

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННО-КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В РАМКАХ МОДЕЛЕЙ С НЕСИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

Аннотация. Построены неклассические математические модели для описания дробно-дифференциальной фильтрационно-консолидационной динамики насыщенных соевыми растворами грунтовых сред, основанные на понятии дробной производной Капуто–Фабрицио. Поставлены соответствующие краевые задачи для системы дробно-дифференциальных уравнений фильтрации и солепереноса. Разработана методика их численного решения, изложен подход к распараллеливанию вычислений. Приведены результаты численных экспериментов по моделированию динамики изучаемого процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика фильтрационно-консолидационных процессов, дробно-дифференциальные математические модели, модели с несингулярным ядром, краевые задачи, конечно-разностные решения, распараллеливание вычислений.

ВВЕДЕНИЕ

В ряде работ, в частности в [1–5], на основе обобщения фильтрационного закона Дарси для случая учета явления химического осмоса

$$u_x = -k \frac{\partial H}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (1)$$

где u_x — скорость фильтрации, $H = p/\gamma$ — избыточный напор, p — поровое давление, γ — удельный вес жидкости, k — коэффициент фильтрации, C — концентрация солей в жидкой фазе, ν — коэффициент химического осмоса [4], построены и изучены математические модели фильтрационной консолидации пористых (грунтовых) сред, насыщенных соевыми растворами. Простейшая из указанных моделей основана на следующей системе уравнений [4]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (3)$$

где d — коэффициент конвективной диффузии, σ — пористость среды, C_v — коэффициент консолидации [6, 7], $\mu = \nu C_v / k$, u_x — скорость фильтрации солевого раствора, определяемая согласно (1).

В сложных горно-геологических условиях протекания фильтрационно-консолидационных процессов существенное влияние на их динамику могут иметь локально-неравновесные эффекты (в частности, эффекты памяти и пространственных корреляций), учет которых при использовании классического подхода затруднителен. Эффективный подход в описании процессов переноса в системах, для которых важен учет нелокальных пространственно-временных свойств, связан с применением при моделировании динамики этих процессов аппарата интегро-дифференцирования нецелого порядка [8–11]. Так, например, в работе [12] построена и исследована математическая модель, описывающая дробно-дифференциальную консолидационную динамику насыщенную соевым раствором грунтовой среды. Эта модель основана на системе уравнений с дробными производными Капуто–Герасимова

$$D_t^{(\alpha)} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (4)$$

$$\sigma D_t^{(\alpha)} C = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (5)$$

где $D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [8–11] порядка α ($0 < \alpha \leq 1$), а обозначения всех остальных величин, входящих в соотношения (4), (5), совпадают с приведенными выше. Ряд других математических моделей, описывающих дробно-дифференциальную консолидационную динамику насыщенных солевыми растворами пористых сред, представлены в [13–15]. При этом наличие сингулярных ядер в уравнениях моделей с дробными производными Капуто–Герасимова определенным образом затрудняет физическую интерпретацию получаемых решений соответствующих краевых задач теории консолидации и приводит к неоправданному усложнению алгоритмов численной реализации их решений. В значительной мере лишенным указанных недостатков представляется предложенный в [16, 17] подход, согласно которому моделирование фильтрационной динамики в пористых средах выполняется в рамках дробно-дифференциальных математических моделей с несингулярным ядром (в частности, с использованием понятия производной Капуто–Фабрицио [18]). Далее он применяется при построении дробно-дифференциальных математических моделей консолидационной динамики насыщенных солевыми растворами грунтовых сред. Для построенных неклассических математических моделей в настоящей работе получены численные решения фильтрационно-консолидационных задач без учета свойства ползучести грунтового скелета уплотняемого массива и с его учетом. Приведены результаты компьютерного моделирования динамики изучаемого процесса. Обсуждаются некоторые аспекты распараллеливания вычислений.

Основываясь на результатах работы [18], предварительно введем в рассмотрение двухпараметрическую производную Капуто–Фабрицио от функции $H(x, t)$ по переменной t

$${}^{CF} D_t^{\alpha, \lambda} H(x, t) = \frac{1}{\lambda(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau} \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{t-\tau}{\lambda}\right) d\tau, \quad (6)$$

где параметр α — порядок производной ($0 < \alpha \leq 1$), λ — действительный положительный параметр. Отсюда при $\lambda \rightarrow 1$ получаем общепринятое определение производной Капуто–Фабрицио, предложенное в [18].

Далее будем исходить из следующего обобщения классического уравнения неразрывности фильтрационного потока:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k}{C_v} {}^{CF} D_t^{\alpha, \lambda} H(x, t) = 0, \quad (7)$$

где ${}^{CF} D_t^{\alpha, \lambda}$ — оператор дробной производной Капуто–Фабрицио вида (6).

Отметим, что, в частности, при $\lambda = 1$, $\alpha \rightarrow 1$ из соотношения (7) получаем классическое уравнение неразрывности вида [6]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{k}{C_v} \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Из (7) с учетом соотношения (1) имеем следующее уравнение для напора:

$${}^{CF} D_t^{\alpha, \lambda} H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (0 < \alpha \leq 1). \quad (8)$$

Аналогично, с учетом соответствующего дробно-дифференциального обобщения закона Фика, получаем уравнение для концентрации в виде

$$\sigma {}^{CF} D_t^{\alpha_*, \lambda} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha_* \leq 1). \quad (9)$$

Таким образом, система уравнений (8), (9), составляющая основу новой дробно-дифференциальной математической модели фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами пористых сред, базируется на уравнениях, не содержащих сингулярных ядер. Отметим, что при $\alpha, \alpha_* \rightarrow 1, \lambda = 1$ из (8), (9) получаем систему уравнений вида (2), (3) для модели фильтрационной консолидации в классической постановке [1–5].

В рамках рассматриваемой неклассической математической модели дробно-дифференциальная динамика неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенной солевым раствором грунтовой среде в случае, например, массива конечной мощности l с проницаемыми границами описывается в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, t > 0\}$ системой уравнений (8), (9) при следующих краевых условиях:

$$H(0, t) = 0, H(l, t) = 0, H(x, 0) = H_0, \quad (10)$$

$$C(0, t) = C_0, C(l, t) = 0, C(x, 0) = 0, \quad (11)$$

где H_0 — начальное значение избыточного напора в массиве, C_0 — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Рассмотрим безразмерные переменные и параметры, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, t' = \frac{t}{\lambda}, H' = \frac{H}{H_0}, C' = \frac{C}{C_0}, C'_v = \frac{\lambda C_v}{l^2}, \\ \mu' &= \frac{\lambda \mu C_0}{l^2 H_0}, d' = \frac{d \lambda}{l^2}, u' = \frac{k \lambda H_0}{l^2}, v' = \frac{\lambda \nu C_0}{l^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Переходя в соотношениях (8)–(11) к новым переменным согласно формулам (12) и опуская в дальнейшем знак «штрих» над безразмерными величинами, получаем в области $(0, 1) \times (0, \infty)$ краевую задачу

$${}^{CF}D_t^\alpha H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (13)$$

$$\sigma {}^{CF}D_t^{\alpha_*} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (14)$$

$$H(0, t) = 0, H(1, t) = 0, H(x, 0) = 1, \quad (15)$$

$$C(0, t) = 1, C(1, t) = 0, C(x, 0) = 0, \quad (16)$$

где ${}^{CF}D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t u'(\tau) \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right) d\tau$ — дробная производная в смысле определения Капуто–Фабрицио [18] порядка α .

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ НАСЫЩЕННОГО СОЛЕВЫМ РАСТВОРОМ МАССИВА КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТИ В РАМКАХ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Далее кратко излагается конечно-разностная методика построения приближенного решения краевой задачи (13)–(16).

Рассмотрим сеточную область

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = ih \ (i = \overline{0, m+1}), t_j = j\tau \ (j = \overline{0, n})\},$$

где h, τ — шаги сетки по геометрической переменной и времени соответственно. На основе монотонной разностной схемы Самарского [19] поставим в соответствие рассматриваемой задаче систему разностных уравнений, записываемую в стандартных обозначениях в виде

$$\Delta_t^{(\alpha)} H = C_v \hat{H}_{\bar{x}x} - \mu \hat{C}_{\bar{x}x} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (17)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\alpha_*)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}x} + v^+ \hat{C}_x + v^- \hat{C}_{\bar{x}} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (18)$$

где

$$\chi = \frac{d}{R}, \quad R = 1 + \frac{h|v|}{2d}, \quad v^\pm = \frac{1}{2}(v \pm |v|), \quad v = uH_x - \nu C_x. \quad (19)$$

При этом в соотношениях (17), (18) оператор $\Delta_t^{(\alpha)}$ обозначает дискретный аналог дробной производной Капуто–Фабрицио порядка α , определяемый соотношением

$$\Delta_t^{(\alpha)} u = c_\alpha \sum_{k=0}^j \omega_k^{(j)} u_{t,k}, \quad (20)$$

где

$$u_{t,k} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau}, \quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-b_\alpha \tau}), \quad \omega_k^{(j)} = e^{-b_\alpha(j-k)\tau}, \quad b_\alpha = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедлива оценка ${}^{CF}D_t^\alpha u = \Delta_t^{(\alpha)} u + O(\tau)$.

Расписывая в соотношениях (17), (18) соответствующие разностные операторы с учетом (20) и приводя подобные члены, сводим задачу к решению следующих систем линейных алгебраических уравнений:

$$AH_{i-1}^{j+1} - SH_i^{j+1} + AH_{i+1}^{j+1} = F_i^j \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n}), \quad (21)$$

$$\tilde{A}_i^j C_{i-1}^{j+1} - \tilde{S}_i^j C_i^{j+1} + \tilde{B}_i^j C_{i+1}^{j+1} = \tilde{F}_i^j \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n}), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{Cv}{c_\alpha h^2}, \quad S = \frac{1}{\tau} + 2A, \quad F_i^j = \sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau} + \\ &+ \frac{\mu}{c_\alpha h^2} (C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}) - \frac{H_i^j}{\tau}, \quad \tilde{A}_i^j = \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} - (v^-)_i^j \right), \\ \tilde{B}_i^j &= \frac{1}{h} \left(\frac{\chi_i^j}{h} + (v^+)_i^j \right), \quad \tilde{S}_i^j = \frac{\sigma c_\alpha^*}{\tau} + \tilde{A}_i^j + \tilde{B}_i^j, \\ \tilde{F}_i^j &= \sigma c_\alpha^* \left(\sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{C_i^{k+1} - C_i^k}{\tau} - \frac{C_i^j}{\tau} \right), \quad c_\alpha^* = \frac{1}{\alpha_*} (1 - e^{-b_\alpha^* \tau}), \\ b_\alpha^* &= \frac{\alpha_*}{1-\alpha_*}, \quad \tilde{\omega}_k^{(j)} = e^{-b_\alpha^*(j-k)\tau}. \end{aligned} \quad (23)$$

При $j=0$ суммы в (23) считаются равными нулю.

Разностные уравнения систем (21), (22) трехточечные и эффективно решаются методом прогонки [19]. Прогоночные соотношения имеют вид

$$H_i^{j+1} = \alpha_{i+1}^j H_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}^j, \quad C_i^{j+1} = \tilde{\alpha}_{i+1}^j C_{i+1}^{j+1} + \tilde{\beta}_{i+1}^j \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n}),$$

а прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1}^j &= \frac{A}{S - A\alpha_i^j}, \quad \beta_{i+1}^j = \alpha_{i+1}^j \left(\beta_i^j - \frac{F_i^j}{A} \right) \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n}), \\ \tilde{\alpha}_{i+1}^j &= \frac{\tilde{B}_i^j}{\tilde{S}_i^j - \tilde{A}_i^j \tilde{\alpha}_i^j}, \quad \tilde{\beta}_{i+1}^j = \frac{\tilde{\alpha}_{i+1}^j}{\tilde{B}_i^j} (\tilde{A}_i^j \tilde{\beta}_i^j - \tilde{F}_i^j) \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{0, n}). \end{aligned}$$

Для определения стартовых значений прогоночных коэффициентов используем конечно-разностные аналоги граничных условий. Тогда получаем

$$\alpha_1^j, \tilde{\alpha}_1^j = 0, \quad \beta_1^j = 0, \quad \tilde{\beta}_1^j = 1 \quad (j = \overline{0, n}).$$

Отметим, что устойчивость метода прогонки для систем (21), (22) вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений.

РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Вычислительная сложность определения значений коэффициентов трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (21), (22), получаемых в результате дискретизации задачи, линейно зависит от номера шага по времени, что обуславливает необходимость использования параллельных вычислений при решении рассматриваемых задач на больших временных промежутках.

В этом случае эффективно применение графических процессоров (GPU), так как большая часть времени при решении задачи тратится на независимые операции определения значений векторов правых частей СЛАУ.

Алгоритм проведения расчетов состоит из следующих блоков операций:

- вычисление значений матрицы коэффициентов и элементов векторов правых частей СЛАУ согласно соотношениям (23);
- решение СЛАУ.

Операции в пределах первого блока независимы одна от другой в случае отсутствия общего доступа к памяти. Эффективной реализацией этих операций на GPU является схема, в которой один поток обрабатывает один элемент вектора без объединения потоков в группы.

Для решения трехдиагональных СЛАУ использована реализация GPU-алгоритма параллельной циклической редукции, описанная в [20]. При решении СЛАУ с применением центрального процессора (CPU) использовался описанный алгоритм метода прогонки.

При проведении вычислений обмен данными между памятью центрального и графического процессоров выполняется при инициализации вычислений и получении их результатов.

Вычисление значения дробных производных ${}^{CF}D_t^\alpha H$, ${}^{CF}D_t^{\alpha_*} C$ на текущем шаге по времени требует хранения результатов, полученных на предыдущих временных шагах. Это приводит к необходимости расширения блока памяти, выделенного для хранения таких данных на GPU. В реализованной схеме размер блока памяти увеличивается вдвое при его полном заполнении.

Время проведения вычислений параллельным алгоритмом на j -м шаге по времени без учета обменов данными между памятью центрального и графического процессоров оцениваем следующим образом:

$$T_1(N, j) = k_1 \left(10 + 2 \log_2 \frac{N}{2} \right) + k_2 (N/P) \left(k_3 + k_4 j + k_5 \log_2 \frac{N}{2} \right), \quad (24)$$

где k_1 — время, затрачиваемое на вспомогательные операции по запуску GPU-ядер (kernel), k_2 — коэффициент быстродействия GPU, k_3 — коэффициент сложности операций вычисления значений элементов матриц СЛАУ, k_4 — коэффициент сложности вычисления значений вектора правой части СЛАУ, k_5 — коэффициент сложности проведения вычислений на одной итерации алгоритма параллельной циклической редукции, P — количество скалярных процессоров в GPU, N — количество узлов сетки.

В случае последовательного алгоритма время работы можно оценить как

$$T_2(N, j) = k_6 N (k_3 + k_4 j + k_7), \quad (25)$$

где k_6 — коэффициент быстродействия центрального процессора, k_7 — коэффициент сложности вычисления решения СЛАУ методом прогонки.

Алгоритмы для GPU программно реализованы с применением технологии OpenCL. Вычислительные эксперименты по решению задач разной размерности с использованием CPU и GPU проводились на одном узле кластера СКИТ-4 Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины.

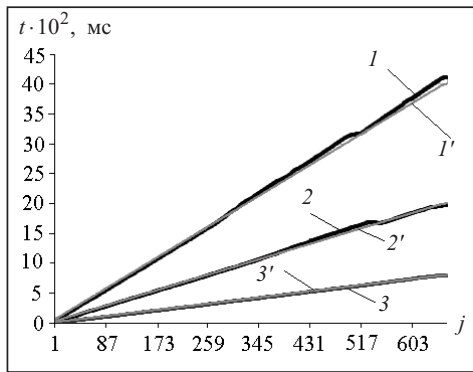


Рис. 1

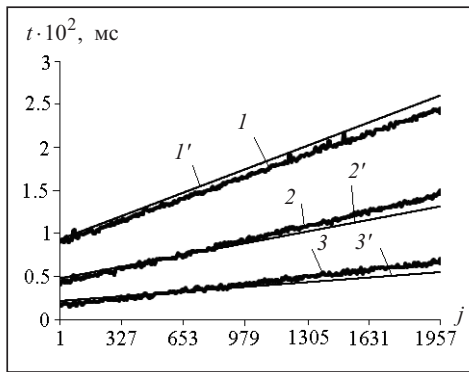


Рис. 2

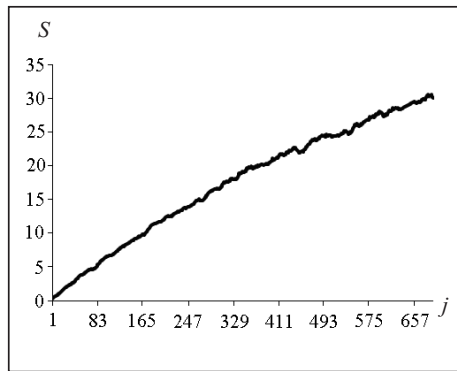


Рис. 3

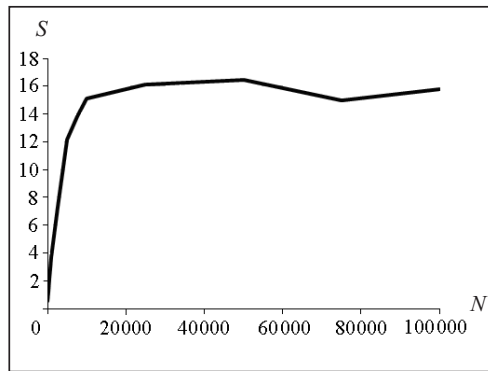


Рис. 4

Зависимость результатов вычислений от номера шага по времени для различных размеров сетки и соответствующие оценки согласно (24) и (25) показаны на рис. 1, 2. На рис. 1 приведено фактическое время t работы CPU-алгоритма (кривые 1, 2, 3) и его оценка (кривые 1', 2', 3') на шагах j по времени (1, 1' — $N = 50000$; 2, 2' — $N = 25000$; 3, 3' — $N = 10000$), на рис. 2 — фактическое время t работы GPU-алгоритма (кривые 1, 2, 3) и его оценка (кривые 1', 2', 3') на временных шагах j (1, 1' — $N = 50000$; 2, 2' — $N = 25000$; 3, 3' — $N = 10000$).

Время работы GPU-алгоритма оценивалось для $P = 1000$. Результаты тестирования показали адекватность оценок (24) и (25).

Ускорение S , обеспечиваемое GPU-алгоритмом по сравнению с CPU-алгоритмом в зависимости от номера шага j по времени, проиллюстрировано на рис. 3. Как видно из полученных данных, оно линейно возрастает, что обуславливает высокую эффективность использования GPU при моделировании рассматриваемых процессов на больших временных интервалах.

Суммарное ускорение S при проведении вычислений на 600 шагах по времени для GPU-алгоритма в зависимости от размера N сетки показано на рис. 4. Время, затрачиваемое GPU-алгоритмом на вспомогательные операции, существенно снижает его быстродействие на небольших сетках. При увеличении размера сетки ускорение становится постоянным и зависит только от количества и быстродействия скалярных процессоров GPU.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ КОНСОЛИДАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Численное моделирование динамики полей избыточных фильтрационных напоров и полей концентраций согласно рассматриваемой математической модели выполнено относительно безразмерных переменных, определяемых соотношениями (12) для входных данных из работ [4, 21]. Некоторые из полученных

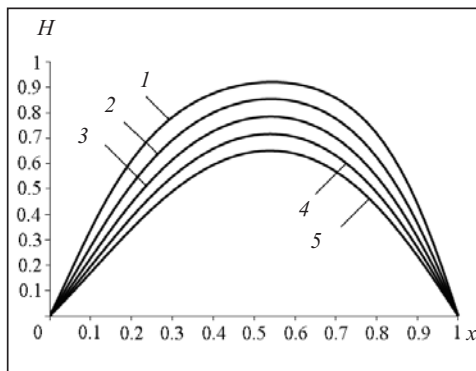


Рис. 5

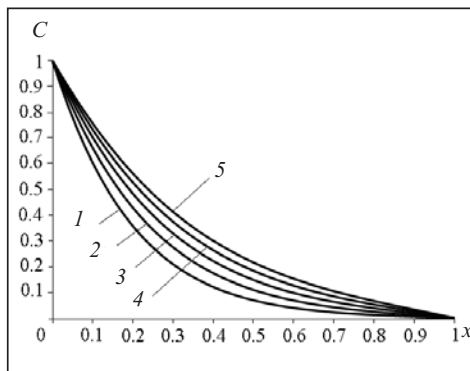


Рис. 6

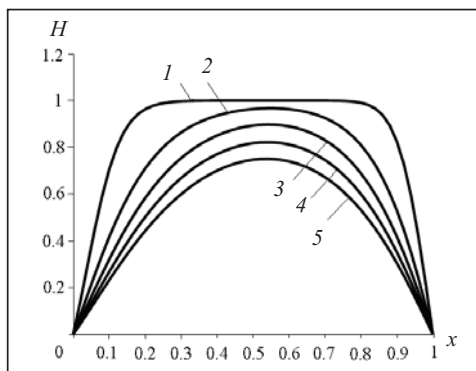


Рис. 7

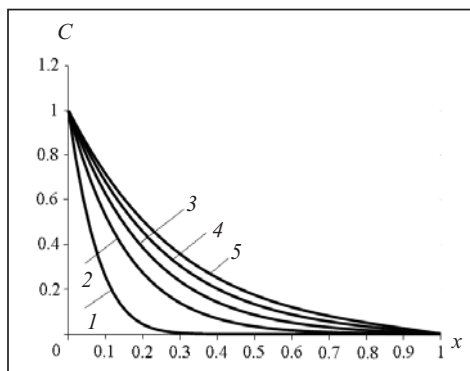


Рис. 8

при этом результатов графически изображены на рис. 5–10. На рис. 5 приведены графики напорной функции при $\alpha_* = \alpha = 0,85$ для различных значений безразмерной временной переменной t (1 — $t=0,1$; 2 — $t=0,3$; 3 — $t=0,5$; 4 — $t=0,6$; 5 — $t=0,7$). На рис. 6 показана соответствующая динамика полей концентраций в те же моменты времени. Графики напорной функции в фиксированный момент времени $t=0,05$ для различных порядков дробной производной (1 — $\alpha=1$; 2 — $\alpha=0,9$; 3 — $\alpha=0,8$; 4 — $\alpha=0,7$; 5 — $\alpha=0,6$; $\alpha_* = \alpha$) приведены на рис. 7. Соответствующие графики функции концентрации показаны на рис. 8. Аналогичные кривые для напоров и концентраций в более поздний момент времени $t=0,5$ приведены на рис. 9 и 10.

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы об особенностях динамики полей фильтрационных давлений и концентраций в процессе консолидации массивов, насыщенных соевыми растворами.

1. В рамках рассматриваемой математической модели с течением времени наблюдаются явления рассеивания первоначального избыточного порового давления (рис. 5, 7, 9), а также возрастания концентрации солей в поровом растворе (рис. 6, 8, 10), что адекватно отображает известную физическую картину процесса консолидации насыщенных соевыми растворами пористых сред [4, 5, 21].

2. Уменьшение численных значений порядков дробных производных α , α_* приводит к ускорению процесса рассеивания полей избыточных напоров в массиве (рис. 7, 9) и ускоренному возрастанию концентрации солевого раствора в точках фильтрационной области (рис. 8, 10) по сравнению с описанием динамики процесса в рамках общепринятых (соответствующие кривые обозначены номером 1 на рис. 7–10) математических моделей, изученных в [1–5, 21].

Таким образом, ускорение динамики моделируемых процессов в рамках рассматриваемой неклассической математической модели фильтрационной консо-

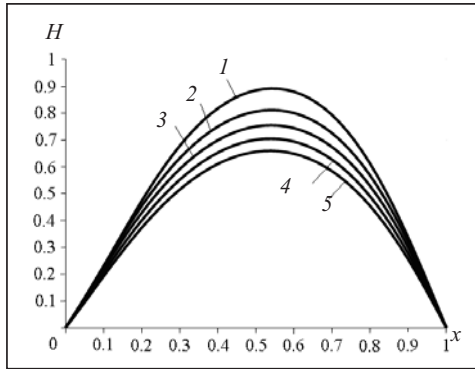


Рис. 9

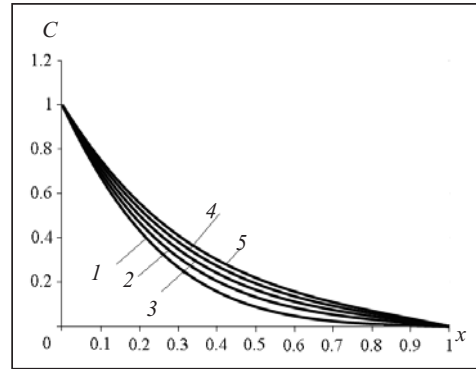


Рис. 10

лидации свидетельствует о том, что данная модель описывает изучаемые процессы в супердиффузионном [10] приближении.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ НАСЫЩЕННЫХ СОЛЕВЫМИ РАСТВОРАМИ МАССИВОВ В УСЛОВИЯХ УЧЕТА ФАКТОРА ПОЛЗУЧЕСТИ

Распространим на случай учета явления ползучести развитый выше подход к моделированию динамики фильтрационно-консолидационных процессов в насыщенных солевыми растворами грунтовых средах на основе дробно-дифференциальной модели с несингулярным ядром.

Как известно, скелет грунтового массива может обладать свойствами ползучести, т.е. способностью деформироваться во времени при постоянных напряжениях [6, 7]. В соответствии с теорией наследственной линейной ползучести изменение коэффициента пористости во времени представим в следующем виде [22, 23]:

$$e(t) = e(0) + \sigma(0)\delta(t, 0) - \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau, \quad (26)$$

где $e(t)$ — коэффициент пористости грунта, $\sigma(t)$ — сумма главных напряжений в скелете, $\delta(t, \tau)$ — величина изменения коэффициента пористости к моменту времени t от единичной нагрузки, приложенной в момент времени τ . Согласно [6, 7, 22, 23] имеем

$$\delta(t, \tau) = a_0 + a_1[1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}]. \quad (27)$$

Здесь a_0 — параметр мгновенной деформации, a_1, γ_1 — параметры ползучести, определяемые экспериментальным путем (γ_1 характеризует скорость нарастания деформаций ползучести [6, 23]).

В одномерном случае уплотнения слоя грунта равномерно распределенной нагрузкой интенсивности $q = \text{const}$ в предположениях основной расчетной модели Флорина [23] имеем $\sigma = q - p = q - \gamma H$. Тогда из соотношения (26) с учетом (27) получаем

$$\frac{\partial e}{\partial t} = a_0 \frac{\partial p}{\partial t} + a_1 \gamma_1 \int_0^t \frac{\partial p}{\partial \tau} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau. \quad (28)$$

Согласно [6, 23] основное уравнение консолидации трехфазной среды записывается в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \beta(1 + \bar{e}) \frac{\partial p}{\partial t} - (1 + \bar{e}) \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

где β — коэффициент объемной сжимаемости газовой компоненты, \bar{e} — среднее значение коэффициента пористости, u_x — скорость фильтрации. Таким образом, из (29) с учетом соотношения (28) имеем [6, 23]

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a_1 \gamma_1}{a_0 + \beta(1 + \bar{e})} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau + \frac{C_v}{k} \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

где $C_v = \frac{(1+\bar{e})k}{\gamma[a_0 + \beta(1+\bar{e})]}$ — коэффициент консолидации. Учитывая в (30) соотношение для скорости фильтрации в виде (1), окончательно находим

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a_1 \gamma_1}{a_0 + \beta(1+\bar{e})} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial \tau} e^{-\gamma_1(t-\tau)} d\tau = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (31)$$

где $\mu = \nu C_v / k$.

Интегро-дифференциальное уравнение (31) — основное определяющее уравнение для напора в рассматриваемой дробно-дифференциальной математической модели консолидации грунтовых сред с учетом осмотических явлений и фактора ползучести скелета. Аналогично случаю насыщенности массива только чистой водой (без учета осмотических явлений) данное уравнение легко можно преобразовать в дифференциальное, однако уже более высокого порядка по временной переменной [6, 23]. Возникающие при этом проблемы получения дополнительного начального условия, необходимого для корректной постановки соответствующих консолидационных краевых задач и физической интерпретации указанного условия, нетривиальны. В связи с этим для моделирования динамики рассматриваемых процессов в дальнейшем используется непосредственно уравнение (31).

Введя обозначения

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\lambda}, \quad \zeta_\alpha = \frac{a_1 \alpha}{a_0 + \beta(1+\bar{e})} \quad (0 < \alpha < 1, \lambda > 0),$$

перепишем (31) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \zeta_\alpha {}^{CF}D_t^{\alpha, \lambda} H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (32)$$

где ${}^{CF}D_t^{\alpha, \lambda}$ — оператор двухпараметрической производной Капуто–Фабрицио [18], определяемый согласно (6).

Сохраняя соответствующее уравнение для концентрации солевого раствора в виде (9), получаем систему уравнений дробно-дифференциальной математической модели фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами грунтовых сред с учетом ползучести скелета, состоящую из уравнений (32), (9). Согласно данной модели консолидационная динамика массива конечной мощности l с проницаемыми границами описывается в области Ω системой уравнений (32), (9) с краевыми условиями (10), (11). В безразмерных переменных, определяемых соотношениями (12), соответствующая краевая задача запишется в следующем виде (знак «штрих» над безразмерными величинами опущен):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \zeta_\alpha {}^{CF}D_t^\alpha H(x, t) = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (33)$$

$$\sigma {}^{CF}D_t^{\alpha_*} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \left(u \frac{\partial H}{\partial x} - \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right) \frac{\partial C}{\partial x} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (34)$$

$$H(0, t) = 0, \quad H(1, t) = 0, \quad H(x, 0) = 1, \quad (35)$$

$$C(0, t) = 1, \quad C(1, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0. \quad (36)$$

Конечно-разностная методика построения приближенного решения краевой задачи (33)–(36) кратко состоит в следующем.

Рассмотрим сеточную область $\omega_{h\tau}$ на основе монотонной разностной схемы Самарского [19] и поставим в соответствие краевой задаче систему разностных уравнений

$$H_t + \zeta_\alpha \Delta_t^{(\alpha)} H = C_v \hat{H}_{\bar{x}x} - \mu \hat{C}_{\bar{x}x} \quad (0 < \alpha \leq 1), \quad (37)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\alpha_*)} C = \chi \hat{C}_{\bar{x}x} + v^+ \hat{C}_x + v^- \hat{C}_{\bar{x}} \quad (0 < \alpha_* \leq 1), \quad (38)$$

где сохранены обозначения (19), (20).

Расписывая в соотношениях (37), (38) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, сводим задачу к решению систем линейных алгебраических уравнений вида (21), (22), где элементы матриц коэффициентов систем и векторов свободных членов определяются равенствами (23), за исключением величин S, F_i^j , которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$F_i^j = \zeta_\alpha \sum_{k=0}^{j-1} \omega_k^{(j)} \frac{H_i^{k+1} - H_i^k}{\tau} + \frac{\mu}{c_\alpha h^2} (C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}) - \frac{(1 + \zeta_\alpha) H_i^j}{\tau},$$

$$S = \frac{1 + \zeta_\alpha}{\tau} + 2A, \quad \zeta_\alpha = \alpha a_1 / [a_0 + \beta(1 + \bar{e})].$$

Дальнейшие преобразования для получения решений систем разностных уравнений полностью совпадают с изложенным подходом при решении задачи (13)–(16).

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ КОНСОЛИДАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Численное моделирование динамики полей избыточных напоров и концентраций в рамках рассматриваемой консолидационной модели с учетом фактора ползучести выполнено, как и выше, для входных данных из работ [4, 21] относительно безразмерных переменных, определяемых соотношениями (12). Некоторые из полученных при этом результатов графически представлены на рис. 11–13. На рис. 11 приведены графики напорной функции для модели (определяемой системой уравнений (13), (14)) без учета ползучести грунтового скелета (кривые 1–3) и для модели (основанной на системе (33), (34)) с учетом фактора ползучести (кривые 1'–3') при $\alpha = \alpha_* = 0,85$ и различных значениях безразмерной переменной t (1, 1' — $t = 0,1$; 2, 2' — $t = 0,5$; 3, 3' — $t = 0,9$).

На рис. 12 показаны графики разности $C_1 - C_2$ концентраций в моделях без учета ползучести грунтового скелета и с учетом этого явления в зависимости от геометрической переменной x для фиксированных значений безразмерной временной переменной t (1, 1' — $t = 0,1$; 2, 2' — $t = 0,5$; 3, 3' — $t = 0,9$; $\alpha = \alpha_* = 0,85$).

На рис. 13 приведены графики напорной функции в модели без учета ползучести (кривые 1–3) и с учетом ползучести грунтового скелета (кривые 1'–3') в фиксированный момент времени $t = 0,05$ для различных значений порядка дробных производных (1, 1' — $\alpha = 1$; 2, 2' — $\alpha = 0,8$; 3, 3' — $\alpha = 0,6$; $\alpha_* = \alpha$).

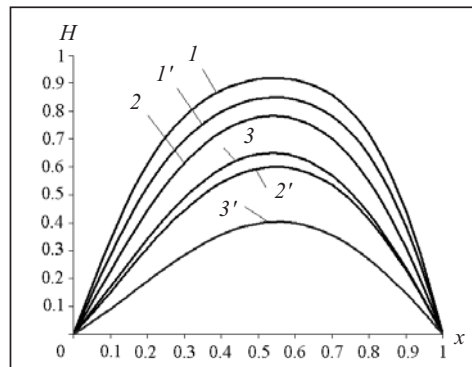


Рис. 11

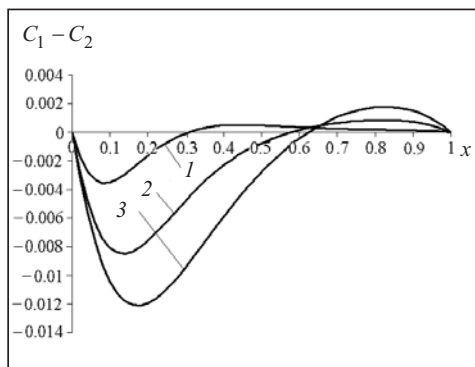


Рис. 12

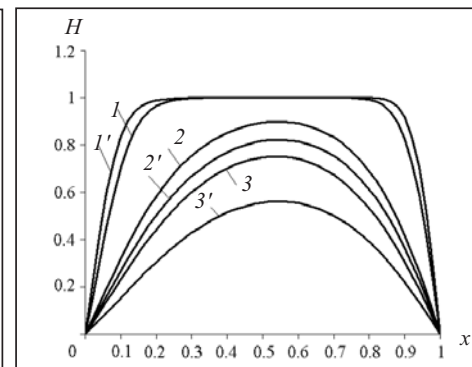


Рис. 13

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы.

1. Учет фактора линейной ползучести грунтового скелета в рассматриваемой математической модели приводит к ускоренному рассеиванию полей избыточных напоров по сравнению со случаем его отсутствия (рис. 11). Относительно полей концентраций солевого раствора в расчетах наблюдались незначительные отклонения $C_1 - C_2$ величин концентраций, полученных согласно различным моделям (без учета и с учетом ползучести грунтового скелета), причем абсолютная величина разности $C_1 - C_2$ и ее знак зависят от координаты рассматриваемой точки в физической плоскости и соответствующего момента времени t (рис. 12).

2. Как и в случае отсутствия фактора ползучести (кривые 1–3 на рис. 13), учет данного фактора (кривые 1'–3' на том же рисунке) приводит к тому, что с уменьшением величин порядков дробных производных имеет место ускорение процесса рассеивания полей избыточных напоров в массиве.

Таким образом, основанная на понятии дробной производной Капуто–Фабрицио консолидационная математическая модель с несингулярным ядром, учитывающая фактор ползучести грунтового скелета, также обладает отчетливо выраженными признаками модели с супердиффузионными свойствами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена математическому моделированию дробно-дифференциальной фильтрационно-консолидационной динамики деформируемых грунтовых сред в условиях насыщенности их солевыми растворами. Для теоретического описания особенностей динамики таких сред предлагается использовать неклассические математические модели с несингулярным ядром, базирующиеся на понятии дробной производной Капуто–Фабрицио [18]. На основе данного подхода разработан методика численного моделирования процесса фильтрационной консолидации насыщенных солевыми растворами массивов конечной мощности как в случае отсутствия, так и при наличии фактора ползучести. Приводятся результаты численных экспериментов, обсуждаются вопросы распараллеливания вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhou Y., Rajapakse R.K., Graham J. A coupled thermo-poroelastic model with thermo-osmosis and thermal-filtration. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35, N 35. P. 4659–4683.
2. Kaczmarek M., Huekel T. Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem. *Transport in Porous Media*. 1998. Vol. 32. P. 49–74.
3. Chassemi A., Diek A. Linear chemo-poroelasticity for swelling shales: theory and application. *Journal Petroleum Sciences Engineering*. 2003. Vol. 38. P. 199–211.
4. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів у процесі фільтрації солевих розчинів. Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. 211 с.
5. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопечкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 283 с.
6. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Москва: Высш. шк., 1991. 447 с.
7. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. Москва: Наука, 1967. 270 с.
8. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Acad. Press, 1999. 341 p.
9. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
10. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
11. Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order. *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Carpinteri A., Mainardi F. (Eds.). Wien: Springer-Verlag, 1997. P. 223–276.
12. Булавацкий В.М. Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравномерных геофильтрационных процессов. *Проблемы управления и информатики*. 2011. № 6. С. 76–83.
13. Bulavatsky V.M., Krivonos Yu.G. Mathematical modeling in the geoinformation problem of the dynamics of geomigration under space-time nonlocality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 4. P. 539–546.

14. Булавацкий В.М. Моделирование динамики некоторых локально-неравновесных геомиграционных процессов на основе дробно-дифференциальной геоинформационной модели. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 6. С. 103–111.
15. Bulavatsky V.M. Fractional differential mathematical models of the dynamics of nonequilibrium geomigration processes and problems with nonlocal boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 81–89.
16. Atangana A., Alkahtani B. New model of groundwater flowing within a confine aquifer: application of Caputo–Fabrizio derivative. *Arabian Journal of Geosciences*. 2015. Vol. 9, N 1. P. 1–6.
17. Atangana A., Baleanu D. Caputo–Fabrizio derivative applied to groundwater flow within confined aquifer. *Journal of Engineering Mechanics*. 2016. D 4016005.
18. Caputo M., Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress Fractional Differentiation and Applications*. 2015. Vol. 1, N 2. P. 73–85.
19. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
20. Zhang Y., Cohen J., Owens J.D. Fast tridiagonal solvers on the GPU. *Proc. of the 15th ACM SIGPLAN Symp. on Principles and Practice of Parallel Programming (PPoPP 2010)*, Jan. 9–14, 2010, Bangalore, India. P. 127–136.
21. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах. Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. 416 с.
22. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1952. 324 с.
23. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Москва: Госстройиздат, 1961. Т. 2. 544 с.

Надійшла до редакції 12.04.2017

В.М. Булавацький, В.О. Богаєнко
ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ
ФІЛЬТРАЦІЙНО-КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В РАМКАХ
МОДЕЛЕЙ З НЕСИНГУЛЯРНИМ ЯДРОМ

Анотація. Побудовано неklasичні математичні моделі для опису дробово-диференційної фільтраційно-консолідаційної динаміки насичених солевими розчинами ґрунтових середовищ, які базуються на понятті дробової похідної Капуто–Фабріціо. Поставлено відповідні крайові задачі для системи дробово-диференційних рівнянь фільтрації та солепереносу. Розроблено методику їхнього чисельного розв’язання, описано підхід до розпаралелювання обчислень. Наведено результати чисельних експериментів з моделювання динаміки досліджуваного процесу.

Ключові слова: математичне моделювання, динаміка фільтраційно-консолідаційних процесів, дробово-диференційні математичні моделі, моделі з несингулярним ядром, крайові задачі, скінченно-різницеві розв’язки, розпаралелювання обчислень.

V.M. Bulavatsky, V.O. Bohaienko
NUMERICAL SIMULATION OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL FILTRATION-CONSOLIDATION
DYNAMICS WITHIN THE FRAMEWORK OF MODELS WITH NON-SINGULAR KERNEL

Abstract. Non-classical mathematical models to describe the fractional-differential filtration-consolidation dynamics of soil media saturated with saline solutions are constructed based on the concept of the fractional derivative of Caputo–Fabrizio. The corresponding boundary-value problems for the system of fractional-differential equations of filtration and salt transfer are posed, the technique for their numerical solution is developed, an approach to the parallelization of computations is presented and the results of numerical experiments on modeling the dynamics of the process are given.

Keywords: mathematical modeling, dynamics of filtration-consolidation processes, fractional-differential mathematical models, models with non-singular kernel, boundary-value problems, finite difference solutions, parallelization of computations.

Булавацький Володимир Михайлович,
 доктор техн. наук, професор, ведучий научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: v_bulav@ukr.net.

Богаєнко Всеволод Александрович,
 кандидат техн. наук, старший научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: sevab@ukr.net.