УДК 519.21+62

И.В. САМОЙЛЕНКО, Я.М. ЧАБАНЮК, А.В. НИКИТИН

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИССИПАТИВНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ В СХЕМЕ ПУАССОНОВОЙ АППРОКСИМАЦИИ*

Аннотация. Исследована асимптотическая диссипативность дограничной нормированной стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде, существенно влияющей на поведение граничного процесса.

Ключевые слова: диссипативность, марковский процесс, генератор, пуассонова аппроксимация.

ВВЕДЕНИЕ

Важным свойством детерминированных систем является свойство их диссипативности, изучением которого занимались, в частности, Р.З. Хасьминский и В.А. Плисс. Понятие диссипативности детерминированной системы в математических терминах ввели Н. Леймнсон, Р. Рейссиг, Г. Сансонс и Р. Конти. Т. Йошизава предложил изучать свойства диссипативности систем с использованием устойчивости по Ляпунову, в работах Р.З. Хасьминского рассматривается диссипативность стохастической системы с использованием свойств функции Ляпунова детерминированной системы.

Анализ асимптотических характеристик случайных эволюций с влиянием, которое определяется равномерно эргодическим марковским процессом, проведен в [1–3]. В частности, рассмотрена устойчивость, сходимость к точке равновесия и асимптотическая нормальность таких процессов.

Таким образом, актуален анализ диссипативности диффузионных процессов с марковскими переключениями в схеме серий с малым параметром [4–6]. Случайные процессы с марковскими переключениями позволяют рассмотреть более широкий класс прикладных задач с точки зрения разработки методов моделирования и анализа таких систем.

В работе [7] изучен вопрос об асимптотическом поведении стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде. Показано, что предельный процесс $\widehat{u}(t)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$d\widehat{u}(t) = [\widehat{C}(\widehat{u}(t)) + \widetilde{a}\,]dt + \int_R \mathrm{v}\widetilde{\nu}(dt, d\mathrm{v}).$$

Таким образом, возникает ряд вопросов о том, как поведение предельного процесса зависит от допредельной нормированной стохастической эволюционной системы в эргодической марковской среде. В настоящей работе изучается вопрос асимптотической диссипативности допредельной системы в схеме пуассоновой аппроксимации.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Стохастическая эволюционная система в эргодической марковской среде задается стохастическим дифференциальным уравнением [8]

$$du^{\varepsilon}(t) = C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon))dt + d\eta^{\varepsilon}(t), \;\; u^{\varepsilon}(t) \in \mathrm{R}\,, \tag{1}$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента Украины (проект 0117U007015 Государственного фонда фундаментальных исследований).

где $u^{\varepsilon}(t)$ — случайная эволюция, $t \geq 0$; $\varepsilon > 0$ — малый параметр серий; $C(u, \cdot) \in \in C^2(\mathrm{R}^d)$ — функция регрессии; $x(t)$ — равномерно эргодический марковский процесс в стандартном фазовом пространстве $(X, \mathbf{X})$, который определен генератором [1]

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)] \tag{2}$$

на банаховом пространстве $B(X)$ вещественнозначных ограниченных функций $\varphi(x)$ с супремум-нормой $\|\varphi\| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$ [2].

Стохастическое ядро $P(x, B)$, $x \in X$, $B \in \mathbf{X}$, определяет равномерно эргодическую вложенную цепь Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$, со стационарным распределением $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$. Стационарное распределение $\pi(B)$, $B \in \mathbf{X}$, марковского процесса $x(t)$, $t \geq 0$, определяется соотношением [2]

$$\pi(dx) q(x) = q \rho(dx), \; q = \int_X \pi(dx) q(x).$$

Обозначим R_0 потенциальный оператор генератора $\mathbf{Q}$ из (2), который определяется равенством [4]: $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, где $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)\mathbf{1}(x)$ — проектор на подпространство $N_Q = \{\varphi \colon \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулей оператора $\mathbf{Q}$.

ИМПУЛЬСНЫЙ ПРОЦЕСС ВОЗМУЩЕНИЙ

Импульсный процесс возмущений (ИПВ) $\eta^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, в пуассоновой схеме аппроксимации задается соотношением

$$\eta^{\varepsilon}(t) = \int_0^t \eta^{\varepsilon}(ds, x(s/\varepsilon)), \tag{3}$$

где семейство процессов с независимыми приращениями $\eta^{\varepsilon}(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, определяется генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(\omega) = \varepsilon^{-1} \int_R (\varphi(\omega + v) - \varphi(\omega)) \Gamma^{\varepsilon}(dv, x), \; x \in X, \tag{4}$$

и удовлетворяют условиям пуассоновой аппроксимации (детальнее см. [3], [7]).

Как уже отмечалось, предельная эволюция системы (1) определяется решением дифференциального уравнения

$$d\widehat{u}(t) = [\widehat{C}(\widehat{u}(t)) + \widehat{a}]dt + \int_R \mathrm{v}\widetilde{\nu}(dt, d\mathrm{v}),$$

где сдвиг $\widehat{C}(u) + \widehat{a}$ определяется равенствами

$$\widehat{C}(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x), \; \widehat{a} = \int_X \pi(dx) a(x).$$

Скачки процесса определяются мерой, которая удовлетворяет условиям

$$\mathbf{E}\widetilde{\nu}(dt, d\mathrm{v}) = dt \widetilde{\Gamma}_0(d\mathrm{v}), \; \widetilde{\Gamma}_0(v) = \int_X \pi(dx) \Gamma_0(v, x),$$

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u, x)\varphi'(u).$$

Отметим, что

$$\Gamma^1(x)\varphi(\cdot) = a(x)\varphi'(\cdot) + \int_R (\varphi(\cdot + v) - \varphi(\cdot) - v\varphi'(\cdot)) \Gamma_0(dv, x).$$

Теорема 1. Пусть существует функция Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d)$ системы

$$\frac{du}{dt} = \alpha(u), \tag{5}$$

где $\alpha(u) = \widehat{C}(u) + \widehat{a}$, которая удовлетворяет условиям

C1: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \widehat{\mathrm{L}} V(u)| < M_1 V(u)$, $M_1 > 0$;

C2: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u)| < M_2 V(u)$, $M_2 > 0$;

C3: $|\Gamma_u^1(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u)| < M_3 V(u)$, $M_3 > 0$;

C4: $|\mathbf{C}(x) R_0 \widehat{\mathrm{L}} V(u)| < M_4 V(u)$, $M_4 > 0$;

C5: $|\mathbf{C}(x) R_0 \Gamma_u^1(x) V(u)| < M_5 V(u)$, $M_5 > 0$;

C6: $|\mathbf{C}(x) R_0 \mathbf{C}(x) V(u)| < M_6 V(u)$, $M_6 > 0$.

Пусть выполняются неравенства

$$\alpha(u) V'(u) < -c_1 V(u), \tag{6}$$

$$\left| \int_R \mathrm{v}^2 \Gamma_0(d\mathrm{v}, x) \right| < c_3(x), \tag{7}$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ и $c_3 = \int_X \pi(dx) c_3(x) > 0$.

Тогда система (1) асимптотически диссипативна.

Лемма 1. Генератор трехкомпонентного марковского процесса $u^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon)$, $\eta^\varepsilon(t, x)$, $t \ge 0$, имеет представление

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) + \Gamma_\omega^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) +$$
$$+ \mathbf{C}(x)\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x), \tag{8}$$

где $\Gamma_w^\varepsilon(x)$ — генератор семейства процессов с независимыми приращениями (3), действующий по переменной w, а $\Gamma_u^\varepsilon(x)$ — эквивалентный предыдущему генератор семейства процессов с независимыми приращениями (3), действующий по переменной u.

Доказательство. Генератор марковского процесса на возмущенной тест-функции определяется из соотношения [6]

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u, w, x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) -$$
$$- \varphi(u, w, x) | u^\varepsilon(t) = u,\ \eta^\varepsilon(t) = w,\ x(t/\varepsilon) = x].$$

В условном математическом ожидании прибавим и вычтем $\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)$:

$$\mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x) | u^\varepsilon(t) = u, \eta^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon) = x] =$$
$$= \mathrm{E}[\varphi(u_{t+\Delta}^\varepsilon, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] -$$
$$- \mathrm{E}[\varphi(u, w_{t+\Delta}^\varepsilon, x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(u, w, x)].$$

Разложение $u_{t+\Delta}^\varepsilon$ имеет вид

$$u_{t+\Delta}^\varepsilon = u + C(u, x)\Delta + \Delta w + o(\Delta).$$

Полученное выражение подставим в первое слагаемое условного математического ожидания

$$\mathrm{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \mathrm{E}[\varphi(u + C(u,x)\Delta + \Delta w + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \mathrm{E}[\varphi(z + \Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})],$$

где $z = u + C(u,x)\Delta + o(\Delta)$.

В полученном выражении прибавим и вычтем $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$:

$$\mathrm{E}[\varphi(u^{\varepsilon}_{t+\Delta}, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \mathrm{E}[\varphi(z + \Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] +$$

$$+ \mathrm{E}[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})].$$

Поскольку генератор $\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)$ имеет вид

$$\Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}(\mathrm{E}[\varphi(u+\Delta u, w, x) - \varphi(u,w,x)]),$$

для предела первого слагаемого получим

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(z + \Delta w, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] = \Gamma^{\varepsilon}_{u}(x)\varphi(u,w,x).$$

Разложим $\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})$ по формуле Тэйлора

$$\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) =$$

$$= \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta).$$

Подставляя в выражение $\mathrm{E}[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})]$ полученное разложение, имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(z, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) +$$

$$+ o(\Delta) - \varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi'(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta)) + o(\Delta)] = C(u,x)\varphi'(u,w,x).$$

Аналогично из соотношения для генератора $\Gamma^{\varepsilon}_{w}(x)$ и очевидного соотношения для генератора марковского процесса $\lim\limits_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(w, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(w,x)$ имеем

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u, w^{\varepsilon}_{t+\Delta}, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u, w, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) + \varphi(u, w, x^{\varepsilon}_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u, w_{t+\Delta}^{\varepsilon}, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u, w, x_{t+\Delta}^{\varepsilon})] +$$

$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}\mathrm{E}[\varphi(u, w, x_{t+\Delta}^{\varepsilon}) - \varphi(u, w, x)] = \Gamma_w^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x).$$

Отсюда $\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)$ имеет вид (8).

Следствием леммы 2 из [7] является следующая лемма.

Лемма 2. Генератор (8) допускает асимптотическое представление

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) +$$

$$+\Gamma_u^1(x)\varphi(u, w, x) + \mathbf{C}(u)\varphi(u, w, x) + \Gamma_{\omega}^1(x)\varphi(u, w, x) + \gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(w, x),$$

где

$$\mathbf{C}(u)\varphi(u) = C(u, x)\varphi'(u),$$

а остаточный член $||\gamma^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varphi(u, w, \cdot) \in \mathrm{C}^3(R)$.

Усеченный генератор

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w, x) + \Gamma_u^1(x)\varphi(u, w, x) +$$

$$+\mathbf{C}(u)\varphi(u, \omega, x) + \Gamma_{\omega}^1(x)\varphi(u, w, x). \qquad (9)$$

Лемма 3. Решение проблемы сингулярного возмущения для оператора $\mathbf{L}_0^{\varepsilon}(x)$ на возмущенной тест-функции

$$\varphi^{\varepsilon}(u, w, x) = \varphi(u, w) + \varepsilon\varphi_1(u, w, x) \qquad (10)$$

определяется равенством

$$\mathrm{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u, w, x) = \widehat{\mathrm{L}}\varphi(u, w) + \varepsilon\theta^{\varepsilon}(x)\varphi(u, w),$$

где

$$\theta^{\varepsilon}(x) = \Gamma_u^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x) - \Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x) - \Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_w^1(x) +$$
$$+\mathbf{C}(x)R_0\widehat{L} - \mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x) - \mathbf{C}(x)R_0\Gamma_w^1(x) + \qquad (11)$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}} - \Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x) - \Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x).$$

Доказательство. Подставим (10) в (9):

$$\mathrm{L}_0^{\varepsilon}(x)\varphi^{\varepsilon}(u, w, x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}[\varphi(u, w) + \varepsilon\varphi_1(u, w, x)] + \Gamma_u^1(x)[\varphi(u, w) + \varepsilon\varphi_1(u, w, x)] +$$

$$+\mathbf{C}(x)[\varphi(u, w) + \varepsilon\varphi_1(u, w, x)] + \Gamma_w^1(x)[\varphi(u, w) + \varepsilon\varphi_1(u, w, x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1}\mathbf{Q}\varphi(u, w) + [\mathbf{Q}\varphi_1(u, w, x) + \Gamma_u^1(x)\varphi(u, w) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, w) + \Gamma_{\omega}^1(x)\varphi(u, w)] +$$

$$+\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u, w, x) + \mathbf{C}(x)\varphi_1(u, w, x) + \Gamma_w^1(x)\varphi_1(u, w, x)].$$

Для существования предельного оператора $\widehat{\mathrm{L}}\varphi(u, w)$ необходимо, чтобы при $\varepsilon \to 0$ выполнялось условие $\mathbf{Q}\varphi(u, w) = 0$, т.е. функция принадлежала нуль-пространству оператора $\mathbf{Q}$. Тогда

$$\widehat{\mathrm{L}}\varphi(u, w) = \mathbf{Q}\varphi_1(u, w, x) + \Gamma_u^1(x)\varphi(u, w) + \mathbf{C}(x)\varphi(u, w) + \Gamma_w^1(x)\varphi(u, w),$$

откуда имеем

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u, w, x) = [\widehat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]\varphi(u, w).$$

Согласно условию разрешимости для последнего уравнения имеем

$$\Pi\mathbf{Q}\Pi\varphi_1(u, w, x) = 0 = \Pi[\widehat{\mathrm{L}} - \Gamma_u^1(x) - \mathbf{C}(x) - \Gamma_w^1(x)]\Pi\varphi(u, w).$$

Таким образом,

$$\widehat{\mathrm{L}}\varphi(u,w)=\Pi\Gamma_u^1(x)\varphi(u,w)+\Pi\mathbf{C}(x)\varphi(u,w)+\Pi\Gamma_w^1(x)\varphi(u,w),$$

$$\varphi_1(u,w,x)=R_0[\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]\varphi(u,w).$$

Отсюда получим, что последнее слагаемое

$$\varepsilon[\Gamma_u^1(x)\varphi_1(u,w,x)+\mathbf{C}(x)\varphi_1(u,w,x)+\Gamma_\omega^1(x)\varphi_1(u,w,x)]=$$

$$=\varepsilon[\Gamma_u^1(x)R_0[\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]+\mathbf{C}(x)R_0[\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]+$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0[\widehat{\mathrm{L}}-\Gamma_u^1(x)-\mathbf{C}(x)-\Gamma_w^1(x)]]\varphi(u,w).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Ввиду выполнения условий С1–С6 теоремы 1 справедлива ограниченность остаточного члена (11)

$$||\theta^\varepsilon(x)V(u)||=$$

$$=|\Gamma_u^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}V(u)-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)-\Gamma_u^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)-\Gamma_u^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u)+$$

$$+\mathbf{C}(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}V(u)-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)-\mathbf{C}(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)-\mathbf{C}(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u)+$$

$$+\Gamma_w^1(x)R_0\widehat{\mathrm{L}}V(u)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_u^1(x)V(u)-\Gamma_w^1(x)R_0\mathbf{C}(x)V(u)-\Gamma_w^1(x)R_0\Gamma_w^1(x)V(u)|\le$$

$$\le M_1V(u)+M_2(x)V(u)+M_3V(u)+M_4V(u)+M_5(x)V(u)+M_6V(u),$$

откуда

$$||\theta^\varepsilon(x)V(u)||\le MV(u), \tag{12}$$

где $M=M_1+M_2+M_3+M_4+M_5+M_6$.

Из утверждения леммы 3, выражения (12) и выполнения условий модельной теоремы [1] имеем слабую сходимость

$$(u^\varepsilon(t),\eta^\varepsilon(t))\Rightarrow(u(t),\ \eta(t)),\ \varepsilon\to0.$$

Пусть теперь $\dfrac{d^{(1)}V(u)}{du}$ — производная функции Ляпунова, вычисленная вдоль траектории системы (4). Так как функция Ляпунова должна удовлетворять условию Липшица

$$|V(u_2)-V(u_1)|<K|u_2-u_1|,$$

где K является постоянной величиной, то выполняется следующее соотношение

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du}\le\frac{dV(u)}{du}+K[\widehat{a}+\int_R \mathrm{v}^2\widetilde{\Gamma}_0(d\mathrm{v})]dt.$$

Здесь $\dfrac{dV(u)}{du}$ — производная функции Ляпунова, вычисленная вдоль траектории детерминированной системы (5), $\widetilde{\Gamma}_0(d\mathrm{v})=\int_X\pi(dx)\Gamma_0(dv,x)$.

Согласно условиям (6) и (7) теоремы получим

$$\frac{d^{(1)}V(u)}{du}\le-c_1V(u)+K[c_2+\widehat{c}_3]|dt|.$$

Значит,

$$V(u)\le V(u_0)\exp\{-c_1t\}+K[c_2+\widehat{c}_3]\int_0^t\exp\{-c_1(t-s)\}ds.$$

Отсюда следует оценка

$$P\{|u(t)|>R\}\le\frac{V(u)}{\inf\limits_{u\in\mathrm{R}^d}V(u)},\ R\to\infty.$$

Следовательно, система (4) является диссипативной.

Из выполнения условий модельной предельной теоремы [1] и диссипативности предельного процесса следует, что система (1) асимптотически диссипативна.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При определении генератора предельного процесса становится ясным, что данный процесс является пуассоновым, что в свою очередь позволяет получить условия диссипативности предельной эволюции, а также асимптотическую диссипативность начального процесса из сходимости его к предельному. Важным условием диссипативности является ограниченность вторых моментов меры скачков допредельного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic models of systems. Dordrecht: Kluwer, 1999. 185 p.
2. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore: World Scientific, 2005. 330 p.
3. Koroliuk V.S., Limnios N., Samoilenko I.V. Levy and Poisson approximations of switched stochastic systems by a semimartingale approach. *Comptes Rendus Mathematique*. 2016. Vol. 354. P. 723–728.
4. Nikitin A.V., Khimka U.T. Asymptotics of normalized control with Markov switchings. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2017. Vol. 68, N 8. P. 1252–1262.
5. Nikitin A.V. Asymptotic properties of a stochastic diffusion transfer process with an equilibrium point of a quality criterion. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 650–656.
6. Чабанюк Я.М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення. *Доп. НАН України*. 2004. № 12. С. 35–40.
7. Самойленко И.В., Чабанюк Я.М., Никитин А.В., Химка У.Т. Дифференциальные уравнения со стохастическими малыми добавками в условиях пуассоновой аппроксимации. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 93–99.
8. Семенюк С.А., Чабанюк Я.М. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями. *Вісн. Національного ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Фізико-математичні науки*. 2009. Вип. 660, № 660. С. 56–60.

Надійшла до редакції 12.04.2017

І.В. Самойленко, Я.М. Чабанюк, А.В. Нікітін

АСИМПТОТИЧНА ДИСИПАТИВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ У СХЕМІ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Анотація. Досліджено асимптотичну дисипативність дограничної нормованої стохастичної еволюційної системи в ергодичному марковському середовищі, яка суттєво впливає на поведінку граничного процесу.

Ключові слова: дисипативність, марковський процес, генератор, пуассонова апроксимація.

I.V. Samoilenko, Y.M. Chabanyuk, A.V. Nikitin

ASYMPTOTIC DISSIPATION FOR RANDOM PROCESSES WITH IMPULSE PERTURBATION IN THE POISSON APPROXIMATION SCHEME

Abstract. The authors analyze asymptotic dissipation of pre-limit normalized stochastic evolution system in ergodic Markov environment, which significantly influences the behavior of the limiting process.

Keywords: dissipativity, Markov process, generator, Poisson approximation.

Самойленко Игорь Валерьевич,
доктор физ.-мат. наук, доцент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: isamoil@i.ua.

Чабанюк Ярослав Михайлович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Государственного Университета Люблинская Политехника (Politechika Lubelska), Люблин, Республика Польша, e-mail: yaroslav.chab@gmail.com.

Никитин Анатолий Владимирович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: nikitin2505@gmail.com.