УДК 519.6

В.Л. МАКАРОВ, И.И. ДЕМКИВ

АБСТРАКТНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ ТИПА ТИЛЕ

Аннотация. Построено и обосновано обобщение цепных дробей Тиле на случай интерполирования нелинейных операторов, действующих из линейного топологического пространства X в алгебру Y с единицей I. Показано, что важными частными случаями этого обобщения являются интерполяционные непрерывные дроби типа Тиле для векторных и матричных функций, а также для функционалов от нескольких переменных.

Ключевые слова: цепная дробь типа Тиле, интерполирование, нелинейный оператор, континуальные узлы.

ВВЕДЕНИЕ

Обобщение цепных дробей типа Тиле рассмотрено во многих публикациях (например, [1–8]). Эти исследования можно условно разделить на две группы: работы, связанные с обобщением на случай функций нескольких (как правило, двух) переменных [1–4, 6], и исследования дробей типа Тиле для векторных и матричных функций [2, 5]. Кроме того, получены результаты построения матричных интерполянтов двух независимых переменных [7].

В отличие от классических дробей Тиле все упомянутые выше дробные интерполянты имеют существенный недостаток — при замене последнего узла интерполирования на произвольный элемент из допустимого множества интерполянт не обращается в интерполируемую функцию (векторную или матричную). Заметим также, что задача построения векторного или матричного интерполянта эквивалентна традиционной задаче интерполирования, а значит, необходимость в таком построении должна быть обоснована в каждом конкретном случае приложения.

Цель данной работы — обобщение цепных дробей типа Тиле на случай интерполирования нелинейных операторов (действующих из линейного топологического пространства X в алгебру Y с единицей I), которая не имеет указанного выше недостатка. Отсюда, в частности, следует, что предложенное обобщение цепных дробей типа Тиле применимо для функций любого числа переменных без каких-либо геометрических ограничений на расположение интерполяционных узлов. Отметим также, что такое обобщение в качестве частных случаев содержит большинство известных в литературе результатов [9, 10]. Результаты работы были анонсированы в [11].

КОНСТРУКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ ТИПА ТИЛЕ

Вначале рассмотрим данное построение на примере двухэтажной дроби:

$$T_2(u) = F(u_0) + l_1(u-u_0)[I + l_2(u-u_1)]^{-1}, \tag{1}$$

где l_1, l_2 — линейные операторы, F — нелинейный оператор, действующий из линейного топологического пространства X в алгебру Y с единицей I, а элементы $u, u_0, u_1, u_2 \in X$.

Обозначим $F(u_{i-1,i}(\xi_i))$, $\xi_i \in [0;1]$, $i = 1, 2$, значения оператора F на множестве континуальных узлов

$$u_{i-1,i}(\xi_i) = u_{i-1} + g_{\xi_i}(u_i - u_{i-1}),\ \ \xi_i \in [0;1],\ \ i = 1, 2\,. \tag{2}$$

Здесь g_z — зависящий от параметра z линейный оператор, действующий в X и имеющий свойства:

$$g_0 = E,\ g_1 = O,\ g_\tau g_\xi = g_{\max \tau, \xi},\ \tau, \xi \in [0;1], \tag{3}$$

где E, O — соответственно тождественный и нулевой операторы, действующие в X.

Впервые континуальные интерполяционные узлы были введены в работах [7, 8]. Совокупность фиксированных элементов $u_0, u_1, u_2 \in X$ называется каркасом континуальных интерполяционных узлов (2).

Рассмотрим примеры операторов g_z со свойствами (3) (см. также [12, 13]).

Пример 1. Пусть $X = Q_{[0;1]}$ — пространство кусочно-непрерывных функций на отрезке [0, 1]. Тогда оператор g_z имеет вид

$$g_\tau (x(t)) = H(t-\tau)x(t),\ x(\cdot) \in Q_{[0;1]},$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, которая удовлетворяет условиям (3).

Пример 2. Пусть $X = H$ — гильбертово пространство, A — самосопряженный оператор, 0 и 1 — нижняя и верхняя границы его спектра соответственно. Тогда, согласно [12], оператору A соответствует семейство самосопряженных операторов

$$g_\tau = H(A - \tau I),\ 0 < \tau < 1,$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, удовлетворяющих условиям (3) и имеющих представление

$$g_\tau = \int_0^1 H(\lambda - \tau) dE_\lambda,$$

где E_λ — спектральная функция оператора A.

Линейные операторы l_1, l_2 задаются формулами

$$l_1(u - u_0) = -\int_0^1 F_1'(u_0 + g_{\tau_1}(u_1 - u_0)) dg_{\tau_1}(u - u_0),\ F_1(u) = F(u),$$

$$l_2(u - u_1) = -\int_0^1 F_2'(u_1 + g_{\tau_2}(u_2 - u_1)) dg_{\tau_2}(u - u_1), \tag{4}$$

$$F_2(u) = l_1(u - u_0)[F(u) - F(u_0)]^{-1}$$

и определяют разделенные разности первого порядка на множестве дважды дифференцируемых по Гато операторов, для которых существуют интегралы в (4) (см. [14, 15]).

Очевидно, что условие интерполирования $T_2(u_0) = F(u_0)$ выполнено. Покажем, что выполняются континуальные условия интерполирования

$$T_2(u_{1,2}(\xi_2)) = F(u_{1,2}(\xi_2)) \quad \forall \xi_2 \in [0;1]. \tag{5}$$

Подставляя $u_{1,2}(\xi_2)$ в (4) и учитывая свойства (3), имеем

$$l_1(u_1) = -F(u_0) + F(u_1),$$

$$l_2(u_{1,2}(\xi_2) - u_1) = -\int_0^1 F_2'(u_1 + g_{\tau_2}(u_2 - u_1)) dg_{\tau_2} g_{\xi_2}(u_2 - u_1) =$$

$$= -\int_{\xi_2}^1 F_2'(u_1 + g_{\tau_2}(u_2 - u_1)) dg_{\tau_2}(u_2 - u_1) =$$

$$-\int_{\xi_2}^1 \frac{d}{d\tau_2} F_2(u_1 + g_{\tau_2}(u_2 - u_1)) d\tau_2 = -F_2(u_1) + F_2(u_{1,2}(\xi_2)) =$$

$$= -l_1(u_1 - u_0)[F(u_1) - F(u_0)]^{-1} + l_1(u_{1,2}(\xi_2) - u_0)[F(u_{1,2}(\xi_2)) - F(u_0)]^{-1} =$$

$$= -I + l_1(u_{1,2}(\xi_2) - u_0)[F((u_{1,2}(\xi_2)) - F(u_0)]^{-1}.$$

Из последнего соотношения с учетом формулы (1) получаем равенство (5).

Отсюда следует, что формула (1) является абстрактной интерполяционной цепной дробью типа Тиле с континуальными узлами интерполирования $u_{1,2}(\xi_2)$ и обычным узлом u_0.

Прежде чем перейти к общему случаю, вычислим $T_2(u)$ при $u_2 = u$. Имеем

$$l_2(u-u_1) = -\int_0^1 F_2'(u_1 + g_{\tau_2}(u-u_1))d_{\tau_2} g_{\tau_2}(u-u_1) =$$

$$= -\int_0^1 \frac{d}{d\tau_2} F_2(u_1 + g_{\tau_2}(u-u_1))d\tau_2 = -F_2(u_1) + F_2(u) =$$

$$= -l_1(u_1-u_0)[F(u_1) - F(u_0)]^{-1} + l_1(u-u_0)[F(u) - F(u_0)]^{-1} =$$

$$= -I + l_1(u-u_0)[F(u) - F(u_0)]^{-1}.$$

Сделаем важное замечание, которое сформулируем в виде тождества $T_2(u)_{u_2=u} \equiv F(u)$ для всех u, для которых это тождество имеет смысл.

В общем случае n-этажной дроби имеем

$$T_n(u) =$$

$$= F(u_0) + l_1(u-u_0)[I + l_2(u-u_1)[I + l_3(u-u_2)\ldots[I + l_n(u-u_{n-1})]^{-1}\ldots]^{-1}]^{-1} =$$

$$\equiv \mathop{D}_{p=1}^{n} \frac{l_p(u-u_{p-1})}{I} \tag{6}$$

(последняя формула является символическим представлением дроби), где

$$l_k(u-u_{k-1}) = -\int_0^1 F_k'(u_{k-1} + g_{\tau_k}(u_k - u_{k-1}))dg_{\tau_k}(u-u_{k-1}),\ k = 1,\ldots,n,$$
$$F_1(u) = F(u), \tag{7}$$

$$F_i(u) = l_{i-1}(u-u_{i-2})[-I + l_{i-2}(u-u_{i-3})\ldots[l_1(u-u_0)[-I + l_0(u)]^{-1}]^{-1}\ldots]^{-1},$$
$$i = 1,2,\ldots,\ u_{-1} = 0,\ l_0(u) = -F(u_0) + F(u) + I. \tag{8}$$

Воспользуемся методом математической индукции для доказательства интерполяционного свойства дроби (6). Предположим, что

$$T_n(u_i) = T_i(u_i) = F(u_i),\ i = 0,1,\ldots 0,k, \tag{9}$$

и докажем равенство (9) при $i = k+1$. Имеем

$$l_{k+1}(u_{k+1} - u_k) = -\int_0^1 F_{k+1}'(u_k + g_{\tau_{k+1}}(u_{k+1} - u_k))dg_{\tau_{k+1}}(u_{k+1} - u_k) =$$

$$= F_{k+1}(u_{k+1}) - F_{k+1}(u_k) = \mathop{D}_{p=1}^{k+1} \frac{l_{k+1-p}(u_{k+1} - u_{k-p})}{-I} - \mathop{D}_{p=1}^{k+1} \frac{l_{k+1-p}(u_k - u_{k-p})}{-I} =$$

$$= \mathop{D}_{p=1}^{k+1} \frac{l_{k+1-p}(u_{k+1} - u_{k-p})}{-I} - l_k(u_k - u_{k-1})\left[-I + \mathop{D}_{p=2}^{k+1} \frac{l_{k+1-p}(u_k - u_{k-p})}{-I}\right]^{-1} =$$

$$= l_k(u_{k+1} - u_{k-1})\left[-I + \mathop{D}_{p=2}^{k+1} \frac{l_{k+1-p}(u_{k+1} - u_{k-p})}{-I}\right]^{-1} - I.$$

Тогда

$$I + l_k(u_{k+1} - u_{k-1})[I + l_{k+1}(u_{k+1} - u_k)]^{-1} =$$

$$= \overset{k+1}{\underset{p=2}{D}} \frac{l_{k+1-p}(u_{k+1} - u_{k-p})}{-I} = \overset{k}{\underset{p=1}{D}} \frac{l_{k-p}(u_{k+1} - u_{k-p-1})}{-I},$$

$$I + l_{k-1}(u_{k+1} - u_{k-2})[I + l_k(u_{k+1} - u_{k-1})[I + l_{k+1}(u_{k+1} - u_k)]^{-1}]^{-1} =$$

$$= \overset{k}{\underset{p=2}{D}} \frac{l_{k-p}(u_{k+1} - u_{k-p-1})}{-I} = \overset{k-1}{\underset{p=1}{D}} \frac{l_{k-p-1}(u_{k+1} - u_{k-p-2})}{-I}, \ \ldots,$$

$$I + l_2(u_{k+1} - u_1)\times$$

$$\times[\ldots[I + l_{k-1}(u_{k+1} - u_{k-2})[I + l_k(u_{k+1} - u_{k-1})[I + l_{k+1}(u_{k+1} - u_k)]^{-1}]^{-1}]^{-1}\ldots]^{-1} =$$

$$= l_1(u_{k+1} - u_0)[I + l_0(u_{k+1})]^{-1} = l_1(u_{k+1} - u_0)[F(u_{k+1}) - F(u_0)]^{-1},$$

откуда с учетом определения (6) следует соотношение

$$T_n(u_{k+1}) = T_{k+1}(u_{k+1}) = F(u_{k+1}), \ k = -1, 0, \ldots, n-1. \tag{10}$$

Аналогично доказывается выполнение континуального условия интерполирования

$$T_n(u_{n-1}(\xi)) = F(u_{n-1}(\xi)) \quad \forall \xi \in [0;1]. \tag{11}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $F(u)$ — n раз дифференцируемый по Гато оператор, и дробь (6) для него имеет смысл. Тогда формула (6) определяет абстрактную интерполяционную цепную дробь типа Тиле, которая удовлетворяет интерполяционному условию (10) и континуальному интерполяционному условию (11).

Замечание. Поскольку абстрактная интерполяционная цепная дробь типа Тиле (6) удовлетворяет только одному континуальному интерполяционному условию (11), ее построение можно упростить, заменяя оператор g_τ на оператор $(1-\tau)I$. Условие (10) также выполняется.

Имеет место обобщение на абстрактном уровне представления функции комплексной переменной в виде дроби Тиле, приведенное в [20, формула (23)], которое сформулируем в следующем утверждении.

Теорема 2. Пусть оператор удовлетворяет условиям теоремы 1, тогда имеет место такое тождество

$$T_n(u)_{u_n=u} = F(u), \tag{12}$$

для всех u, для которых эта формула имеет смысл.

Доказательство осуществляется так же, как в случае $T_2(u)_{u_2=u}$.

Формула (12) играет важную роль при оценке погрешности интерполяции в случае применения абстрактной дроби типа Тиле (6)–(8) в конкретных ситуациях. Свойствами (12) не обладает ни одно из обобщений дробей Тиле на векторнозначный и матричнозначный случаи, которые используют так называемое обращение векторов по Самельсону (Samelson).

Рассмотрим два важных частных случая, вытекающих из общего построения.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ДРОБЬ ТИПА ТИЛЕ ДЛЯ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ

Будем рассматривать только матричнозначную интерполяцию типа Тиле, хотя в литературе уделялось внимание как векторнозначной, так и матричнозначной интерполяциям. Векторный случай изучен многими авторами (см., например, [1, 4, 16, 17] и упомянутые там ссылки). В большинстве публикаций применяется так называемое обращение векторов по Самельсону как частный случай общей процедуры псевдообращения матрицы полного ранга (см., например, утверждение 6.46 в [18]). Тот же подход применяется в случае матричного интерполирования типа Тиле, при котором матрицы предварительно преобразуются в векторы (например, [5, 9, 19]).

Пусть Y — алгебра $m\times m$-матриц, $I = E$ — единичная матрица. Тогда формулы (6)–(8) принимают вид

$$l_k(u-u_{k-1}) = -\frac{(u-u_{k-1})}{(u_k-u_{k-1})}[F_k(u_{k-1})-F_k(u_k)],\ k=1,2,\ldots,n,$$

$$F_1(u)=F(u),$$

$$F_i(u)=$$

$$=l_{i-1}(u-u_{i-2})[-E+l_{i-2}(u-u_{i-3})[-E+l_{i-3}(u-u_{i-4})[\ldots-E-l_0(u)\ldots]^{-1}]^{-1}]^{-1},$$

$$i=1,2,\ldots,\ u_{-1}=0,$$

$$l_0(u)=F(u_0)-F(u)-E.$$

Рассмотрим пример.

Пример 3. Пусть заданы матричные интерполяционные условия

$$F(u_0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix},\ F(u_1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & i\end{bmatrix},\ F(u_2)=\begin{bmatrix}0 & i\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$u_0=-1,\ u_1=0,\ u_2=1.$$

Тогда

$$T_2(u)=\frac{1}{z^2-6z-3}\begin{bmatrix}-3-4z+7z^2 & -4i(z+1)z\\ -(z+1)(z+3) & i(-3+2z+z^2)\end{bmatrix},$$

что совпадает с результатом примера 2.8 в работе [9].

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ДРОБЬ ТИПА ТИЛЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $X=\mathbb{R}^k$, Y — пространство $m\times m$-матриц, элементами которых являются функционалы от k переменных. Гладкость и область определения функционалов предполагаются такими, чтобы все используемые ниже формулы имели смысл. Положим

$$F(u)=[f_{i,j}\cdot\underbrace{(x(\cdot),\ y(\cdot),\ldots,\ w(\cdot))}_{k\ \text{переменных}}]_{i,\,j=1,\ldots,m}$$

и определим значения $F(u_{s-1,s}(\tau))$, $s=1,2,\ldots,n$, этого матричного функционала на множестве континуальных узлов

$$u=u_{s-1,s}(\tau)=(x_{s-1}(t)+\tau(x_s(t)-x_{s-1}(t)),\ y_{s-1}(t)+\tau(y_s(t)-y_{s-1}(t)),\ldots,$$

$$\ldots,w_{s-1}(t)+\tau(w_s(t)-w_{s-1}(t)))^T,\ \tau\in[0,1],$$

Формулы (7), (8) принимают вид

$$l_r(u-u_{r-1})=\int_0^1 F'_r(u_{r-1,r}(\tau_r))(u-u_{r-1})d\tau_r=$$

$$=\int_0^1 F'_r(u_{r-1}+\tau_r(u_r-u_{r-1}))(u-u_{r-1})d\tau_r,\ r=1,2,\ldots,n,$$

$$F_1(u)=F(u),$$

$$F'_r(u_{r-1,r}(\tau_r))(u-u_{r-1})=\left[\frac{\partial}{\partial x}f_{i,j}(u_{r-1,r}(\tau_r))\right]_{i,\,j=1,2,\ldots,m}(x(\cdot)-x_{r-1}(\cdot))+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial y} f_{i,j}(u_{r-1,r}(\tau_r))\right]_{i,j=1,2,\ldots,m} (y(\cdot)-y_{r-1}(\cdot))+\ldots+$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial w} f_{i,j}(u_{r-1,r}(\tau_r))\right]_{i,j=1,2,\ldots,m} (w(\cdot)-w_{r-1}(\cdot)),$$

$$F_i(u) \equiv \mathop{D}_{p=1}^{i} \frac{l_{i-p}(u-u_{i-p-1})}{-I}, \quad i=1,2,\ldots,$$

$$u_{-1}=0, \quad l_0(u)=F(u_0)-F(u)-I .$$

Пример 4. Пусть $X=R^2$ и

$$F(u)=[f_{i,j}(x,y)]_{i,j=1,2}=\begin{bmatrix} x, & 1+y \\ yx, & x^2+y^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда при таких интерполяционных узлах

$$u_0=(0.5,1), \quad u_1=(1,\ 2), \quad u_2=(1.5,1)$$

будем иметь

$$F(u_0+t(u_1-u_0))=[f_{i,j}(0.5+0.5t, 1+t)]_{i,j=0,1},$$

$$l_1(u-u_0)=\begin{bmatrix} x-0.5, & y-1 \\ 1.5(x-1)+0.75y, & 1.5x-3.75+3y \end{bmatrix},$$

$$l_2(u-u_1)=\int_0^1 F_2'(u_1+\tau_2(u_2-u_1))(u-u_1)d\tau_2,$$

$$F_2(u)=l_1(u)[F(u)-F(u_0)]^{-1}=$$

$$=\Delta^{-1}(x,y)\begin{bmatrix} x-0.5, & y-1 \\ 1.5(x-1)+0.75y, & 1.5x-3.75+3y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2-y^2-1.25, & y-1 \\ yx-0.5, & x-0.5 \end{bmatrix}=$$

$$=\Delta^{-1}(x,y)[f2_{i,j}(x,y)]_{i,j=1,2},$$

$$f2_{1,1}(x,y)=(x-0.5)(x^2+y^2-1.25)-(y-1)(yx-0.5),$$

$$f2_{1,2}(x,y)=0,$$

$$f2_{2,1}(x,y)=(1.5(x-1)+0.75y)(x^2+y^2-1.25)-(1.5x-3.75+3y)(yx-0.5),$$

$$f2_{2,2}(x,y)=(1.5x-3.75+3y)(x-0.5)-(1.5(x-1)+0.75y)(y-1),$$

$$\Delta(x,y)=x^3-1.25x-0.5x^2-0.5y^2+0.125+0.5y+xy,$$

$$l_2(u-u_1)=\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ l2_{2,1} & l2_{2,2} \end{bmatrix},$$

$$l2_{2,1}=\frac{(0.352x+0.797-0.574y)}{dl2}, \quad l2_{2,1}=\frac{1}{dl2}, \quad dl2=0.384x-1.267-0.058y.$$

В результате получаем

$$T_2(x,y)=\begin{bmatrix} x, & 1+y \\ t2_{2,1}(x,y), & t2_{2,2}(x,y) \end{bmatrix},$$

$$t2_{2,1}(x,\ y)=0.5+\frac{(0.352x+0.797-0.574\,y)(x-0.5)-1.5(x-1+0.5\,y)}{dt2},$$

$$t2_{2,2}(x,\ y)=1.25+\frac{(0.352x+0.797-0.574\,y)(\,y-1)-1.5(x-2.5+2\,y)}{dt2},$$

$$dt2=0.384x-1.267-0.058\,y.$$

Пример 5. Рассмотрим пример 3.6 из работы [10]. Пусть $X=R^2$ и

$$F(u)=[f_{i,\,j}(x,\ y)]_{i,\,j=1,\,2}=\begin{bmatrix}\sin(x+y), & \cos(x+y)\\ x^2, & 1/(1+y)\end{bmatrix}.$$

Для матрицы A введем следующую норму $\|A\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a|_{i,\,j}^2$.

Выберем следующие интерполяционные узлы

$u_0=(0{,}0),\ \ u_1=(0.03,0.03),\ \ u_2=(0.06{,}0.06)$.

Построим дробь типа Тиле $T_2(x,\ y)$. Результаты вычислений занесем в табл. 1.

Таблица 1

(x,y)	$\|T_2(x,\ y)-F(u)\|$
(0.06, 0.06)	0
(0.05, 0.05)	4.253e-5
(0.04, 0.04)	3.447e-5
(0.03, 0.03)	0
(0.02, 0.02)	3.541e-5
(0.01, 0.01)	4.488e-5
(0.0, 0.0)	0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены результаты, относящиеся к построению и обоснованию обобщения цепных дробей Тиле на случай интерполирования нелинейных операторов, действующих из линейного топологического пространства X в алгебру Y с единицей I. Эти результаты являются естественным продолжением исследований, опубликованных в работах [7, 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levrie P., Bultheel A. A note on Thiele *n*-fractions. *Numerical Algorithms*. 1993. Vol. 4, N 2. P. 225–239.
2. Tan J., Fang Y. Newton–Thiele's rational interpolants. *Numerical Algorithms*. 2000. Vol. 24, N 1. P. 141–157.
3. Gensane Th. Interpolation on the hypersphere with Thiele type rational interpolants. *Numerical Algorithms.* 2012. Vol. 60, N 3. P. 523–529.
4. Graves-Morris P.R. Vector Valued rational interpolants *I. Numerische Mathematik.* 1983. Vol. 42, N 3. P. 331–348.
5. Chuanqing Gu. Thiele-type and Lagrange-type generalized inverse rational interpolation for rectangular complex matrices. *Linear Algebra and Its Applications*. 1999. Vol. 295, N 1–3. P 7–30.
6. Кучмінська Х.Й. Двовимірні неперервні дроби. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, 2010. 217 с.
7. Макаров В.Л., Демків І.І. Інтегральний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле. *Доп. НАН України.* 2016. № 1. С. 12–18.
8. Макаров В.Л., Демків І.І. Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, № 4, С. 44–50.
9. Chuanqing Gu. Generalized inverse matrix Pade approximation on the basis of scalar products. *Linear Algebra and Its Applications.* 2001. Vol. 322. P. 141–167.
10. Rongrong Cui, Chuanqing Gu. Bivariate generalized inverse Newton–Thiele type matrix Pade' approximation. *Applied Mathematics and Computation.* 2014. Vol. 236. P. 202–214.
11. Makarov V.L., Demkiv I.I. Abstract interpolation Thiele type fraction. 2015. P. 1–10. URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1511/1511.06877.pdf.

12. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Москва: Наука, 1966. 534 с.

13. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Демків І.І. Про континуальні вузли інтерполяції формул типу Ньютона та Ерміта в лінійних топологічних просторах. *Доп. НАН України.* 2007. № 12. С. 22–27.

14. Янович Л.А. Приближенное вычисление континуальных интегралов по гауссовым мерам. Минск: Наука и техника, 1976. 384 с.

15. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.

16. Xiaolin Zhu, Gongqin Zhu. A note on vector-valued rational interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006. Vol. 195. P. 341–350.

17. Van Barel M., Bultheel A. A new approach to the rational interpolation problem: the vector case. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1990. Vol. 33, N 3. P. 331–346.

18. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. Москва: Наука, 1984. 320 с.

19. Gong-Qin Zhu, Jie-Qing Tan. A note on matrix-valued rational interpolants. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 1999. Vol. 10, N 1. P. 129–140.

20. Jones W.B., Thron W.J. Continued fractions. Analytic theory and applications. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. 414 p.

Надійшла до редакції 06.07.2017

В.Л. Макаров, І.І. Демків

АБСТРАКТНЕ ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ТИПУ ТІЛЕ

Анотація. Побудовано й обґрунтовано узагальнення ланцюгових дробів типу Тіле на випадок інтерполювання нелінійних операторів, що діють з лінійного топологічного простору X в алгебру Y з одиницею I. Показано, що важливими окремими випадками такого узагальнення є інтерполяційні ланцюгові дроби типу Тіле для векторних і матричних функцій та для функціоналів від декількох змінних.

Ключові слова: неперервний дріб типу Тіле, інтерполяція, нелінійний оператор, континуальні вузли.

V.L. Makarov, I.I. Demkiv

ABSTRACT INTERPOLATION BY MEANS OF CONTINUED THIELE-TYPE FRACTIONS

Abstract. We obtain and substantiate the generalization of continued Thiele-type fractions for the interpolation of nonlinear operators acting from a linear topological space X into an algebra Y with a unit I. We show that the interpolation continued Thiele-type fractions for vector-valued and matrix-valued functions and those for functionals of many variables can be deduced from such a generalization as its important special cases.

Keywords: continued Thiele-type fraction, interpolation, nonlinear operator, continual nods.

Макаров Владимир Леонидович,
академик НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института математики НАН Украины, Киев, e-mail: makarovimath@gmail.com.

Демкив Игорь Иванович,
доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры Института прикладной математики и фундаментальных наук Национального университета «Львівська політехніка», Львов, e-mail: ihor.demkiv@gmail.com.