УДК 519.713.4

И.К. РЫСЦОВ

АФФИННЫЕ АВТОМАТЫ И КЛАССИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Аннотация. В работе выявлена связь между фрактальной геометрией и теорией автоматов. Показано, что по крайней мере классические фракталы являются аттракторами сжимающих аффинных автоматов, а также что символьное пространство сжимающего аффинного автомата непрерывно отображается на его аттрактор.

Ключевые слова: аффинные автоматы, фракталы, аттракторы.

ВВЕДЕНИЕ

Основатель фрактальной геометрии Б. Мандельброт [1] в дополнение к книге [2] отметил, что в своих исследованиях опирался на работы Г. Кантора, Ф. Хаусдорфа, В. Серпинского и многих других математиков. Б. Мандельброт ввел понятие фрактала, т.е. геометрической фигуры, которую можно считать антиподом гладкой фигуры. Многие фракталы обладают свойством самоподобия, т.е. являются множествами точек, инвариантными относительно некоторых преобразований подобия. Если раньше конструкции подобных множеств, построенных Г. Кантором и В. Серпинским, казались многим математикам «монстрами» или исключениями из общего правила, то с появлением фракталов ситуация коренным образом изменилась. Оказалось, что многим природным формам свойственна именно фрактальность, а не гладкость [1].

Б. Мандельброт также отметил тесную связь фрактальной геометрии с динамическими системами, а именно многие фракталы являются предельными объектами (аттракторами) некоторых динамических процессов. Б. Мандельброт в продолжении работ Жюлиа и Фату занимался теорией итераций квадратичных отображений на комплексной плоскости и построил множество, которое впоследствии получило его имя [2].

Цель настоящей статьи — установление связи между фрактальной геометрией и теорией автоматов. На первый взгляд, такая связь представляется необычной, однако автоматы являются типичными представителями дискретных динамических систем и, следовательно, могут иметь аттракторы. Здесь мы ограничимся рассмотрением аффинных автоматов, которых оказывается достаточно для построения классических фракталов. Отметим, что аффинные преобразования уже использовались для построения фракталов под названием «системы итерированных функций» [3]. Автоматы позволяют не только избежать использования этой некорректной терминологии (поскольку любую систему функций можно итерировать), но имеют явные методические преимущества перед этим подходом и представляют теоретическую основу для построения фракталов в виде дискретной динамической системы.

1. АФФИННЫЕ АВТОМАТЫ

Отметим, что евклидовым пространством называется конечномерное линейное векторное пространство R^q, где R — поле действительных чисел, снабженное евклидовой метрикой, т.е. между любыми двумя векторами $s=(s_1, \ldots, s_q)$ и $t=(t_1, \ldots, t_q)$ определено расстояние:

$$\|s-t\|=\sqrt{(s_1-t_1)^2+\ldots+(s_q-t_q)^2}.$$

Аффинным автоматом (над полем R) называется тройка $A=(R^q, X, f)$, где R^q — евклидово пространство состояний размерности q; X — конечный входной алфавит; f — функция переходов, которая имеет вид

$$f(s,x)=s\cdot M(x)+v(x), \tag{1}$$

где состояние (вектор-строка) s умножается на квадратную матрицу $M(x)$ размера $q\times q$ и прибавляется вектор смещения $v(x)$. В этом случае число q называется размерностью автомата A, а сам автомат называется q-мерным.

Матрицы $M(x)$, $x\in X$, и векторы смещения $v(x)$ считаются заданными и тем самым определяют функцию переходов (1), а их обозначение свидетельствует о зависимости их от входных символов, т.е. что они являются, по сути, функциями.

Функция переходов аффинного автомата продолжается на входные слова (входные последовательности) $w=x_1\ldots x_n$ следующим образом:

$$f(s,w)=s\cdot M(w)+v(w),$$

где $M(w)=M(x_1)\cdot\ldots\cdot M(x_n)$, а вектор смещения $v(w)$ определяется следующей формулой, которая доказывается индукцией по длине слова w:

$$v(w)=\sum_{i=1}^{n-1}v(x_i)\cdot M(x_{i+1})\cdot\ldots\cdot M(x_n)+v(x_n).$$

В дальнейшем нас будет интересовать специальный класс аффинных автоматов. Аффинный автомат A можно задать набором аффинных преобразований $f_x\colon R^q\to R^q$, $f_x(s)=f(s,x)$. Аффинное преобразование $f_x\colon R^q\to R^q$ называется преобразованием подобия, если оно является композицией ортогонального преобразования, гомотетии с положительным числом r и сдвига:

$$f_x(s)=r\cdot s\cdot P(x)+v(x), \tag{2}$$

где $P(x)$ — ортогональная матрица.

Определение 1. Аффинный автомат A назовем сжимающим, если все преобразования $\{f_x| \, x\in X\}$ являются преобразованиями подобия и выполняется условие $r<1$. В этом случае число r назовем коэффициентом сжатия.

Отметим, что преобразование в метрическом пространстве называется сжимающим, если оно удовлетворяет условию Липшица с константой, меньшей единицы. Поскольку ортогональное преобразование сохраняет евклидово расстояние между векторами, то из условия (2) получаем следующие равенства для всех s, t и x:

$$\| f_x(s)-f_x(t)\| = r\cdot\| s-t\|. \tag{3}$$

Следовательно, в сжимающем аффинном автомате A все преобразования подобия f_x являются сжимающими в евклидовом пространстве.

2. АВТОМАТНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Обозначим X^+ множество всех непустых входных слов автомата, а X^n — множество входных слов длины n. Тогда выполняется равенство

$$X^+=\bigcup_{n=1}^{\infty}X^n.$$

Отметим, что подмножество $S\subseteq R^q$ называется ограниченным, если его можно поместить внутрь шара конечного радиуса. В евклидовом пространстве R^q непустое замкнутое и ограниченное подмножество является компактным подмножеством (компактом) и наоборот. Для компакта $S\subset R^q$ и любого числа $n\ge 1$ положим по определению

$$f(S,X^n)=\{f(s,w)\,|\, s\in S,\, w\in X^n\}.$$

Определение 2. Преобразованием (оператором) Хатчинсона компактного подмножества $S\subset R^q$ в автомате A назовем подмножество состояний $f(S,X)$ и обозначим его $F(S)$:

$$F(S)=f(S,X)=\bigcup_{x\in X}f_x(S).$$

Компактное подмножество $S \subset R^q$ называется инвариантным для автомата A, если $F(S) = S$.

Оператор F отображает компакты в компакты и поэтому его можно применять многократно (итерировать). Пусть S_0 — компактное подмножество начальных состояний автомата, тогда рассмотрим следующую последовательность подмножеств:

$$S_n = F(S_{n-1}) = F^{(n)}(S_0) = f(S_0, X^n), \;\; n \geq 1. \tag{4}$$

Здесь $F^{(n)}$ — n-кратная итерация оператора F.

Известно, что множество всех компактов евклидова пространства R^q, которое обозначим $C(R^q)$, образует метрическое пространство относительно метрики Хаусдорфа [3]. Поэтому можно говорить о сходимости последовательности (4) относительно этой метрики. Для произвольного аффинного автомата A этот предел может не существовать, однако для сжимающих аффиных автоматов он не только существует, но и не зависит от начального подмножества S_0, т.е. является аттрактором (притягивающим множеством). Следующая теорема была доказана в другой терминологии в работе Хатчинсона [4].

Теорема 1. Любой сжимающий аффинный автомат A имеет аттрактор $L(A)$, который является единственным компактным инвариантным подмножеством состояний этого автомата.

Непосредственное доказательство этой теоремы достаточно сложное [4]. Однако оказывается, что это утверждение тесно связано с известным из функционального анализа принципом сжимающих отображений, который состоит в следующем [5].

Теорема 2. Любое сжимающее отображение $F: V \to V$ в полном метрическом пространстве (V, d) имеет единственную неподвижную точку, которая является аттрактором этого отображения.

Эта теорема применима и к таким бесконечномерным пространствам, как $C(R^q)$; но чтобы свести теорему 1 к теореме 2, необходимо рассмотреть некоторые свойства метрики Хаусдорфа.

3. СВОЙСТВА МЕТРИКИ ХАУСДОРФА

Определим расстояние между точкой (вектором) $s \in R^q$ и подмножеством $T \subseteq R^q$:

$$d(s, T) = \inf\{\| s - t \| \mid t \in T\}. \tag{5}$$

Заметим, что если T является компактом, нижнюю грань в формуле (5) можно заменить минимумом, поскольку она достигается на компактном множестве. Определим теперь левое расстояние между двумя компактами S и T евклидова пространства:

$$d(S, T) = \max\{ d(s, T) \mid s \in S\}.$$

Это расстояние еще не является метрикой, поскольку из условия $d(S, T) = 0$, например, вытекает лишь включение $S \subseteq T$. Нетрудно видеть, что левое расстояние между компактами удовлетворяет следующему неравенству:

$$d(S_1 \cup S_2, T) \leq \max\{d(S_1, T), d(S_2, T)\}. \tag{6}$$

Определение 3. Метрикой (расстоянием) Хаусдорфа между двумя компактами S и T называется следующее число:

$$h(S, T) = \max\{d(S, T), d(T, S)\}.$$

Нетрудно проверить, что это действительно метрика, но доказательство неравенства треугольника требует определенных усилий [3]. Из условия (6) получаем неравенство для метрики Хаусдорфа

$$h(S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2) \leq \max\{h(S_1, T_1), h(S_2, T_2)\}. \tag{7}$$

Действительно, пусть $h(S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2) = d(S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2)$ (в симметричном случае доказательство аналогично). Тогда из условия (6) вытекает неравенство

$$d(S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2) \le \max\{d(S_1, T_1 \cup T_2), d(S_2, T_1 \cup T_2)\}.$$

Далее заметим, что $d(S_1, T_1 \cup T_2) \le d(S_1, T_1)$, поскольку для любого элемента s из S_1 выполняется условие $d(s, T_1 \cup T_2) \le d(s, T_1)$. По аналогичным причинам выполняется условие $d(S_2, T_1 \cup T_2) \le d(S_2, T_2)$. Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает свойство (7).

Отметим также, что неравенство (7) с помощью индукции легко обобщается на любое конечное число компактов S_i, T_i, $1 \le i \le k$:

$$h(S_1 \cup \ldots \cup S_k, T_1 \cup \ldots \cup T_k) \le \{\max h(S_i, T_i) \mid 1 \le i \le k\}. \quad (8)$$

Метрику Хаусдорфа можно также определить с помощью «расширений» подмножеств. Обозначим $B(s, \delta)$ замкнутый шар в пространстве R^q радиуса $\delta > 0$ с центром в точке s. Под векторной суммой $S + T$ двух подмножеств S и T пространства R^q понимается подмножество $S + T = \{s + t \mid s \in S, t \in T\}$. Назовем δ-расширением (δ-окрестностью или δ-дилатацией) подмножества S сумму $S_\delta = S + B(0, \delta)$. Из определения следует, что δ-расширение является объединением замкнутых шаров $B(s, \delta)$ с центрами в точках подмножества S. Отсюда непосредственно получается следующее утверждение [3, теорема A.3.8].

Предложение 1. Пусть S и T — компакты пространства R^q, а $\delta > 0$; тогда выполняется следующее условие:

$$h(S, T) \le \delta \leftrightarrow (S \subseteq T_\delta \text{ и } T \subseteq S_\delta).$$

Из предложения 1 следует, что метрику Хаусдорфа можно также определить формулой $h(S, T) = \inf\{\delta \mid S \subseteq T_\delta, T \subseteq S_\delta\}$. Приступим теперь к доказательству основной леммы, которая позволяет распространять сжимающие отображения на пространство $C(R^q)$.

Лемма 1. Пусть $f_1 : R^q \to R^q$ — аффинное преобразование подобия $f_1(s) = r \cdot p_1(s) + v_1$, где p_1 — линейный ортогональный оператор на R^q и $v_1 \in R^q$, тогда для любых компактов S и T из R^q выполняется неравенство

$$h(f_1(S), f_1(T)) \le r \cdot h(S, T).$$

Доказательство. Положим $\delta = h(S, T)$, тогда из предложения 1 вытекают включения $f_1(S) \subseteq f_1(T_\delta)$ и $f_1(T) \subseteq f_1(S_\delta)$. Далее, пользуясь подобием преобразования f_1, получаем следующие равенства:

$$f_1(S_\delta) = r \cdot p_1(S + B(0, \delta)) + v_1 = f_1(S) + r \cdot B(0, \delta). \quad (9)$$

Здесь мы воспользовались линейностью оператора p_1, поэтому $p_1(S + B(0, \delta)) = p_1(S) + p_1(B(0, \delta))$, и его ортогональностью, из которой следует инвариантность шара $p_1(B(0, \delta)) = B(0, \delta)$. Из условия (9) заключаем, что $f_1(T) \subseteq f_1(S) + B(0, r \cdot \delta)$. Аналогично доказывается, что $f_1(S) \subseteq f_1(T) + B(0, r \cdot \delta)$. Отсюда и из предложения 1 заключаем, что выполняется неравенство $h(f_1(S), f_1(T)) \le r \cdot \delta$, где $\delta = h(S, T)$. Таким образом, лемма доказана. □

Теперь возвратимся к доказательству основной теоремы.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — сжимающий аффинный автомат с коэффициентом сжатия $r < 1$. Покажем, что его оператор Хатчинсона F является сжимающим отображением в метрическом пространстве $(C(R^q), h)$. Пусть S и T — произвольные компакты из R^q, тогда из определения 2 и неравенства (8) имеем неравенство

$$h(F(S), F(T)) = h\left(\bigcup_{x \in X} f_x(S), \bigcup_{x \in X} f_x(T)\right) \le \max\{h(f_x(S), f_x(T)) \mid x \in X\}. \quad (10)$$

Поскольку все f_x по условию являются преобразованиями подобия, то из леммы 1 следует, что $h(f_x(S), f_x(T)) \le r \cdot h(S, T)$ для всех $x \in X$. Отсюда и из условия (10) заключаем, что $h(F(S), F(T)) \le r \cdot h(S, T)$; значит, оператор F является сжимающим в пространстве $C(R^q)$.

Далее, пространство $C(R^q)$ является полным по отношению к метрике Хаусдорфа [3, теорема А.3.9]. Поэтому к сжимающему оператору F можно применить теорему 2. Следовательно, он имеет единственную неподвижную точку L в этом пространстве, которая является его аттрактором. Отсюда вытекает, что последовательность (4) будет сходиться к аттрактору L независимо от начального подмножества. Таким образом, теорема 1 доказана. □

В большинстве случаев аттрактор аффинного автомата является фракталом, поэтому остановимся более подробно на этом понятии.

4. КЛАССИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ

Б. Мандельброт назвал фракталом геометрическую фигуру, которая имеет дробную размерность Хаусдорфа [1]. Отсюда и возникло слово «фрактал» (от латинского fractus — дробный). Точнее, фракталом называется подмножество евклидова пространства, размерность Хаусдорфа которого больше его топологической размерности. Это определение мало о чем говорит нашей интуиции, поскольку трудно представить себе кривую, имеющую, например, размерность 1,5. Однако фракталы имеют и другие свойства, которые делают их более наглядными.

Большинство фракталов являются самоподобными фигурами, т.е. состоят из нескольких уменьшенных копий самих себя. Отметим, что аттрактор аффинного автомата является самоподобным (аффинно-подобным) подмножеством, поскольку согласно теореме 1 он инвариантен относительно оператора F и, следовательно, согласно определению 2 состоит из нескольких аффинных копий самого себя.

Как видно из определения, важной характеристикой фрактала является его геометрическая размерность. К сожалению, здесь существует много разновидностей размерности (Минковского, Хаусдорфа и т.д.), которые иногда не совпадают между собой. Поэтому рассмотрим наиболее простую из них — размерность подобия, которая для аттракторов аффинных автоматов совпадает с размерностью Хаусдорфа [4].

Пусть задан сжимающий аффинный автомат $A = (R^q, X, f)$ с коэффициентом сжатия $r < 1$ и пусть $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда согласно определению 2 аттрактор $L(A)$ будет состоять из k аффинных копий самого себя, уменьшенных в r раз. Поэтому геометрической размерностью аттрактора $L(A)$ назовем единственное положительное вещественное решение d уравнения $k \cdot r^d = 1$. Единственность решения здесь очевидна, поскольку размерность можно явно выразить из этого уравнения через k и r:

$$d = \frac{\log(k)}{\log(1/r)}. \tag{11}$$

Логарифм здесь можно определить по любому положительному основанию, большему единицы, например по основанию 2.

Эту размерность Мандельброт назвал размерностью подобия (или самоподобия). Для многих фракталов размерность, вычисленная по формуле (11), оказывается дробным числом, поэтому дробная размерность фрактала является в некотором смысле следствием его самоподобия. Проиллюстрируем введенные понятия на примере классических фракталов.

4.1. Негладкие функции. Исторически первым фракталом была, по-видимому, функция, не имеющая производной, построенная в 1872 г. немецким математиком К. Вейерштрассом в качестве контрпримера к гипотезе Ампера. Эта функция задается на единичном интервале $0 \le x \le 1$ следующим бесконечным рядом:

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \tag{12}$$

где вещественные числа a и b удовлетворяют неравенствам $0< a<1< b$. Этот функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым рядом, поэтому функция $W(x)$ определена и непрерывна при всех x. К. Вейерштрасс доказал, что при выполнении условия $a\cdot b>3\pi/2+1$ функция $W(x)$ не дифференцируема ни в одной точке. Позднее Г. Харди усилил это неравенство и доказал, что уже при условии $a\cdot b\geq 1$ функция $W(x)$ не дифференцируема. Поэтому в формуле (12) можно положить $a=1/2$, $b=2$ и рассмотреть следующий ряд:

$$W_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2^n\pi x)/2^n. \tag{13}$$

Члены этого ряда нетрудно построить с помощью двумерного сжимающего аффинного автомата $A_W=(R^2, X, f)$, где $X=\{0,1\}$ и функция переходов определяется формулой $f(s,x)=s\cdot E/2+(x/2,0)$, здесь E — единичная матрица второго порядка. Назовем автомат A_W автоматом Вейерштрасса и заметим, что коэффициент сжатия здесь равен 1/2. Подмножеством начальных состояний можно считать график первой косинусоиды $S_1=\{(x,\cos(2\pi x)/2)\mid 0\leq x\leq 1\}$. Тогда оператор Хатчинсона $F(S_1)=S_1/2\cup(S_1/2+(1/2,0))$ преобразует ее в график второй косинусоиды S_2 и т.д. Отметим, что все косинусоиды из ряда (13) имеют одинаковые длины и равномерно сходятся к нулю. Значит, пределом в данном случае будет график нулевой функции, т.е. единичный интервал, размерность которого, естественно, равна единице.

Возможно, недифференцируемость результирующей функции была бы более наглядной, если в качестве первого члена ряда взять любую пилообразную функцию, например $W_1(x)=2x$ при $0\leq x\leq 1/2$ и $W_1(x)=2-2x$ при $1/2\leq x\leq 1$. Применив затем к графику этой функции автомат Вейерштрасса, получим последовательность «ежиков», сумма которых снова будет не дифференцируемой. Однако пример Вейерштрасса интересен тем, что все члены ряда (13) являются дифференцируемыми.

4.2. Множество Кантора. Следующий фрактал был построен немецким математиком Г. Кантором в виде точечного множества с парадоксальными свойствами, которое теперь считается классическим примером дисконтинуума, т.е. разрывного континуума. Мандельброт образно назвал его «пылью» Кантора. Поскольку это множество описано во многих учебниках, то рассмотрим аффинный автомат, который строит множество Кантора.

Автоматом Кантора $A_C=(R, X, f)$ назовем одномерный сжимающий аффинный автомат, у которого $X=\{0,1\}$ и функция переходов определяется формулой $f(s,x)=s/3+2x/3$. При подаче входного слова $w=x_1\ldots x_n$ автомат A_C из состояния s переходит в следующее состояние:

$$f(s, w)=\frac{2x_n}{3}+\frac{2x_{n-1}}{3^2}+\ldots+\frac{2x_1}{3^n}+\frac{s}{3^n}.$$

Отсюда следует, что в аттрактор $L(A_C)$ этого автомата, называемый множеством Кантора, будут попадать числа из единичного интервала $[0,1]$, в троичной записи которых нет единицы. Из формулы (11) следует, что размерность подобия аттрактора $L(A_C)$ равна $d=(\log_2 3)^{-1}=\log_3 2\approx 0{,}6309$, поскольку в данном случае $k=2$ и $r=1/3$.

С точки зрения топологии множество Кантора является компактным, совершенным (нет изолированных точек) и вполне несвязным множеством (все компоненты связности одноточечные), которое имеет континуальную мощность, нулевую меру Лебега и нулевую топологическую размерность. При построении этого множества можно было бы делить интервал на десять равных частей и удалять, например, каждый восьмой из полученных интервалов. В результате мы получили бы эквивалентное с топологической точки зрения множество, однако его размерность подобия была бы равна $\log_2 9/\log_2 10\approx 0{,}9542$. Таким образом, геометрическая размерность связана с метрикой и поэтому не является топологическим инвариантом. В связи с этим одной из задач фрактальной геометрии является исследование преобразований, сохраняющих фрактальную размерность [6].

4.3. Кривая Коха. В статье, опубликованной в начале XX в., шведский математик Х. Кох попытался повторить результат Вейерштрасса с помощью геометрических методов и построил кривую, которая ни в одной точке не имеет касательной. Процесс построения начинается с единичного горизонтального отрезка S_0 на плоскости, который делится на три равные части. Средний интервал заменяется равносторонним треугольником без основания, т.е. ломаной, состоящей из двух соприкасающихся отрезков длины 1/3. В результате получается ломаная S_1, состоящая из четырех звеньев длины 1/3. На следующем шаге та же операция применяется к каждому из этих четырех звеньев в отдельности и т.д. Предельная кривая называется кривой Коха. Если три копии кривой Коха соединить между собой, то получим красивую замкнутую кривую, которая называется снежинкой Коха [3].

Автоматом Коха $A_{\text{K}} = (R^2, X, f)$ назовем двумерный сжимающий аффинный автомат, у которого $X = \{0, 1, 2, 3\}$ и функция переходов определяется следующим образом:

$$f(s, x) = \begin{cases} s \cdot E / 3 + (2x/3, 0), & 0 \le x \le 1, \\ s \cdot R((x-1)\pi/3)/3 + ((x-1)/3, 0), & 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Здесь E — единичная матрица второго порядка, $R(\varphi)$ — ортогональная матрица поворота плоскости на угол φ:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что коэффициент сжатия автомата Коха равен $r = 1/3$. Поэтому размерность аттрактора $L(A_{\text{K}})$ равна $d = 2 \cdot \log_3 2 \approx 1{,}2618$, что точно в два раза превышает размерность множества Кантора. Оператор Хатчинсона $S_n = F(S_{n-1})$ в данном случае увеличивает длину ломаной в 4/3 раза; следовательно, по индукции заключаем, что длина ломаной S_n равна $(4/3)^n$. Отсюда вытекает, что кривая Коха $L(A_{\text{K}})$ имеет бесконечную длину. Это опровергло распространенное в то время мнение, что любая ограниченная кривая подобно гладким кривым спрямляема, т.е. имеет конечную длину.

Б. Мандельброт заметил, что подобные кривые встречаются в природе. В частности, он пришел к выводу, что береговые линии Англии и Норвегии больше похожи на фракталы, чем на спрямляемые кривые, поэтому их длину можно считать бесконечной [1]. Интересно, что при возрастании точности измерений возрастает и измеряемая величина. Например, длина береговых линий хорошо описываются приближенной формулой $L(\delta) \approx a \cdot \delta^{1-d}$, где a — константа, δ — точность измерения и d — фрактальная размерность берега [1]. Для Норвегии было получено значение размерности $d \approx 1{,}5$, а для Англии $d \approx 1{,}3$, поэтому $L(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0$ [7].

4.4. Ковры Серпинского. В начале прошлого века польский математик В. Серпинский построил два самоподобных фрактала, которые также стали классическими: первый фрактал называется gasket (прокладка, салфетка) и второй фрактал — carpet (ковер). Название второго фрактала кажется более удачным, поэтому с учетом геометрической формы этих фракталов будем говорить о треугольном и квадратном коврах Серпинского, описанных во многих работах [3, 8]. Поэтому рассмотрим соответствующие им аффинные автоматы.

Треугольный ковер Серпинского задается двумерным сжимающим аффинным автоматом $A_{\text{ST}} = (R^2, X, f)$, у которого $X = \{0, 1, 2\}$ и функция переходов определяется формулами

$$f(s,x) = s\cdot E/2 + (x/2,\ 0),\ \text{если}\ 0 \le x \le 1;\ f(s,2) = s\cdot E/2 + (1/4, \sqrt{3}/4),$$

где E — единичная матрица второго порядка. Заметим, что автомат A_{ST} получен из автомата Вейерштрасса добавлением одного входного символа. Коэффициент сжатия здесь равен $r = 1/2$, а $k = 3$, поэтому размерность подобия аттрактора $L(A_{\mathrm{ST}})$ равна $\log_2 3 \approx 1{,}585$.

Квадратный ковер Серпинского задается двумерным сжимающим автоматом $A_{\mathrm{SK}} = (R^2, X, f)$, у которого входной алфавит представлен в виде множества пар $X = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} \setminus (1,1)$, т.е. его входными символами являются все пары (x_1, x_2), $0 \le x_1, x_2 \le 2$, за исключением пары (1,1). Функция переходов для всех $(x_1, x_2) \in X$ определяется формулой

$$f(s,(x_1,x_2)) = s\cdot E/3 + (x_1/3,\ x_2/3),$$

где E — единичная матрица второго порядка. Здесь коэффициент сжатия $r = 1/3$, а $k = 8$, поэтому размерность подобия аттрактора $L(A_{\mathrm{ST}})$ равна $3\cdot \log_3 2 \approx 1{,}8927$, что в три раза больше размерности множества Кантора.

Построение квадрата Серпинского обычно начинают с единичного черного квадрата, но отметим, что результат не зависит от начальной фигуры, которую поэтому называют затравкой или инициализацией. Квадратный ковер Серпинского можно охарактеризовать как множество точек единичного квадрата с координатами (x, y), причем в троичной записи чисел x и y не встречаются две единицы на одном и том же месте, т.е. если $x(n) = y(n)$, то $x(n) = y(n) = 0$ или $x(n) = y(n) = 2$.

5. СИМВОЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО АВТОМАТА

Рассмотрим свойства автоматного аттрактора, которые остались за кадром при доказательстве теоремы 1, и в связи с этим проиллюстрируем некоторые идеи символической динамики.

Пусть $A = (R^q, X, f)$ — сжимающий аффинный автомат с параметром $r < 1$ и пусть $w = x(1)\ldots x(n)$ — входное слово длины n. Отметим, что ограниченное подмножество $S \subset R^q$ имеет конечный диаметр $\mathrm{diam}\,(S)$, который равен максимальному расстоянию между его элементами. Тогда из свойства (3) для любого компакта $S \subset R^q$ получаем следующее неравенство:

$$\mathrm{diam}\,(f(S,w)) \le r^n \cdot \mathrm{diam}\,(S). \tag{14}$$

Отсюда следует, что в сжимающем автомате по мере роста длины входного слова подмножество $f(S, w)$ стягивается в точку.

Для краткости обозначим через L аттрактор автомата A. Тогда в силу его инвариантности относительно оператора Хатчинсона имеем равенство для любых $x \in X$ и $w \in X^+$

$$f(L,w) = \bigcup_{x\in X} f(L, xw). \tag{15}$$

Отсюда получаем следующее строгое включение для всех $x \in X$ и $w \in X^+$, поскольку автомат A является сжимающим:

$$f(L,w) \supset f(L,xw). \tag{16}$$

Входным сверхсловом $W = x(1)x(2)\ldots$ автомата A назовем бесконечную последовательность символов из алфавита X, т.е. функцию вида $W: N \to X$, где N — множество натуральных чисел. Множество всех сверхслов в алфавите X обозначим X^∞. Это множество назовем символьным пространством, поскольку оно является метрическим пространством, причем метрику в нем можно вводить различными способами. Например, расстояние между различными сверхсловами W и Y можно определить формулой

$$d_1(W,Y) = 1/k^m, \tag{17}$$

где $k = |X|$ и $m = \min \{n \mid W(n) \neq Y(n)\}$. Другая возможность состоит в определении расстояния в виде ряда [3]

$$d_2(W, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|W(n) - Y(n)|}{(k+1)^n}. \tag{18}$$

Нетрудно доказать, что метрики (17) и (18) эквивалентны между собой и вторая из них эквивалентна евклидовой метрике на канторовом множестве [3, теорема 7.2.2]. Отсюда в силу стандартных топологических теорем получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Метрическое пространство (X^{∞}, d_1) гомеоморфно канторовому множеству и поэтому является компактным, совершенным и вполне несвязным топологическим пространством.

Отметим, что эта теорема была давно известна специалистам по теории автоматов (например, в [9]). Основная идея символической динамики, выдвинутая Морсом и Хедлундом, состоит в описании траекторий непрерывной системы с помощью некоторой дискретной символической последовательности [10]. При этом фазовое пространство непрерывной системы предварительно разбивается на конечное число областей. Фактически это означает сопоставление непрерывной системе некоторого дискретного автомата.

Другая идея состоит в переносе свойств символьного пространства на аттракторы динамических систем. Это позволяет «экономить усилия» и доказывать некоторые факты только один раз для символьного пространства, а затем переносить их на аттракторы [3]. Для этого следует вначале установить соответствие между символьным пространством и аттрактором, что мы и сделаем для сжимающих аффинных автоматов.

Пусть $w = x(1)\ldots x(n)$ — входное слово автомата A. Обозначим $w^{-1} = x(n)\ldots x(1)$ обратное для него слово, в котором входные символы расположены в обратном порядке. Далее, пусть W — входное сверхслово, тогда обозначим w_n конечный префикс (начальный отрезок) этого сверхслова длины n, а w_n^{-1} — обратное для w_n слово. Из условия (16) получаем убывающую последовательность компактных подмножеств автомата A:

$$L \supset f(L, w_1^{-1}) \supset f(L, w_2^{-1}) \supset \ldots \supset f(L, w_n^{-1}) \supset \ldots \tag{19}$$

Далее, из неравенства (14) следует, что $\operatorname{diam}(f(L, w_n^{-1})) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из полноты евклидова пространства следует, что последовательность (19) сходится (стягивается) к одной точке, которую обозначим $\pi_A(W)$:

$$\pi_A(W) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(L, w_n^{-1}). \tag{20}$$

Таким образом, мы построили требуемое отображение символьного пространства на аттрактор автомата [4]

$$\pi_A : X^{\infty} \to L(A).$$

Из свойства (15) вытекает, что это отображение является сюръекцией, т.е. каждая точка аттрактора s_0 имеет по крайней мере одну символическую «метку» в виде сверхслова. Эту метку можно строить по шагам, образуя все более мелкие покрытия аттрактора $f(L, X^n) = L$ и выбирая символ x, соответствующий одному из тех подмножеств $f(L, xw)$, которые содержат точку s_0.

Рассмотрим действие автомата A на точки аттрактора. Из свойства (20) получаем следующее условия для всех $x \in X$ и всех сверхслов W:

$$f(\pi_A(W), x) = f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f(L, w_n^{-1}), x\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(L, w_n^{-1}x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(L, (xw_n)^{-1}) = \pi_A(xW).$$

Значит, $f(\pi_A(W), x) = \pi_A(xW)$, поскольку имеем одноэлементные подмножества. Отсюда индукцией по длине входного слова получаем следующее равенство для всех слов w и всех сверхслов W:

$$f(\pi_A(W), w) = \pi_A(wW). \tag{21}$$

В сжимающем автомате A с каждым входным словом w связано сжимающее преобразование $f_w\colon R^q \to R^q$, где $f_w(s) = f(s, w)$. Тогда в силу полноты евклидова пространства к преобразованию f_w можно применить теорему 2; следовательно, это преобразование имеет единственную неподвижную точку, которую обозначим $\sigma_A(w)$. Объединим все эти неподвижные точки и положим, что

$$\sigma_A(X^+) = \{\sigma_A(w) \mid w \in X^+\}.$$

Обозначим w^∞ периодическое сверхслово $www\ldots$, в котором слово w повторяется бесконечное число раз. Тогда из свойства (21) имеем $f(\pi_A(w^\infty), w) = \pi_A(ww^\infty) = \pi_A(w^\infty)$. Значит, точка $\pi_A(w^\infty)$ является неподвижной для преобразования f_w; следовательно, в силу единственности неподвижной точки имеем $\pi_A(w^\infty) = \sigma_A(w)$. Отсюда, в свою очередь, следует, что все неподвижные точки $\sigma_A(w)$ принадлежат аттрактору $L(A)$, т.е. имеет место включение

$$\sigma_A(X^+) \subseteq L(A). \tag{22}$$

Покажем, что $\sigma_A(X^+)$ является счетным всюду плотным подмножеством аттрактора $L(A)$.

Пусть W — входное сверхслово автомата A. Как и ранее, обозначим w_n конечный префикс этого сверхслова длины n, а w_n^{-1} — обратное для w_n слово. Тогда из включения (22) вытекает условие $\sigma_A(w_n^{-1}) \in f(L, w_n^{-1}))$, которое выполняется для всех $n \geq 1$. Отсюда в силу свойства (20) заключаем, что существует предел

$$\pi_A(W) = \lim_{n\to\infty} \sigma_A(w_n^{-1}).$$

Значит, замыкание подмножества $\sigma_A(X^+)$ должно совпадать с аттрактором $L(A)$; следовательно, $\sigma_A(X^+)$ является всюду плотным подмножеством этого аттрактора [4]:

$$\overline{\sigma_A(X^+)} = \pi_A(X^\infty) = L(A).$$

Осталось доказать, что отображение $\pi_A\colon X^\infty \to L(A)$ является непрерывным относительно метрики (17). Действительно, возьмем любое сверхслово W и любое число $\varepsilon > 0$ и обозначим $O(\varepsilon)$ евклидову ε-окрестность точки $\pi_A(W)$. Согласно свойствам (14), (19) и (20) подмножество $f(L, w_n^{-1})$ стягивается к точке $\pi_A(W)$ и, значит, при достаточно большом числе n будет выполняться условие $f(L, w_n^{-1}) \subseteq O(\varepsilon)$. Далее зафиксируем число n, удовлетворяющее этому условию, и рассмотрим сверхслово Y, которое удовлетворяет неравенству $d_1(W, Y) < 1/k^n$. Поскольку первые n символов в сверхсловах W и Y совпадают, то из свойства (20) заключаем, что $\pi_A(Y) \in f(L, w_n^{-1})$; следовательно, $\pi_A(Y) \in O(\varepsilon)$. Таким образом, непрерывность отображения π_A доказана.

Если отображение π_A является взаимно-однозначным, то любое отображение на символьном пространстве $\varphi\colon X^\infty \to X^\infty$ можно перенести на аттрактор автомата A путем сопряжения $\pi_A \circ \varphi \circ \pi_A^{-1}$. В этом, собственно, и состояла идея экономии усилий. Однако из непрерывности отображения π_A следует, что в этом случае оно должно быть гомеоморфизмом и в силу теоремы 3 аттрактор $L(A)$ должен быть канторовым множеством. Но это имеет место только в автомате

Кантора. Как нетрудно видеть, для остальных рассмотренных автоматов отображение π_A не будет взаимно-однозначным. В связи с этим в [3] была предложена процедура принудительного «поднятия» отображения π_A до взаимно-однозначного, но эту процедуру целесообразно рассмотреть в отдельной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Любой фрактал, который строится с помощью аффинных преобразований, может быть построен аффинным автоматом. Кроме классических фракталов, сюда относится также дракон Хартера–Хайтвея и ряд других фракталов [3]. Отметим, что аффинные автоматы дают не только прикладные инструменты для построения фракталов в виде алгоритмов и программ, но и теоретическую основу для их построения в виде аттракторов дискретных динамических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. Москва: Мир, 1993. 206 с.
3. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Техносфера, 2006. 484 с.
4. Hutchinson J. Fractals and Self-Similarity. *Indiana University Mathematical Journal.* 1981. Vol. 30, N 5. P. 713-747.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 543 с.
6. Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. Киев: Наукова думка, 1992. 205 с.
7. Федер Е. Фракталы. Москва: Мир, 1991. 254 с.
8. Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D. Fractals for classroom. Part 1. Introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlag, 1992. 450 p.
9. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). Москва: Наука, 1970. 400 с.
10. Боуэн Р. Методы символической динамики. Москва: Мир, 1979. 244 с.

Надійшла до редакції 22.03.2017

І.К. Рисцов

АФІННІ АВТОМАТИ ТА КЛАСИЧНІ ФРАКТАЛИ

Анотація. В роботі виявлено зв'язок між фрактальною геометрією та теорією автоматів. Показано, що, принаймні, класичні фрактали є аттракторами стискаючих афінних автоматів, а також що символьний простір стискаючого афінного автомату безперервно відображається на його аттрактор.

Ключові слова: афінні автомати, фрактали, аттрактори.

I.K. Rystsov

AFFINE AUTOMATA AND CLASSICAL FRACTALS

Abstract. The relationship between fractal geometry and automata theory has been discovered. It is shown that at least classical fractals are attractors of contraction affine automata. It is also shown that the symbol space of a contraction affine automaton continuously maps onto its attractor.

Keywords: affine automata, fractals, attractors.

Рысцов Игорь Константинович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», e-mail: haryst49@gmail.com.