tag{9}$$

то оно является полиэдрально-сферическим, а значит, и вершинно-расположенным.

Очевидно, что полиэдрально-сферическим является множество перестановок с повторениями. Перестановочный многогранник $\Pi_n(\widetilde{A})$ при этом описывается условиями (8) после упорядочения по неубыванию элементов мультимножества $\widetilde{A}$. Точки множества $E_n(\widetilde{A})$ также удовлетворяют условию (9).

Рассмотрим семейство мультимножеств

$$\widetilde{A}^k = \{a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{n_k}^k\}, \quad \sum_{k=1}^{m} n_k = n, \; n_k \ge 1, \;\; k \in J_m,$$

каждое из которых порождает полиэдрально-сферическое множество $E_{n_k}(\widetilde{A}^k)$ с элементами $x^k = (x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k)$, где $x_i^k = a_{\pi_i^k}^k$, $i \in \boldsymbol{J}_{n_k}$, а $(\pi_1^k, \ldots, \pi_{n_k}^k)$ — перестановка чисел из $\boldsymbol{J}_{n_k}$.

Сформируем декартово произведение множеств $E_{n_k}(\widetilde{A}^k)$, $k \in \boldsymbol{J}_m$:

$$E_n(\widetilde{A}^1 * \widetilde{A}^2 * \ldots * \widetilde{A}^m) = \prod_{k=1}^{m} E_{n_k}(\widetilde{A}^k). \tag{10}$$

Элементами такого множества будут упорядоченные наборы

$$x = (x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= (a_{\pi_1^1}^1, a_{\pi_2^1}^1, \ldots, a_{\pi_{n_1}^1}^1, a_{\pi_1^2}^2, a_{\pi_2^2}^2, \ldots, a_{\pi_{n_2}^2}^2, \ldots, a_{\pi_1^m}^m, a_{\pi_2^m}^m, \ldots, a_{\pi_{n_m}^m}^m), \tag{11}$$

где $(\pi_1^k, \ldots, \pi_{n_k}^k)$ — всевозможные перестановки чисел из $\boldsymbol{J}_{n_k}$, $k \in \boldsymbol{J}_m$.

Множество, заданное выражением (10), является полиэдрально-сферическим как подмножество множества перестановок с повторениями, порожденного мультимножеством

$$\widetilde{A} = \{a_1^1, a_2^1, \ldots, a_{n_1}^1, a_1^2, a_2^2, \ldots, a_{n_2}^2, \ldots, a_1^m, a_2^m, \ldots, a_{n_m}^m\}. \tag{12}$$

Пусть P_m — множество перестановок из $\boldsymbol{J}_m$ и $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in P_m$. С учетом введенных выше обозначений сформируем множество

$$E_n(\widetilde{A}^{\sigma_1} * \widetilde{A}^{\sigma_2} * \ldots * \widetilde{A}^{\sigma_m}) = \prod_{k=1}^{m} E_{n_{\sigma_k}}(\widetilde{A}^{\sigma_k}), \tag{13}$$

элементы которого имеют вид

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (a_{\pi_1^1}^{\sigma_1}, a_{\pi_2^1}^{\sigma_1}, \ldots, a_{\pi_{n_{\sigma_1}}^1}^{\sigma_1}, a_{\pi_1^2}^{\sigma_2}, a_{\pi_2^2}^{\sigma_2}, \ldots, a_{\pi_{n_{\sigma_2}}^2}^{\sigma_2}, \ldots, a_{\pi_1^m}^{\sigma_m}, a_{\pi_2^m}^{\sigma_m}, \ldots, a_{\pi_{n_{\sigma_m}}^m}^{\sigma_m}),$$

где $(\pi_1^k, \ldots, \pi_{n_k}^k)$ — всевозможные перестановки из $\boldsymbol{J}_{n_k}$, $k \in \boldsymbol{J}_m$.

Объединяя множества вида (13) по всевозможным $\sigma \in P_m$, получаем

$$E_n(\widetilde{A}^1, \widetilde{A}^2, \ldots, \widetilde{A}^m) = \bigcup_{\sigma \in P_m} E_n(\widetilde{A}^{\sigma_1} * \widetilde{A}^{\sigma_2} * \ldots * \widetilde{A}^{\sigma_m}). \tag{14}$$

Множество $E_n(\widetilde{A}^1, \widetilde{A}^2, \ldots, \widetilde{A}^m)$ вида (14) является полиэдрально-сферическим, как подмножество множества перестановок с повторениями, порожденного мультимножеством $\widetilde{A}$ вида (12).

Рассмотрим следующие обобщения, полагая, что элементами мультимножества $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ являются векторы, т.е. $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \{\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^n\}$, где $\boldsymbol{a}^i = (a_1^i, a_2^i, \ldots, a_m^i) \in R^m$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Каждой перестановке $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in P_n$ поставим в соответствие точку

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_t)= \tag{15}$$

$$=(a_1^{\pi_1}, a_2^{\pi_1}, \ldots, a_m^{\pi_1}, \ldots, a_1^{\pi_2}, a_2^{\pi_2}, \ldots, a_m^{\pi_2}, \ldots, a_1^{\pi_n}, a_2^{\pi_n}, \ldots, a_m^{\pi_n}) \in R^t,\ t=nm.$$

Совокупность точек вида (15) задает евклидово множество перестановок векторов $E_t(\widetilde{A}) \subset R^t$, которое в соответствии с приведенными выше рассуждениями также является полиэдрально-сферическим.

Примерами полиэдрально-сферических множеств также являются множество четных перестановок [43, 44] как подмножество $E_n(A)$ с четным количеством инверсий; множество циклических перестановок [45, 46]; множество перестановочных матриц [47, 48]; булево множеств и его специальные подмножества [47–49] и т.п.

Поскольку класс вершинно-расположенных и полиэдрально-сферических множеств обладает тем свойством, что операции прямого произведения не выводят их из этого класса, то перспективным представляется направление, связанное с генерацией комбинаторных множеств, сохраняющих эти свойства [39, 40].

ВЫПУКЛЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ И СВОЙСТВА ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ВЕРШИННО-РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Рассмотрим свойства задач дискретной оптимизации на вершинно-расположенных множествах в постановке (3)–(6). При этом воспользуемся теорией выпуклых продолжений [12, 28, 33], на основе которой сформулируем следующие утверждения для класса вершинно-расположенных и полиэдрально сферических множеств.

Теорема 1. Пусть $E \subset R^n$ — конечное множество такое, что $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$. Тогда для любой функции $f: E \to R^1$ существует дифференцируемая выпуклая функция $\widetilde{f}: \operatorname{conv} E \to R^1$ такая, что для любых $x \in E$

$$\widetilde{f}(x) = f(x). \tag{16}$$

Для функций $\widetilde{f}(x)$, удовлетворяющих на множестве E условию (16), будем использовать обозначение

$$\widetilde{f}(x) \underset{E}{=} f(x). \tag{17}$$

Функцию $\widetilde{f}(x)$, заданную на множестве $X \supset E$ и удовлетворяющую условию (17), назовем продолжением функции $f(x)$ на X. Если X – выпуклое и функция $\widetilde{f}(x)$ выпуклая на X, то назовем ее выпуклым продолжением $f(x)$ на X. Если функция $\widetilde{f}(x)$ дифференцируема (сильно выпукла) на X, то будем считать дифференцируемым (сильно выпуклым) продолжением $f(x)$ на X.

Обобщением теоремы 1 в соответствии с введенными определениями является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $E \subset R^n$ – конечное множество такое, что $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$. Тогда для любой функции $f: E \to R^1$ существует сильно выпуклое продолжение $\widetilde{f}: \operatorname{conv} E \to R^1$.

Для полиэдрально-сферического множества E сильно выпуклое продолжение можно представить в виде $\varphi(x) = \widetilde{f}(x) + \rho \| x - \tau \|^2$, где $\widetilde{f}(x)$ — произвольное дифференцируемое выпуклое продолжение на $\operatorname{conv} E$, $\rho > 0$ — параметр сильной выпуклости, $\tau \in R^n$.

Заметим, что утверждение теоремы 2 сохраняется для любого выпуклого надмножества $X \supseteq \operatorname{conv} E$, если $\widetilde{f}(x)$ — дифференцируемая выпуклая на X функция.

Выделение классов функций $f(x)$ и вершинно-расположенных множеств, для которых строятся выпуклые продолжения $\widetilde{f}(x)$, позволяют конкретизировать, а в некоторых случаях обобщить утверждения теорем 1, 2. В качестве примера рассмотрим свойства выпуклых продолжений для полиномов, заданных на множестве $E_n(\widetilde{A})$. В работе [10] предложен конструктивный итерационный алгоритм построения выпуклого продолжения для каждого монома, позволяющего строить искомые продолжения для любого полинома. Однако этот алгоритм в общем случае не позволяет находить дифференцируемые выпуклые продолжения.

Рассмотрим новый метод построения бесконечно гладкого выпуклого продолжения для полиномов, определенных на множестве $E_n(\widetilde{A}) \subset R^n_{>0}$, порожденном мультимножеством $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i > 0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$. Здесь и далее $R^n_{>0} = \operatorname{int} R^n_+$.

Поскольку симметричный многочлен в точках множества $E_n(\widetilde{A})$ принимает постоянное значение, то любой многочлен на этом множестве можно представить в виде суммы мономов с положительными коэффициентами [10, 12]. В простейшем случае для любого $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i^k ,$$

откуда при $j \in \boldsymbol{J}_n$

$$-x_j^k \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^k - \sum_{i=1}^{n} a_i^k . \tag{18}$$

В общем случае представим произвольный моном k-й степени в виде

$$F_{k_1 \ldots k_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i} , \tag{19}$$

где $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$, $k_i \geq 0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$.

Пусть $\boldsymbol{P} = P(l_1, \ldots, l_n)$ — множество перестановок из чисел $\{l_1, \ldots, l_n\}$. Тогда

$$\sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \boldsymbol{P}} F_{l_1 \ldots l_n}(x) \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \lambda(\widetilde{A}) ,$$

где суммирование проводится по всевозможным перестановкам из $\boldsymbol{P}$, а константа $\lambda(\widetilde{A})$ задается выражением

$$\lambda(\widetilde{A}) = \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \boldsymbol{P}} \prod_{i=1}^{n} a_i^{l_i} .$$

Отсюда следует, что на множестве $E_n(\widetilde{A})$ любой моном $F_{k_1, \ldots, k_n}(x)$ с отрицательным знаком можно представить как сумму мономов с положительными коэффициентами, т.е.

$$-F_{k_1 \ldots k_n}(x) \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \sum_{(l_1, \ldots, l_n) \in \boldsymbol{P} \setminus k_1, \ldots, k_n)} F_{l_1, l_2, \ldots, l_n}(x) - \lambda(\widetilde{A}) .$$

Возвратимся к моному $F_{k_1 k_2 \ldots k_n}(x)$ вида (19). Обозначим

$$\eta = \prod_{i=1}^{n} a_i .$$

Поскольку

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \prod_{i=1}^{n} a_i ,$$

то для точек множества $E_n(\widetilde{A}) \subset R^n_{>0}$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \ln \eta .$$

Отсюда, полагая $\mu = \max\limits_{i \in J_n} k_i$, имеем

$$F_{k_1 \ldots k_n}(x) = \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \ln x_i \right\} \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} (\mu - k_i) \ln x_i + \mu \ln \eta \right\} =$$

$$= \eta^{\mu} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i - \mu} . \tag{20}$$

В процессе преобразований (20) использовался тот факт, что монотонно возрастающая выпуклая функция от выпуклой функции является выпуклой. Поэтому функция $F_{k_1 \ldots k_n}(x)$ является выпуклой и, как следует из ее вида, бесконечно гладкой на $R^n_{>0}$.

Приведенный выше конструктивный подход к построению выпуклого продолжения для мономов доказывает следующую теорему.

Теорема 3. Для произвольного полинома, заданного на множестве $E_n(\widetilde{A})$, порожденном мультимножеством $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $a_i > 0$, $i \in \boldsymbol{J}_n$, существует выпуклое бесконечно гладкое продолжение на $R^n_{>0}$, причем для любого монома $F_{k_1 \ldots k_n}(x)$ вида (19) выполняется соотношение

$$F_{k_1 \ldots k_n}(x) \underset{E_n(\widetilde{A})}{=} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{\mu} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i - \mu} , \tag{21}$$

где $\mu = \max\limits_{i \in J_n} k_i$.

Особый интерес представляет класс задач квадратичной оптимизации на вершинно-расположенных множествах. Построение выпуклых продолжений для квадратичных функций на различных евклидовых комбинаторных множествах рассмотрены в [13, 16, 22–24, 27]. Обобщение этих результатов на класс сферически расположенных множеств позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть на сферически расположенном множестве $S \subseteq S(\tau, r)$ задана квадратичная функция

$$f(x) = (Cx, x) + (b, x) , \tag{22}$$

где $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ — произвольная симметричная $n \times n$-матрица, а b — n-мерный вектор. Тогда существует выпуклое продолжение $\widetilde{f}(x) = (\widetilde{C}x, x) + (\widetilde{b}, x) + \widetilde{d}$ функции $f(x)$ на пространство R^n, где $\widetilde{C} = [\widetilde{c}_{ij}]_{n \times n}$ — симметричная положительно-полуопределенная матрица, $\widetilde{b}$ — n-мерный вектор, $\widetilde{d}$ — константа.

Пусть $S(\tau, r)$ — гиперсфера, заданная условием (7), и $S \subseteq S(\tau, r)$. Построение выпуклого продолжения в R^n для класса квадратичных функций, заданных на сферически расположенном множестве S, основывается на следующих эквивалентных преобразованиях:

$$\pm x_i x_j \underset{S}{=} \frac{1}{2} \left((x_i \pm x_j)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i,\, j}}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \tau_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 - r^2 \right), \; 1 \le i < j \le n; \tag{23}$$

$$-x_i^2 \underset{S}{=} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \tau_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \tau_k^2 - r^2 . \tag{24}$$

Осуществляя эквивалентные преобразования для функции (22) в соответствии с выражениями (23), (24), имеем

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + \left(\sum_{i:\, c_{ii}<0} |c_{ii}| + \sum_{i<j} |c_{ij}| \right) (\|x-\tau\|^2 - r^2). \qquad (25)$$

Пусть $\beta = \sum_{i:\, c_{ii}<0} |c_{ii}| + \sum_{i<j} |c_{ij}|$. Тогда для функции $\widetilde{f}(x) = (\widetilde{C}x, x) + (\widetilde{b}, x) + \widetilde{d}$ имеем

$$\widetilde{C} = C + \beta I,\ \widetilde{b} = b - 2\beta\tau,\ \widetilde{d} = \beta(\tau^2 - r^2),$$

где I — единичная матрица. При этом в соответствии с теоремой 2 для любого $\rho > 0$ квадратичная функция $\widetilde{f}(x) + \rho\|x-\tau\|^2$ будет сильно выпуклой с параметром ρ.

Применим полученные выше результаты для исследования класса задач дискретной оптимизации на вершинно-расположенных множествах.

Осуществим эквивалентные преобразования задачи (3)–(6). Для этого представим ограничения-равенства (6) в виде

$$g_i(x) \le 0,$$
$$-g_i(x) \le 0,\ i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k. \qquad (26)$$

Для функции $f(x)$ и функций $g_i(x)$, $i \in \boldsymbol{J}_m$, находящихся в левых частях ограничений-неравенств (5) и (26), построим выпуклые продолжения на выпуклое множество $X \supseteq \operatorname{conv} E$

$$\widetilde{f}(x) \underset{E}{=} f(x),$$

$$\widetilde{g}_i(x) \underset{E}{=} g_i(x),\ i \in \boldsymbol{J}_m,$$

$$\widetilde{g}_i(x) \underset{E}{=} -g_{i-m+k}(x),\ i \in \boldsymbol{J}_r \setminus \boldsymbol{J}_m,\ r = 2m-k.$$

Тогда с учетом приведенных выше результатов о существовании выпуклых продолжений для функций, заданных на вершинно-расположенных множествах, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 5 (об эквивалентности задач оптимизации на вершинно-расположенных множествах). Пусть $E \subset R^n$– конечное множество такое, что $E = \operatorname{vert}\operatorname{conv} E$. Тогда

$$\arg\min_{x\in G} f(x) = \arg\min_{x\in \widetilde{G}} \widetilde{f}(x),$$

где $G = \{x \in E: g_i(x) \le 0, i \in \boldsymbol{J}_k,\ g_i(x) = 0, i \in \boldsymbol{J}_m \setminus \boldsymbol{J}_k\}$, $\widetilde{G} = \{x \in E: \widetilde{g}_i(x) \le 0,\ i \in \boldsymbol{J}_r\}$.

Аналогичные утверждения можно сформулировать для дифференцируемых и сильно выпуклых продолжений $\widetilde{f}(x), \widetilde{g}_i(x), i \in \boldsymbol{J}_r$.

С теоретической точки зрения, теорема 5 представляет особый интерес, поскольку позволяет использовать аппарат теории выпуклого программирования для решения вспомогательных задач, возникающих в различных алгоритмах дискретной оптимизации.

ПРИМЕР ПОСТРОЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ЕВКЛИДОВОМ МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Проиллюстрируем применение приведенных выше результатов для эквивалентного представления задачи оптимизации на множестве перестановок.

Пусть $E_{10}(\widetilde{A})$ — евклидово множество перестановок, порожденное мультимножеством $\widetilde{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\} = \{1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9\}$.

Рассмотрим задачу минимизации

$$f(x)=x_1^4 x_2 x_3^3 x_4^2 x_6 x_7^4 x_9^4+2x_1 x_3^2 x_5 x_7^2 x_8 x_{10}^2 \to \min_{E_{10}(\widetilde{A})} \tag{27}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} g_1(x)=-x_1^2+2x_2x_3-6x_2x_7+3x_3^2-4x_4x_5-2x_7^2+4x_6x_7-2x_7x_9+3x_{10}^2+ \\ +5x_1-x_2+3x_4-x_5+5x_7-x_9+4x_{10}\le 0; \end{gathered} \tag{28}$$

$$g_2(x)=-x_1^3+3x_2^4-2x_4+5x_5^3-3x_6^4-2x_7^3-4x_8^2-7x_9+5x_{10}^2-250\le 0. \tag{29}$$

Функциональными ограничениями задачи являются неравенства (28), (29), а прямые ограничения имеют вид

$$x\in E_{10}(\widetilde{A}). \tag{30}$$

Для описания множества $E_{10}(\widetilde{A})$ воспользуемся полиэдрально-сферическим представлением в соответствии с (8), (9):

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{10} x_i=\alpha_0, \\ \sum_{\substack{i\in\omega\subset J_{10} \\ |\omega|=k}} x_i\ge\alpha_k,\ k\in \boldsymbol{J}_9, \end{gathered} \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\tau)^2=r^2, \tag{32}$$

где $\tau=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}a_i$, $r=\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(a_i-\tau)^2}$, $\alpha_k=\sum_{i=1}^{k}a_i$, $k\in\boldsymbol{J}_9$.

Таким образом, точки множества $E_{10}(\widetilde{A})$ лежат на гиперсфере $S(\tau, r)$ минимального радиуса $r=8$ с центром в точке $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_{10})$, где $\tau_i=5$, $i\in\boldsymbol{J}_{10}$. Другие константы имеют вид

$$\alpha_1=1; \alpha_2=3; \alpha_3=5; \alpha_4=9; \alpha_5=14; \alpha_6=20; \alpha_7=27; \alpha_8=34; \alpha_9=41; \alpha_{10}=50.$$

Выпуклое продолжение функции $f(x)$ в соответствии с (21) примет вид

$$\widetilde{f}(x)=\frac{\eta^4}{x_2^3x_3x_4^2x_5^4x_6^3x_8^4x_{10}^4}+\frac{2\eta^2}{x_1x_2^2x_4^2x_5x_6^2x_8x_9^2}, \tag{33}$$

где $\eta=\prod_{i=1}^{10}a_i=1481760$.

Построим выпуклые продолжения для функций $g_1(x)$, $g_2(x)$. Поскольку $g_1(x)$ — квадратичная функция, то с использованием формулы (25) получим

$$\|x-\tau\|^2-r^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\sum_{i=1}^{10}x_i+186,$$

$$\beta=|c_{11}|+|c_{23}|+|c_{27}|+|c_{45}|+|c_{77}|+|c_{67}|+|c_{79}|=12.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \widetilde{g}_1(x)=11x_1^2+12x_2^2+15x_3^2+12x_4^2+12x_5^2+12x_6^2+10x_7^2+12x_8^2+12x_9^2+15x_{10}^2- \\ -115x_1-121x_2-120x_2-117x_4-121x_5-120x_2-115x_7-120x_2-121x_9-116x_{10}+ \\ +2x_2x_3-6x_2x_7-4x_4x_5+4x_6x_7-2x_7x_9+2232\le 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Для построения выпуклого продолжения для функции $g_2(x)$ воспользуемся формулой (18) для четырех ее нелинейных мономов с отрицательным знаком. Сгруппировав мономы одинаковых степеней, имеем

$$\tilde{g}_2(x) = -2x_4 - 7x_9 + 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_5^2 + 4x_6^2 + 4x_7^2 + 4x_9^2 + 9x_{10}^2 +$$

$$+2x_1^3 + 3x_2^3 + 3x_3^3 + 3x_4^3 + 8x_5^3 + 3x_6^3 + x_7^3 + 3x_8^3 + 3x_9^3 + 3x_{10}^3 +$$

$$+3x_1^4 + 6x_2^4 + 3x_3^4 + 3x_4^4 + 3x_5^4 + 3x_7^4 + 3x_8^4 + 3x_9^4 + 3x_{10}^4 - 55968 \le 0. \qquad (35)$$

Таким образом, задача (27)–(29) эквивалентна задаче минимизации выпуклой функции (33) при ограничениях (31), (32), (34), (35), где функции $\tilde{g}_1(x)$, $\tilde{g}_2(x)$ — выпуклые.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные направления приложения описанных результатов связаны с возможностью использования аппарата выпуклого программирования при решении вспомогательных задач в различных схемах глобальной оптимизации на полиэдрально-сферических множествах. Наиболее это касается решения релаксационных задач на указанных множествах. Для полиэдрально-сферических множеств возможны два типа релаксации. В первом случае имеем релаксационную задачу оптимизации выпуклой функции при выпуклых функциональных ограничениях и линейных неравенствах, описывающих соответствующий комбинаторный многогранник. Данная задача является задачей выпуклого программирования, для точного решения которой существует множество эффективных методов. При этом особый интерес представляет класс задач, в которых целевая функция и функциональные ограничения являются квадратичными. Это позволяет использовать современные методы квадратичной оптимизации, предложенные, например, в монографии [50].

Другим подходом к релаксации является решение оптимизационных задач на гиперсфере. В частности, для квадратичных функций такие подходы рассмотрены в работе [51].

Построение выпуклых продолжений для целевой функции и функциональных ограничений существенно расширяет возможности усиления нижних оценок в задачах минимизации на различных подмножествах области допустимых решений. Это позволяет существенно повысить эффективность направленного перебора в декомпозиционных методах глобальной оптимизации, таких как метод ветвей и границ, метод последовательного анализа вариантов [3, 52] и др. Применение свойств полиэдрально-сферических множеств, основанных на их разложении по попарно непересекающимся полиэдрально-сферическим подмножествам, дает возможность осуществлять различные теоретически обоснованные схемы ветвления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sergienko I.V. Methods of optimization and systems analysis for problems of transcomputational complexity. New York: Springer, 2012. 226 p.
2. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наук. думка, 2003. 261с.
3. Pardalos P.M., Du D-Z., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer, 2013. 3409 p.
4. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Heidelberg; New York; Berlin: Springer, 2002. 660 p.
5. Згуровский М.З., Павлов А.А. Трудноразрешаемые задачи комбинаторной оптимизации в планировании и принятии решений. Киев: Наук. думка, 2016. 115 с.

6. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації: навчальний посібник. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2016. 142 с.
7. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 268 с.
8. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: Ін-т системних досліджень освіти, 1993. 188 с.
9. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Свойства выпуклых функций на перестановочном многограннике. *Доклады АН УССР.* 1988. № 3. С. 69–72.
10. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Построение выпуклых и вогнутых функций на перестановочном многограннике. *Доклады АН УССР*. 1988. № 5. С. 68–70.
11. Yakovlev S.V. Bounds on the minimum of convex functions on Euclidean combinatorial sets. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1989. Vol. 25, N 3. P. 385–391.
12. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1994. Т. 34, № 7. С. 1112–1119.
13. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1991. Vol. 27, N 4. P. 562–567.
14. Yakovlev S.V., Grebennik I.V. Localization of solutions of some problems of nonlinear integer optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1993. Vol. 29, N 5. P. 419–426.
15. Yakovlev S.V., Valuiskaya O.A. Optimization of linear functions at the vertices of a permutation Polyhedron with additional linear constraints. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2001. Vol. 53, N 9. P. 1535-1545.
16. Яковлев С.В., Гребенник И.В. О некоторых классах задач оптимизации на комбинаторных множествах размещений. *Изв. вузов. Сер. Математика.* 1991. № 11. С. 26–30.
17. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Емец О.А., Валуйская О.А. Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере. *Кибернетика и системный анализ.* 1998. № 2. С. 27–37.
18. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М., Аристова И.В. Элементы теории геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1995. 241 с.
19. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. Киев: Наук. думка, 2008. 159 с.
20. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: Методи їх дослідження та розв’язання. Київ: Наук. думка, 2009. 266 с.
21. Грицик В.В., Кісельова О.М., Яковлев С.В., Стецюк П.І. та ін. Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп’ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об’єктів. Ін-т проблем штучного інтелекту НАН України. Донецьк: Наука і освіта, 2012. 480 с.
22. Пичугина О.С. Алгоритм построения выпуклого продолжения полиномов на полиперестановках и сфера его применения. *Problems of Computer Intellectualization.* Kyiv (Ukraine)–Sofia (Bulgaria), 2012. С. 125–132.
23. Пичугина О.С., Яковлев С.В. Выпуклые продолжения для класса квадратичных задач на перестановочных матрицах. *Компьютерная математика.* 2016. Вып. 1. С. 143–154.
24. Pichugina O., Yakovlev S. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn.* 2016. Vol. 4, N 2. P. 129–152.
25. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Functional and analytic representations of the general permutations. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2016. Vol. 1, N 4. P. 27–38.
26. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representations and functional extensions in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 6. P. 921–930.
27. Pichugina O., Yakovlev S. Continuous approaches to the unconstrained binary quadratic problems. *Mathematical and Computational Approaches in Advancing Modern Science and Engineering* (Eds J. Bélair et al.). Switzerland: Springer, 2016. P. 689–700.

28. Яковлев С.В. Теория выпуклых продолжений в задачах комбинаторной оптимизации. *Доклады НАН Украины.* 2017. № 8. С. 20–26.
29. Яковлев С.В. О комбинаторной структуре задач оптимального размещения геометрических объектов. *Доклады НАН Украины.* 2017. № 9. С. 63–68.
30. Yakovlev S.V. The method of artificial expansion of space in the problem of optimal placement of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 5. P. 825–830.
31. Pichugina O.S., Yakovlev S.V. Continuous representation techniques in combinatorial optimization. *IOSR Journal of Mathematics.* 2017. Vol. 13, N 2, Ver.V. P. 12–25.
32. Pichugina O., Yakovlev S. Optimization on polyhedral-spherical sets: Theory and applications. In: 2017 IEEE First Ukraine Conf. on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON). 2017. P. 1167–1174.
33. Yakovlev S. Convex extensions in combinatorial optimization and their applications. Optimization and Applications: P. Pardalos, S. Butenco, V. Shilo (Eds.). New York: Springer, 2017. P. 501–517.
34. Гуляницкий Л.Ф., Сергиенко И.В. Метаэвристический метод деформированного многогранника в комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2007. № 6. С. 70–79.
35. Гуляницкий Л.Ф. До формалізації та класифікації задач комбінаторної оптимізації. *Теорія оптимальних рішень.* 2008. № 7. С. 45–49.
36. Сергиенко И.В., Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Классификация прикладных методов комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2009. № 5. С. 71–83.
37. Гуляницкий Л.Ф., Сиренко С.И. Определение и исследование комбинаторных пространств. *Теорія оптимальних рішень.* 2010. № 9. С. 17–25.
38. Berge C. Principes de combinatoire. Paris: Dunod, 1968. 146 p.
39. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. Москва: Наука, 1975. 319 с.
40. Стоян Ю.Г., Гребенник И.В. Описание классов комбинаторных конфигураций на основе отображений. *Доклады НАН Украины.* 2008. № 10. С. 28–31.
41. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ, 2011. 328 с.
42. Сергиенко И.В., Шило В.П. Современные подходы к решению сложных задач дискретной оптимизации. *Проблемы управления и информатики.* 2016. № 1. С. 32–40.
43. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). Москва: Наука. Главная редакция физ.-мат. лит., 1981. 344 с.
44. Bona M. Combinatorics of permutations. Boca Raton, FL: Chapman Hall-CRC, 2012. 478 p.
45. Korsh J.F., LaFollette P.S. Loopless array generation of multiset permutations. *The Comp. Journ.* 2004. Vol. 47, N 5. P. 612–621.
46. Weisstein E.W. CRC concise encyclopedia of mathematics. Second edition. Boca Raton: CRC Press, 2002. 3242 p.
47. Brualdi R.A. Combinatorial matrix classes: T. Britz (Ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 544 p.
48. Kochenberger G., Hao J.-K., Glover F., Lewis M., Lu Z., Wang H., Wang Y. The unconstrained binary quadratic programming problem: a survey. *Journal of Combinatorial Optimization.* 2014. N 1. P. 58–81.
49. Bohn A., Faenza Y., Fiorini S., Fisikopoulos V., Macchia M., Pashkovich K. Enumeration of 2-level polytopes. Algorithms–ESA 2015 N. Bansal, I. Finocchi (Eds.). Berlin: Heidelberg: Springer, 2015. P. 191–202.
50. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и *r*-алгоритмы. Кишинэу: Эврика, 2014. 488 с.
51. Косолап А.И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации. Днепропетровск: Изд-во ПГАСА, 2015. 164 с.
52. Волошин А.Ф., Кудин В.И. Последовательный анализ вариантов в задачах исследования сложных систем. Киев: Изд. полиграф, центр «Киев, ун-т», 2015. 351 с.

Надійшла до редакції 10.05.2017

С.В. Яковлев, О.С. Пічугіна

ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПОЛІЕДРАЛЬНО-СФЕРИЧНИХ МНОЖИНАХ

Анотація. Розглянуто клас задач комбінаторної оптимізації на поліедрально-сферичних множинах. Узагальнено результати теорії опуклих продовжень на деякі класи функцій, що задані на сферично- та вершинно-розташованих множинах. Вихідна задача еквівалентно сформульована як задача математичного програмування з опуклими цільовою функцією та функціональними обмеженнями. Наведено чисельну ілюстрацію і можливі застосування отриманих результатів до розв'язання задач комбінаторної оптимізації.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, поліедрально-сферична множина, неперервне представлення, опукле продовження.

S.V. Yakovlev, O.S. Pichugina

PROPERTIES OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEMS OVER POLYHEDRAL-SPHERICAL SETS

Abstract. A class of combinatorial optimization problems over polyhedral-spherical sets is considered. The results of convex extensions theory are generalized to certain classes of functions defined on sphere-located and vertex-located sets. The original problem has been equivalently formulated as a mathematical programming problem with convex both objective function and functional constraints. A numerical illustration and possible applications of the results to solving combinatorial problems are given.

Keywords: combinatorial optimization problem, polyhedral-spherical set, continuous representation, convex extension.

Яковлев Сергей Всеволодович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Национального аэрокосмического университета им. М.Е. Жуковского «Харьковский авиационный университет», e-mail: svsyak7@gmail.com.

Пичугина Оксана Сергеевна,
кандидат физ.-мат. наук, докторант Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: pichugina_os@mail.ru.