УДК 519.17

М.Ф. СЕМЕНЮТА

ПРО (a, d)-ДИСТАНЦІЙНУ АНТИМАГІЧНУ ТА 1-ВЕРШИННУ БІМАГІЧНУ ВЕРШИННУ РОЗМІТКИ ОКРЕМИХ ТИПІВ ГРАФІВ

Анотація. Узагальнено результати для корони $P_n \circ P_1$, які дають змогу стверджувати, що $P_n \circ P_1$ не є (a, d)-дистанційним антимагічним графом для довільних значень a і d. Одержано умову існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки гіперкуба Q_n. Знайдено функціональні залежності, що породжують цей тип розмітки для Q_n. Методом математичної індукції доведено, що Q_n є $(2^n + n - 1, n - 2)$-дистанційним антимагічним графом. Визначено три типи графів, які не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки. Встановлено зв'язок дистанційної магічної розмітки регулярного графа G з 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою $G \cup G$.

Ключові слова: дистанційна магічна розмітка, (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка, 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка, n-вимірний куб, корона.

ВСТУП

Останнім часом розмітки графів все частіше стають об'єктом інтенсивних досліджень [1]. Стимулом до розвитку цього напрямку і накопичення теоретичних досягнень є наявність проблем практичного характеру в різних сферах діяльності [2–7]. Під розміткою графа $G = (V, E)$ розуміють відображення, що за певним правилом ставить у відповідність елементам графа числа, які належать заданій множині. Розмітку вважають вершинною, реберною або тотальною залежно від області її визначення. Спосіб обчислення ваги вершини або ребра залежить від типу розмітки. Якщо всі ваги рівні між собою, одержують магічний тип розмітки, а якщо всі ваги різні — антимагічний. Якщо ваги вершин утворюють арифметичну прогресію з першим членом a і різницею d, то маємо вершинну (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку. Вперше вона була запропонована у 2012 році С. Арумугамом і Н. Камачі [8].

У цій статті продовжимо дослідження, описані в [7–11]. В [8] подано перші загальні результати і сформульовано відкриті проблеми, частковий розв'язок яких представлено в [7–12]. Опис характеристик (a, d)-дистанційних антимагічних регулярних графів, ланцюгів та конструкцій графів, одержаних за допомогою одномісних та двомісних операцій над заданими графами, розпочато у [7, 8]. С. Арумугам і Н. Камачі побудували $(n+2, 1)$-дистанційну антимагічну розмітку декартового добутку циклу C_n і графа K_2 [8], а Д. Фрончек довів, що диз'юнктивне об'єднання копій декартового добутку двох повних графів та їхнього доповнення є $(a, 2)$-дистанційним антимагічним і $(a, 1)$-дистанційним антимагічним графами відповідно [7]. Д. Фрончек також показав, що диз'юнктивні копії гіперкуба Q_3 утворюють $(a, 1)$-дистанційний антимагічний граф. В [10, 11] знайдено умови існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки циркулянтних графів, графа дружби, сформульовано і доведено теореми, що розширюють сім'ї не (a, d)-дистанційних антимагічних графів. У розд. 2 цієї статті запропоновано розв'язання задач існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки для корони $P_n \circ P_1$ та n-вимірного куба (гіперкуба) Q_n.

Інший вид розмітки, що розглядається у розд. 3 — це 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка. Вона, як і (a, d)-дистанційна антимагічна, є сучасною розміткою і була введена у 2014 році в статті [12], де визначено необхідну умову її існування та одержано результати щодо таких типів графів, як ланцюг P_n, цикл C_n, повний двочастковий граф $K_{m,n}$, граф $G^0(P_n)$, повний симетричний мультичастковий граф.

У цій статті будемо досліджувати три типи графів, які не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки. Як з'ясувалося, до їхнього числа належать графи з компонентою, яка є ізоморфною гіперкубу Q_3. Крім цього, виявлено зв'язок дистанційної магічної розмітки регулярного графа G з 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою $G \cup G$.

1. БАЗОВІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Нехай $G=(V, E)$ — скінченний неорієнтований граф без кратних ребер та петель. Позначимо f вершинну розмітку графа G, а $N(u)$ — множину суміжності вершини $u \in V(G)$. Вагу $w(u)$ вершини u для розмітки f визначимо як суму міток вершин, суміжних з u, тобто $w(u)=\sum_{v \in N(u)} f(v)$, де кожна вершина $v \in V(G)$.

Поняття (a, d)-дистанційної антимагічної і 1-вершинної бімагічної вершинної розміток пов'язані з дистанційною магічною розміткою, відомою також під назвами «сигма-розмітка» і «1-вершинна магічна вершинна розмітка». Найбільш популярним і поширеним виявився термін «дистанційна магічна розмітка», який використовується і в цій статті.

Означення 1 [7]. Дистанційною магічною розміткою (або 1-вершинною магічною вершинною розміткою, або сигма-розміткою) графа $G=(V, E)$ порядку n називається бієкція $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої існує таке натуральне число k — магічна стала, що для кожної вершини $u \in V(G)$ виконується рівність $\sum_{v \in N(u)} f(v)=k$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають дистанційним магічним графом.

Наведемо означення (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки, запропоноване С. Арумугамом і Н. Камачі, яке будемо застосовувати далі.

Означення 2 [8]. (a, d)-дистанційною антимагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається така бієкція $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої множина всіх ваг вершин утворює арифметичну прогресію $a, a+d, a+2d, \ldots$ $\ldots, a+(n-1)d$ з першим членом a і різницею d, де a, d — фіксовані невід'ємні цілі числа, $a \geq 1$, $d \geq 0$. Граф G, що допускає таку розмітку, називають (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

Коли $d=0$, розмітка f є дистанційною магічною, а коли $d=1$ — дистанційною антимагічною.

Тотожне поняття ввів Д. Фрончек у 2013 році для розв'язання задач оптимального планування турнірів різних типів [7]. Він запропонував називати розмітку f графа $G=(V, E)$ порядку n дистанційною d-антимагічною, якщо $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ — бієкція, за якої існує таке впорядкування вершин G, що їхні ваги $w(u_1), w(u_2), \ldots, w(u_n)$ утворюють арифметичну прогресію з різницею d, де $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V(G)$. Крім того, в [7] введено впорядковану d-антимагічну розмітку, яку в термінах роботи [8] можна визначити таким чином.

Означення 3. Впорядкованою (a, d)-дистанційною антимагічною розміткою графа $G=(V, E)$ порядку n називається така бієкція $f^*: V(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$, для якої $f^*(u_i)=i$, і послідовність ваг $w(u_1), w(u_2), \ldots, w(u_n)$ всіх вершин утворює зростаючу арифметичну прогресію $w(u_1)=a,\ \ w(u_2)=a+d, \dots, w(u_n)=a+(n-1)d$ з першим членом a та різницею d, де $a,\ d$ — невід'ємні цілі числа, $a \ge 1$, $d \ge 0$. Граф G, що допускає таку розмітку f^*, називають впорядкованим (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

На спосіб присвоєння міток вершинам в означенні 3 накладається додаткова умова, в результаті вершина з меншою міткою має меншу вагу.

Визначимо класи графів, використані в наступних розділах, а саме, n-вимірний куб і корона. Зазначимо, що n-вимірний куб Q_n широко застосовується в мультикомп'ютерних системах. Ще у 1954 році У. Каутц моделював n-цифровий бінарний код у вигляді n-вимірного куба для дослідження питання «мінімізації безладу» у створенні кодів для цифрових комп'ютерів. Завдяки своїм властивостям Q_n є однією з перспективних архітектур для побудови самоорганізованого програмного забезпечення.

Згідно з Ф. Харарі n-вимірний куб Q_n визначається рекурсивно за допомогою декартового добутку графів: $Q_1=K_2$ і $Q_n=K_2 \times Q_{n-1}$. Такий граф має 2^n вершин і $n2^{n-1}$ ребер. Кожну вершину Q_n можна задати n-компонентним бінарним вектором. Тому під n-вимірним (булевим) кубом Q_n будемо розуміти граф, у якого множина вершин є множиною всіх n-компонентних бінарних векторів, при цьому два такі вектори вважаються суміжними тоді і тільки тоді, коли вони відрізняються лише однією компонентою.

Диз'юнктивним об'єднанням графів G_i, кожний з яких є копією зв'язного графа G, є граф $mG=\bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i$ з m компонентами, кожна з яких є ізоморфною G.

Граф $G \circ H$ називається короною, якщо його одержують з диз'юнктивного об'єднання графа G і n (де $n=|V(G)|$) копій графа H за допомогою з'єднання i-ї вершини G з кожною вершиною i-ї копії H для $i=1, 2, \dots, n$.

Сформулюємо необхідну умову існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки графа G, де δ і Δ — мінімальний і максимальний степені G відповідно.

Лема 1 [8]. Якщо G є (a, d)-дистанційним антимагічним графом порядку n, то

$$d \le \frac{2n\Delta-\Delta(\Delta-1)-\delta(\delta+1)}{2(n-1)}. \tag{1}$$

Наслідок 1 [8]. Якщо граф G є r-регулярним (a, d)-дистанційним антимагічним порядку n з $r \ge 2$, то $d<r$.

Наступний наслідок стосується умови існування (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки n-вимірного куба Q_n.

Наслідок 2. Якщо граф Q_n є (a, d)-дистанційним антимагічним, то $n \ge 3$, $a>n$, $d<n$.

Доведення. Якщо $n=2$, то граф Q_2 є циклом C_4. Відомо, що C_4 не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки. Нехай $n \ge 3$. Граф Q_n є n-регулярним, тому

$$a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(a+(2^n-1)d)=n(1+2+\dots+2^n). \tag{2}$$

Рівняння (2) зводиться до виду $a+\frac{2^n-1}{2}d=\frac{n(2^n+1)}{2}$. З наслідку 1 маємо $d<n$, тому $a+\frac{2^n-1}{2}n>\frac{n(2^n+1)}{2}$ або $a>n$.

Наслідок доведено.

Автори статті [12] ввели нові три види бімагнічних розміток, серед яких і 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка.

Означення 4 [12]. Бієктивна розмітка $f: V(G) \to \{1, 2, \ldots, n\}$ графа $G = (V, E)$ порядку n називається 1-вершинною бімагічною вершинною, якщо для кожної вершини $u \in V(G)$ виконується $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_1$ або $\sum_{v \in N(u)} f(v) = k_2$, де k_1, k_2 — різні сталі. Граф G, що допускає таку розмітку, називають 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

2. (a, d)-ДИСТАНЦІЙНА АНТИМАГІЧНА РОЗМІТКА КОРОНИ $P_n \circ P_1$ ТА n-ВИМІРНОГО КУБА Q_n

В [11] доведено, що корона $P_n \circ P_1$ не допускає $(a, 1)$-дистанційної антимагічної розмітки для $n \geq 2$, якщо $a \leq 2$. Узагальнимо цей результат на довільні значення a у такій теоремі .

Теорема 1. Корона $P_n \circ P_1$ не є (a, d)-дистанційним антимагічним графом для будь-яких значень a і d.

Доведення. Для корони $P_n \circ P_1$ може існувати (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка тільки для $d = 1$ або $d = 2$ [11]. Позначимо $V(P_n \circ P_1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ множину вершин $P_n \circ P_1$, де $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ і $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множини вершин копії P_n і n копій P_1 відповідно. Припустимо, що існує (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка f корони $P_n \circ P_1$.

Для $d = 1$ маємо $\sum_{i=1}^{n} f(u_i) \leq an + n - 1$ [11]. Оскільки $w(v_i) = f(u_i)$, то $\sum_{i=1}^{n} f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} w(v_i) \geq an + \frac{n(n-1)}{2}$. З цих двох нерівностей одержуємо $n \leq 2$. Графи $P_1 \circ P_1 = P_2$ і $P_2 \circ P_1 = P_4$ не допускають $(a, 1)$-дистанційної антимагічної розмітки.

Отже, корона $P_n \circ P_1$ не є $(a, 1)$-дистанційним антимагічним графом для будь-якого $a \geq 1$.

Для ланцюга P_n не існує (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки при $a, d \geq 2$ [8], тому нехай $n \geq 3$, $d = 2$ і $a = 2k - 1$ — непарне число, де $k \geq 2$. Ваги всіх вершин корони $P_n \circ P_1$ для розмітки f утворюють множину з непарних чисел. У цьому разі мітками вершин $u_1, u_2, \ldots, u_n$ є непарні числа. Це призводить до того, що вага $w(u_i) = f(u_{i-1}) + f(u_{i+1}) + f(v_i)$ — парне число для $2 \leq i \leq n-1$, що неможливо.

Міркуючи аналогічно, одержуємо, що для корони $P_n \circ P_1$ не існує $(a, 2)$-дистанційної антимагічної розмітки для парного a.

Отже, корона $P_n \circ P_1$ не допускає (a, d)-дистанційної антимагічної розмітки для будь-яких значень a і d.

Теорему доведено.

Знайдемо функціональні залежності, що породжують відповідний тип розмітки для Q_n, довівши таку теорему.

Теорема 2. Для будь-якого $n \geq 3$ n-вимірний куб Q_n є $(2^n + n - 1, n - 2)$-дистанційним антимагічним графом.

Доведення. З наслідку 2 леми 1 випливає, що Q_n допускає (a, d)-дистанційну антимагічну розмітку тільки для $n \geq 3$.

Кожну вершину n-вимірного куба Q_n будемо розглядати як n-компонентний бінарний вектор. Нехай u_i^n — вершини Q_n, де число i є десятковим записом

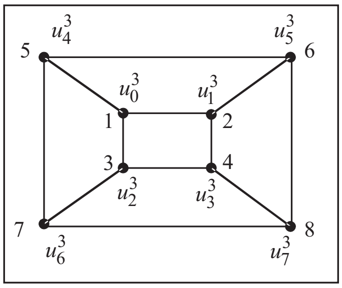

Рис. 1. (10, 1)-дистанційна антимагічна розмітка графа Q_3

бінарного вектора цієї вершини і набуває значень $0, 1, 2, \ldots, 2^n - 2, 2^n - 1$, тобто $V(Q_n) = \{u_0^n, u_1^n, u_2^n, \ldots$ $\ldots, u_{2^n-1}^n\}$.

Задамо бієкцію $f : V(Q_n) \to \{1, 2, \ldots, 2^n - 1, 2^n\}$ так: $f(u_i^n) = i + 1$, де $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 2, 2^n - 1$. Покажемо, що f є (a, d)-дистанційною антимагічною розміткою графа Q_n.

Доведення виконаємо методом математичної індукції.

Крок 1. Нехай $n = 3$. Для розмітки f вершини u_i^3, $i = 0, 1, \ldots, 7$, одержать мітки, як показано на рис. 1.

Знайдемо ваги вершин:

$$w(u_0^3) = 2 + 3 + 5 = 10,\ w(u_1^3) = 1 + 4 + 6 = 11,$$

$$w(u_2^3) = 1 + 4 + 7 = 12,\ w(u_3^3) = 2 + 3 + 8 = 13,$$
$$w(u_4^3) = 1 + 6 + 7 = 14,\ w(u_5^3) = 2 + 5 + 8 = 15,$$
$$w(u_6^3) = 3 + 5 + 8 = 16,\ w(u_7^3) = 4 + 6 + 7 = 17.$$

Ваги утворюють зростаючу арифметичну прогресію з $a = 10$, $d = 1$, тому граф Q_3 є (10, 1)-дистанційним антимагічним.

Для розмітки f, якщо $n = 4$, ваги вершин можна знайти таким чином:

1) якщо $i = 0, 1, \ldots, 7$, то $w(u_i^4) = w(u_i^3) + 2^3 + (i + 1)$;

2) якщо $i = 8, 9, \ldots, 15$, то $w(u_i^4) = w(u_{i-8}^3) + 3 \cdot 2^3 + (i - 7)$.

Множина всіх ваг вершин графа Q_4, обчислених за формулами, наведеними вище, утворює зростаючу арифметичну прогресію з першим членом $a = 19$ і різницею $d = 2$. Граф Q_4 є (19, 2)-дистанційним антимагічним.

Крок 2. Припустимо, що k-вимірний куб Q_k є (a, d)-дистанційним антимагічним графом.

Крок 3. Доведемо, що Q_{k+1} допускає (a_1, d_1)-дистанційну антимагічну розмітку $f : V(Q_{k+1}) \to \{1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 1, 2^{k+1}\}$ з $f(u_i^{k+1}) = i + 1$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2^{k+1} - 2$, $2^{k+1} - 1$.

Обчислимо ваги вершин графа Q_{k+1} за формулами:

$$w(u_i^{k+1}) = w(u_i^k) + 2^k + (i + 1),\ \text{якщо}\ i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1;$$

$$w(u_i^{k+1}) = w(u_{i-2^k}^k) + k \cdot 2^k + (i - 2^k + 1),\ \text{якщо}\ i = 2^k, 2^k + 1, \ldots, 2^{k+1} - 1.$$

Ваги утворюють числову послідовність a_1, $a_1 + (d + 1), a_1 + 2(d + 1), \ldots$ $\ldots, a_1 + (2^k - 1)(d + 1)$, $a_1 + 2^k(k - 1)$, $a_1 + 2^k(k - 1) + (d + 1)$, $a_1 + 2^k(k - 1) +$ $+ 2(d + 1), \ldots, a_1 + 2^k(k - 1) + (2^k - 1)(d + 1)$, де $a_1 = a + 2^k + 1$. Вона буде арифметичною прогресією з першим членом $a_1 = a + 2^k + 1$ лише тоді, коли для різниці d_1 виконується умова $d_1 = d + 1 = k - 1$. Таким чином, граф Q_{k+1} допускає (a_1, d_1)-дистанційну антимагічну розмітку з $a_1 = a + 2^k + 1$ та $d_1 = k - 1$.

Отже, n-вимірний куб Q_n є $(a, n - 2)$-дистанційним антимагічним графом для будь-якого $n \geq 3$. Знайдемо a. Для цього складемо рівняння

$$n \sum_{i=0}^{2^n - 1} f(u_i) = 2^n \cdot a + 2^{n-1}(2^n - 1) \cdot d.$$

Одержимо, що $a = 2^n + n - 1$. Виходить, що граф Q_n є $(2^n + n - 1, n - 2)$-дистанційним антимагічним для будь-якого $n \geq 3$.

Теорему доведено.

З доведення цієї теореми випливає, що множина всіх ваг вершин Q_n утворює зростаючу арифметичну прогресію, і вершині з меншою міткою відповідає менша вага. Тому справедливим є такий наслідок.

Наслідок 1. Для будь-якого $n \geq 3$ n-вимірний куб Q_n є впорядкованим $(2^n + n - 1, n - 2)$-дистанційним антимагічним графом.

3. ПРО 1-ВЕРШИННУ БІМАГІЧНУ ВЕРШИННУ РОЗМІТКУ ГРАФІВ ОКРЕМИХ КОНСТРУКЦІЙ

Дослідження реберно-бімагічних графів розпочалося у 2004 році. Цей тип розмітки введено авторами роботи [13], а у 2014 році запропоновано 1-вершинну бімагічну вершинну розмітку [12]. Ці види розміток є цікавими для графів, які не мають реберної або вершинної магічної розмітки. Але питання наявності графів, що не допускають бімагічних розміток, також є актуальним і пов'язане з інформацією про структурні властивості графів.

Теорема 3. Будь-який граф, який містить більше двох вершин степеня одиниця, не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Доведення. Достатньо розглянути граф G, який містить три вершини степеня одиниця, як зображено на рис. 2. Не обов'язково, щоб G був зв'язним графом. Припустимо, що існує 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка f для G, тобто вага кожної вершини дорівнює одному з двох різних чисел, що є магічними сталими для f. Це призводить до того, що серед ваг $w(v_1) = f(u_1)$, $w(v_2) = f(u_2)$, $w(v_3) = f(u_3)$ є однакові. Це неможливо, оскільки f — бієкція. Отже, граф, що містить більше двох вершин степеня одиниця, не допускає 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

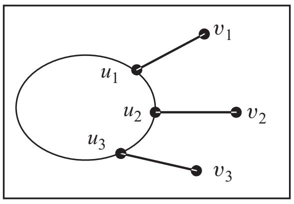

Рис. 2. Граф G

Теорему доведено.

Теорема 3 дає змогу виключити з дослідження багато різних типів графів. До них належать всі дерева, відмінні від ланцюгів. Наприклад, корона $P_n \circ P_1$ не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом для $n \geq 3$.

Теорема 4. Нехай у графі G є вершини $u_i \in V(G)$, $i \geq 3$, для яких $\deg(u_i) = 2$. Якщо $\bigcap_{i \geq 3} N(u_i) = \{u\}$, $u_i \neq u$, то G не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Доведення. Розглянемо граф G, що задовольняє вимоги умови теореми 4. Нехай бієкція f з множини $V(G)$ на множину $\{1, 2, \ldots, |V|\}$ є 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою G. Вершини u, u_i, $v_i \in V(G)$, де $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\deg(u_i) = 2$, породжують підграф графа G, і кожна послідовність вершин u, u_i, v_i утворює ланцюг. Оскільки $w(u_i) = f(u) + f(v_i)$, то з будь-яких трьох вершин u_i для двох ваги збігаються, наприклад $w(u_s) = w(u_t)$, $s \neq t$. Це неможливо, оскільки $f(v_s) \neq f(v_t)$. Тому припущення є хибним. Граф G не допускає 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки.

Теорему доведено.

Теорема 5. Куб Q_3 не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Доведення. Позначимо $V(Q_3) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ множину вершин Q_3 таким чином, що для вершини u_i число i є десятковим записом бінарного вектора цієї вершини, де $i=0,1,2,\ldots,7$. Задамо бієктивне відображення $f:V(Q_3)\to\{1,2,\ldots,8\}$. Припустимо, що f — 1-вершинна бімагічна вершинна розмітка Q_3. Отже, ваги вершин дорівнюють сталим k_1 або k_2. Для u_0, u_3 і u_5 одержимо

$$w(u_0)=f(u_1)+f(u_2)+f(u_4),$$

$$w(u_3)=f(u_1)+f(u_2)+f(u_7),$$

$$w(u_5)=f(u_1)+f(u_4)+f(u_7).$$

З цих трьох чисел два повинні бути рівними між собою, але це неможливо, оскільки f — бієкція. Таким чином, граф Q_3 не є 1-вершинним бімагічним вершинним.

Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо граф G містить Q_3 як компоненту, то G не є 1-вершинним бімагічним вершинним графом.

Доведення випливає безпосередньо з теореми 5.

Теорема 6. Якщо регулярний граф G допускає дистанційну магічну розмітку, то граф $G\cup G$ є 1-вершинним бімагічним вершинним.

Доведення. Нехай g — дистанційна магічна розмітка r-регулярного графа G порядку n, і кожна його вершина має вагу, що дорівнює сталій k. Позначимо $V=\{u_1,u_2,\ldots,u_n,v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ множину вершин $G\cup G$, де u_i, v_i — вершини різних компонент у цьому графі та u_i, v_i є образами вершини $x_i\in V(G)$, $i=1,2,\ldots,n$. Для $G\cup G$ задамо бієктивну функцію $f:V\to\{1,2,\ldots,2n\}$ так:

$$f(u_i)=g(x_i),\qquad f(v_i)=g(x_i)+n.$$

Тоді вершини $G\cup G$ одержать ваги: $w_f(u_i)=w_g(x_i)=k=\mathrm{const}$, $w_f(v_i)=$ $=w_g(x_i)+nr=k+nr=\mathrm{const}$. Отже, розмітка f графа $G\cup G$ є 1-вершинною бімагічною вершинною.

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У статті викладено результати теоретичних досліджень щодо наявності (a,d)-дистанційної антимагічної і 1-вершинної бімагічної вершинної розміток для окремих типів графів. Узагальнено результати для корони $P_n\circ P_1$, які дають змогу стверджувати, що $P_n\circ P_1$ не є (a,d)-дистанційним антимагічним графом для будь-яких значень a і d. Запропоновано спосіб знаходження (a,d)-дистанційної антимагічної розмітки n-вимірного куба Q_n. Розглянуто питання наявності графів, що не допускають 1-вершинної бімагічної вершинної розмітки. Виявлено зв'язок дистанційної магічної розмітки регулярного графа G з 1-вершинною бімагічною вершинною розміткою $G\cup G$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gallian J.A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2016. DS6: Dec 23.
2. Stewart B.M. Magic graphs. *Canad. J. Math.* 1966. Vol. 18. P. 1031–1059.
3. Stanley R. Linear homogeneous Diophantine equations and magic labelings of graphs. *Duke Math. J.* 1973. Vol. 40. P. 607–632.
4. Bloom G.S., Golomb S.W. Numbered complete graphs, unusual rulers and assorted applications. *Theory and applications of graphs. Lecture Notes in Math*. New York: Springer-Verlag, 1978. Vol. 642. P. 53–65.

5. Froncek D. Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games. *Congressus Numerantium.* 2007. Vol. 187, Iss. 1. P. 83–89.
6. Mathematics and sports: Gallian J. A. (ed). Mathematical Association of America. 2010. 338 p.
7. Froncek D. Handicap distance antimagic graphs and incomplete tournaments. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 2013. Vol. 10, N 2. P. 119–127.
8. Arumugam S., Kamatchi N. On $(a; d)$-distance antimagic graphs. *Australasian Journal of Combinatorics.* 2012. Vol. 54. P. 279–287.
9. Nalliah M. Antimagic labelings of graphs and digraphs: Ph. D. Thesis. The National Centre for Advanced Research in Discrete Mathematics, University of Kalasalingam. 2014.
10. Семенюта М.Ф. Про дистанційну антимагічну розмітку графів. *Теорія оптимальних рішень*. Київ: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2016. С. 26–32.
11. Семенюта М.Ф. (a, d)-дистанційна антимагічна розмітка окремих типів графів. *Кибернетика и системный аналіз*. 2016. Т. 52, № 4. С. 135–142.
12. Baskar Babujee J., Babitha S. On 1-vertex bimagic vertex labeling. *Tamkang Journal of Mathematics.* 2014. Vol. 45, N 3. P. 259–273.
13. Baskar Babujee J. Bimagic labeling in path graphs. *The Mathematics Education*. 2004. Vol. 38, N 1. P. 12–16.

Надійшла до редакції 10.05.2017

М.Ф. Семенюта

О (a, d)-ДИСТАНЦИОННОЙ АНТИМАГИЧЕСКОЙ И 1-ВЕРШИННОЙ БИМАГИЧЕСКОЙ ВЕРШИННОЙ РАЗМЕТКАХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ТИПОВ ГРАФОВ

Аннотация. Обобщены результаты для короны $P_n \circ P_1$, которые дают возможность утверждать, что $P_n \circ P_1$ не является (a, d)-дистанционным антимагическим графом для любых значений a и d. Получено условие существования (a, d)-дистанционной антимагической разметки гиперкуба Q_n. Найдены функциональные зависимости, порождающие этот тип разметки для Q_n. Методом математической индукции доказано, что Q_n является $(2^n + n - 1, n - 2)$-дистанционным антимагическим графом. Определены три типа графов, не допускающих 1-вершинной бимагической вершинной разметки. Установлена связь дистанционной магической разметки регулярного графа G с 1-вершинной бимагической вершинной разметкой $G \cup G$.

Ключевые слова: дистанционная магическая разметка, (a, d)-дистанционная антимагическая разметка, 1-вершинная бимагическая вершинная разметка, n-мерный куб, корона.

M.F. Semeniuta

ON (a, d)-DISTANCE ANTIMAGIC AND 1-VERTEX BIMAGIC VERTEX LABELINGS OF CERTAIN TYPES OF GRAPHS

Abstract. We have generalized the results for corona $P_n \circ P_1$, which make it possible to state that $P_n \circ P_1$ is not an (a, d)-distance antimagic graph for all a and d. We have obtained the condition for the existence of an (a, d)-distance antimagic labeling of a hypercube Q_n. We found functional relationships that generate this type of labeling for Q_n and used the method of mathematical induction to prove that Q_n is a $(2^n + n - 1, n - 2)$-distance antimagic graph. We have defined two types of graphs that do not allow 1-vertex bimagic vertex labeling. We also established a relation between the distance magic labeling of a regular graph G with 1-vertex bimagic vertex labeling $G \cup G$.

Keywords: distance magic labeling, (a, d)-distance antimagic labeling, 1-vertex bimagic vertex labeling, n-dimensional cube, crown.

Семенюта Марина Фролівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Льотної академії Національного авіаційного університету, Кропивницький, e-mail: marina_semenyuta@ukr.net.