

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВЕЙВЛЕТОВ, ОСНОВАННЫХ НА ПОЛИНОМАХ ЯКОБИ

Аннотация. Исследованы свойства вейвлетов, основанных на полиномах Якоби. Рассмотрены условия, при которых эти вейвлеты являются взаимно-ортогональными, а также условия, при которых базис вейвлетов характеризуется минимальным отношением Ритца. Эти задачи приводят к решению систем нелинейных уравнений с помощью метода, ранее предложенного авторами.

Ключевые слова: вейвлеты, полиномы Якоби, условия ортогональности, поиск корней.

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия характеризуются развитием теории вейвлетов и ее практических приложений. Сфера применения вейвлетов расширяется вследствие их свойства описывать локальное поведение сигналов в различных временных масштабах, что позволяет их использовать для задач телекоммуникаций, геофизики, астрофизики, обработки аудио- и видеосигналов, биомедицины и т.д. [1].

Каждая практическая задача требует применения особого класса вейвлетов. В данной статье рассматривается важный класс вейвлетов — полиномиальные, основанные на полиномах Якоби. При проведении анализа использовалась теория ортогональных полиномов, представленная в работах [2, 3]. Целью данного исследования является получение ответов на следующие вопросы:

- при каких условиях рассматриваемые вейвлеты являются ортогональными?
- при каких параметрах вейвлетов достигается минимальное отношение Ритца?

Поиск ответов на эти вопросы приводит к решению систем нелинейных уравнений. Некоторые из полученных систем уравнений решаются предложенным авторами методом [4].

В разд. 1 даны предварительные сведения о полиномиальных вейвлетах, основанных на многочленах Якоби. Вопросы ортогональности и минимизации отношения Ритца рассмотрены в разд. 2 и 3 соответственно.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Следуя работе [2], используем определение полиномиального вейвлета n -го порядка:

$$\psi_{n,r}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} P_k(t_r) P_k(x)$$

для некоторого фиксированного набора параметров t_1, t_2, \dots, t_n . Полином Якоби n -го порядка, зависящий от параметров α, β , определяется следующим образом:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^m, \quad (1)$$

где $\Gamma(\cdot)$ обозначена гамма-функция. Кроме того, полином (1) обычно нормируется множителем

$$K = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1) n!}}$$

так, что выполняется условие ортонормированности $\langle P_n^{(\alpha, \beta)}(x), P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \rangle = \delta_n^m$. Также далее используется матрица B_n , определяемая следующим образом:

$$B_n = \begin{pmatrix} P_{n+1}(t_1) & \dots & P_{n+1}(t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{2n}(t_1) & \dots & P_{2n}(t_n) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

2. УСЛОВИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

В соответствии с [2, теорема 2.8а] для ортогональности полиномиальных вейвлетов необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\psi_{n,r}(t_s) = 0, \quad s, r = 1, 2, \dots, n; \quad s \neq r. \quad (3)$$

Условие (3) выполняется тогда и только тогда, когда матрица $B_n^T B_n$ является диагональной, матрица B_n определяется формулой (2). Далее рассматриваются условия ортогональности (3) для различных размерностей n .

2.1. Случай $n = 2$. Для данного случая условия (3) сводятся к соотношению

$$\psi_{n,1}(t_2) = 0,$$

т.е.

$$P_3(t_1)P_3(t_2) + P_4(t_1)P_4(t_2) = 0. \quad (4)$$

На рис. 1 кружками показаны линии ортогональности, соответствующие (4), а точками — линейная зависимость для $\alpha = 0.5, \beta = 1$. Заметим, что кривые линейной зависимости характеризуются соотношением $P_3(t_1)P_4(t_2) - P_3(t_2)P_4(t_1) = 0$, следующим из условия $\det(B_2) = 0$ [2].

Лемма 1 [3]. Полином $Q(x) = P_4(x) + \tau P_3(x)$ имеет как минимум три корня на отрезке $[-1, 1]$ для произвольного действительного τ .

На основании леммы 1 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Для каждого t_1 существуют как минимум три значения t_2 , удовлетворяющие условию ортогональности (4).

Доказательство. Вначале рассмотрим частный случай, при котором $P_4(t_1) = 0$. Тогда соотношение (3) сводится к $P_3(t_1)P_3(t_2) = 0$. В соответствии со свойствами ортогональных полиномов условия $P_3(t_1) = 0$ и $P_4(t_1) = 0$ никогда не выполняются одновременно. Таким образом, уравнение $P_3(t_2) = 0$ имеет согласно [3, теорема 5.2] три корня.

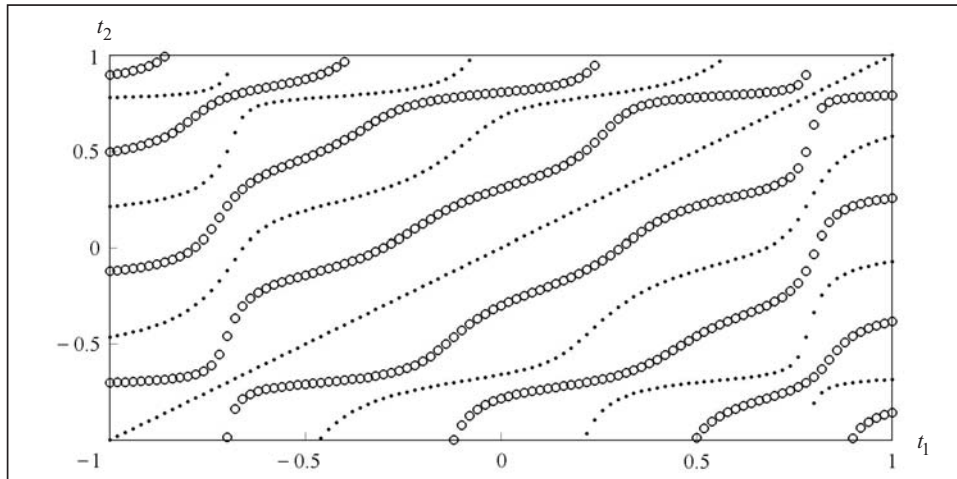


Рис. 1. Линии, соответствующие условию ортогональности (4) (отмечены кружками) и линейной зависимости (отмечены точками) для $\alpha = 0.5, \beta = 1$

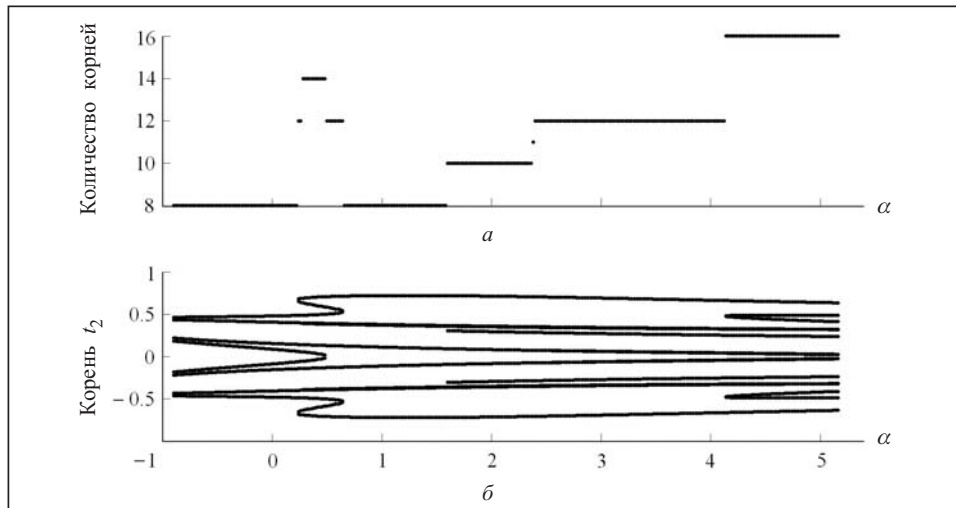


Рис. 2. Пример изменения количества корней (а) и график изменения второго корня системы (4) для различных α (б)

Теперь рассмотрим случай, при котором $P_4(t_1) \neq 0$. Тогда условие (3) можно представить в виде

$$P_4(t_2) + \tau P_3(t_2) = 0, \quad (5)$$

где $\tau = P_3(t_1)/P_4(t_1)$. Но согласно [3, теорема 5.2] уравнение (5) имеет как минимум три корня на отрезке $[-1, 1]$, что и требовалось доказать.

2.2. Случай $n = 3$. В этом случае соотношение (3) приводит к системе из трех уравнений с тремя неизвестными — t_1, t_2, t_3 :

$$\begin{aligned} P_4(t_2)P_4(t_1) + P_5(t_2)P_5(t_1) + P_6(t_2)P_6(t_1) &= 0, \\ P_4(t_3)P_4(t_1) + P_5(t_3)P_5(t_1) + P_6(t_3)P_6(t_1) &= 0, \\ P_4(t_3)P_4(t_2) + P_5(t_3)P_5(t_2) + P_6(t_3)P_6(t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения этой системы применен разработанный авторами метод решения систем нелинейных уравнений, основанный на операторе Кравчика [4]. Численный анализ показал, что для различных $\alpha, \beta > 0$ имеет место различное количество корней системы (6).

На рис. 2 приведен график количества корней системы (6), а также график изменения второго корня (t_2) для $\alpha = \beta$ от -0.9 до 5.16 с шагом 0.02 . Интерес вызывает «скачок» количества корней от 8 до 12 , происходящий при $\alpha \approx 0.222$ (проводилась дополнительная проверка с выбором шага для α , равным 0.00001).

2.3. Случай $n = 4$. В этом случае формула (3) сводится к переопределенной системе из шести уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} P_5(t_2)P_5(t_1) + P_6(t_2)P_6(t_1) + P_7(t_2)P_7(t_1) + P_8(t_2)P_8(t_1) &= 0, \\ P_5(t_3)P_5(t_1) + P_6(t_3)P_6(t_1) + P_7(t_3)P_7(t_1) + P_8(t_3)P_8(t_1) &= 0, \\ P_5(t_3)P_5(t_2) + P_6(t_3)P_6(t_2) + P_7(t_3)P_7(t_2) + P_8(t_3)P_8(t_2) &= 0, \\ P_5(t_4)P_5(t_1) + P_6(t_4)P_6(t_1) + P_7(t_4)P_7(t_1) + P_8(t_4)P_8(t_1) &= 0, \\ P_5(t_4)P_5(t_2) + P_6(t_4)P_6(t_2) + P_7(t_4)P_7(t_2) + P_8(t_4)P_8(t_2) &= 0, \\ P_5(t_4)P_5(t_3) + P_6(t_4)P_6(t_3) + P_7(t_4)P_7(t_3) + P_8(t_4)P_8(t_3) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Прежде всего существуют решения для следующих случаев:

— полином Чебышева второго рода ($\alpha = 0.5, \beta = 0.5$);

— полином Чебышева третьего рода ($\alpha = -0.5, \beta = 0.5$);

— полином Чебышева четвертого рода ($\alpha = 0.5, \beta = -0.5$).

Наличие решений для этих случаев доказано далее. Для того чтобы найти другие пары (α, β) , при которых система (7) имеет решение, рассмотрим целевую функцию

$$J(\alpha, \beta, t_1, t_2, t_3, t_4) = \sum_{i \neq j} C_{ij}^2, \quad (8)$$

представляющую собой сумму квадратов поддиагональных элементов матрицы C_n при $C_n = B_n^T B_n$.

Теперь рассмотрим функцию

$$f(\alpha, \beta) = \min_{t_1, t_2, t_3, t_4} J(\alpha, \beta, t_1, t_2, t_3, t_4).$$

На рис. 3 изображен график функции $f(\alpha, \alpha)$ для $\alpha \in (-1, 10]$. Минимизация функции (8) осуществлялась с помощью утилиты `fminsearch` программного пакета Matlab. Поскольку сходимость этой функции зависит от начального приближения, для каждого α рассмотрено 500 случайных начальных приближений. В результате найдены шесть значений α , для которых предполагается наличие решений системы (7). Они представлены в табл. 1.

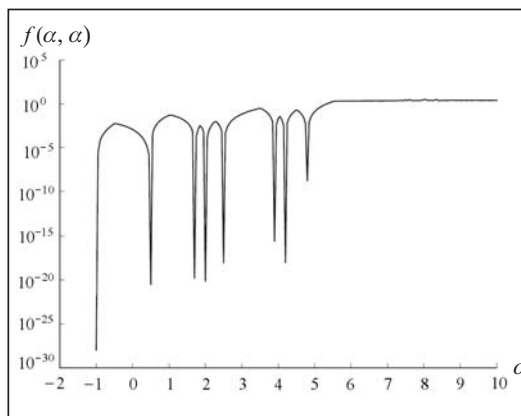


Рис. 3. График логарифма функции $f(\alpha, \alpha)$

Таблица 1

Параметры	Предполагаемые решения системы (7) для случая $\alpha = \beta$								
	α	t_1	t_2	t_3	t_4	$f(\alpha, \alpha)$	$f(\alpha, \alpha)$	$f(\alpha, \alpha)$	$f(\alpha, \alpha)$
α	-1	-0.626	1.715	2.018	2.506	3.909	4.191	4.797	
t_1	-1	-0.453	-0.896	-0.696	-0.704	-0.760	-0.804	-0.653	
t_2	-0.131	-0.242	-0.531	-0.546	-0.568	-0.644	-0.711	-0.534	
t_3	-0.131	-0.503	0.331	0.674	0.568	0.644	0.239	0.649	
t_4	1	1.261	0.766	0.806	0.704	0.760	0.645	0.755	
$f(\alpha, \alpha)$	10^{-23}	10^{-18}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-19}	10^{-16}	10^{-19}	10^{-9}	

2.4. Случай произвольного n для полиномов Чебышева. Покажем, что матрицу $B_n^T B_n$ можно привести к диагональному виду для полиномов Чебышева второго, третьего и четвертого родов.

Теорема 2. Для произвольного $n \geq 4$ и $(\alpha, \beta) \in \{(-0.5, 0.5), (0.5, -0.5), (0.5, 0.5)\}$ матрица $B_n^T B_n$ становится диагональной для t_1, t_2, \dots, t_n , являющихся корнями полинома $P_n^{\alpha, \beta}(x)$.

Доказательство. Случай $\alpha = 0.5, \beta = 0.5$ описан в [2].

Рассмотрим случай $\alpha = -0.5, \beta = 0.5$, которому соответствуют полиномы Чебышева третьего рода:

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos(n+1/2)\theta}{\cos(\theta/2)}, \quad t = \cos \theta.$$

Нули полинома $P_n(x)$ имеют вид

$$\theta_r = \frac{\pi(2r+1)}{2n+1}, \quad r=0, 1, \dots, n-1.$$

Подставляя эти значения в скалярное произведение, получаем выражение для элемента (r, s) матрицы $B_n^T B_n$:

$$\begin{aligned} (B_n^T B_n)_{r,s} &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{n+k+1}(t_r) P_{n+k+1}(t_s) = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2r+1)}{2n+1} \cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2s+1)}{2n+1}}{\pi \cos \frac{\pi(2r+1)}{2n+1} \cos \frac{\pi(2s+1)}{2n+1}} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2r-2s)}{2n+1} + \cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2r+2s+2)}{2n+1} \right)}{2\pi \cos \frac{\pi(2r+1)}{2n+1} \cos \frac{\pi(2s+1)}{2n+1}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \left((-1)^{r+s} \cos \frac{2\pi k(r-s)}{2n+1} + (-1)^{r+s+1} \cos \frac{2\pi k(r+s+1)}{2n+1} \right)}{2\pi \cos \frac{\pi(2r+1)}{2n+1} \cos \frac{\pi(2s+1)}{2n+1}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Воспользуемся формулой суммирования для ядер Дирихле:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin x/2} - \frac{1}{2}.$$

Применяя ее для $x = 2\pi / (2n+1)$, получаем

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi lk}{2n+1} = \begin{cases} -1/2, & \text{если } l \neq 0, \\ n, & \text{если } l = 0. \end{cases}$$

Подставляя этот результат в (9), имеем

$$(B_n^T B_n)_{r,s} = \frac{(n+1/2)\delta_s^r}{2\pi \cos^2 \frac{\pi(2r+1)}{2n+1}} = \frac{2n+1}{4\pi \cos^2 \frac{\pi(2r+1)}{2n+1}} \delta_s^r,$$

откуда следует, что

$$B_n^T B_n = \text{diag} \left(\frac{2n+1}{4\pi \cos^2 \frac{\pi(2r+1)}{2n+1}} \right)_{r=0, 1, \dots, n-1},$$

что завершает доказательство для случая $\alpha = -0.5, \beta = 0.5$.

Теперь рассмотрим случай $\alpha = 0.5, \beta = -0.5$, которому соответствуют полиномы Чебышева четвертого рода:

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}, \quad t = \cos \theta.$$

Нули полинома $P_n(x)$ имеют вид

$$\theta_r = \frac{2\pi r}{2n+1}, \quad r=0, 1, \dots, n-1.$$

Подставляя эти значения в скалярное произведение, получаем выражение для элемента (r, s) матрицы $B_n^T B_n$:

$$\begin{aligned} (B_n^T B_n)_{r,s} &= \sum_{k=0}^{n-1} P_{n+k+1}(t_r) P_{n+k+1}(t_s) = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2\pi(k+n+3/2)(r+1)}{2n+1} \sin \frac{2\pi(k+n+3/2)(s+1)}{2n+1}}{\pi \sin \frac{\pi(r+1)}{2n+1} \sin \frac{\pi(s+1)}{2n+1}} = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2r-2s)}{2n+1} - \cos \frac{\pi(k+n+3/2)(2r+2s+4)}{2n+1} \right)}{2\pi \sin \frac{\pi(r+1)}{2n+1} \sin \frac{\pi(s+1)}{2n+1}} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n \left((-1)^{r+s} \cos \frac{2\pi k(r-s)}{2n+1} - (-1)^{r+s} \cos \frac{2\pi k(r+s+1)}{2n+1} \right)}{2\pi \sin \frac{\pi(r+1)}{2n+1} \sin \frac{\pi(s+1)}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Далее доказательство аналогично случаю полиномов Чебышева третьего рода. В конечном итоге получаем

$$B_n^T B_n = \text{diag} \left(\frac{2n+1}{4\pi \sin^2 \frac{2\pi(r+1)}{2n+1}} \right)_{r=0,1,\dots,n-1},$$

что завершает доказательство для случая $\alpha = 0.5$, $\beta = -0.5$.

3. МИНИМИЗАЦИЯ ОТНОШЕНИЯ РИТЦА

В соответствии с [2] отношение Ритца имеет вид

$$R = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(B_n^T B_n)}{\lambda_{\min}(B_n^T B_n)}}, \quad (10)$$

где матрица B_n определяется формулой (2), а λ_{\min} , λ_{\max} обозначены соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы $B_n^T B_n$. Задача состоит в выборе временных сдвигов (t_1, t_2, \dots, t_n) таким образом, чтобы минимизировать отношение (10). Вначале рассмотрим следующую лемму.

Лемма 2. Собственные числа симметричной матрицы C равны тогда и только тогда, когда матрица C является диагональной и ее диагональные элементы равны между собой.

Доказательство. Поскольку матрица C является симметричной (эрмитовой), ее можно представить в виде $C = U^T D U$, где D — диагональная матрица, заполненная собственными числами матрицы C и $U^T U = E$ (E — единичная мат-

рица). Поскольку в данном случае $D = \lambda E$, то $C = U^T (\lambda E) U = \lambda (U^T U) = \lambda E$, что и требовалось доказать.

3.1. Случай $n = 2$. В данном случае условия леммы 2 можно упростить следующим образом.

Лемма 3. Матрица $C = B_n^T B_n$ размера 2×2 является диагональной с равными диагональными элементами тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

$$b_{11} = b_{22}, \quad b_{21} = -b_{12} \quad (11)$$

или

$$b_{11} = -b_{22}, \quad b_{21} = b_{12}. \quad (12)$$

Доказательство. Требование того, чтобы матрица

$$B_n^T B_n = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

была диагональной с равными диагональными элементами, означает выполнение условий

$$b_{11}^2 + b_{21}^2 - b_{12}^2 - b_{22}^2 = 0, \quad (13)$$

$$b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22} = 0. \quad (14)$$

Умножая уравнение (14) на $2i$ и прибавляя его к уравнению (13), получаем

$$(b_{11} + ib_{12})^2 - (-b_{22} + ib_{21})^2 = 0. \quad (15)$$

Далее запишем разность квадратов в формуле (15)

$$(b_{11} - b_{22} + ib_{12} + ib_{21})(b_{11} + b_{22} + ib_{12} - ib_{21}) = 0,$$

откуда следует утверждение леммы 3.

Заметим, что в данном случае $b_{11} = P_3(t_1)$, $b_{12} = P_3(t_2)$, $b_{21} = P_4(t_1)$, $b_{22} = P_4(t_2)$. Это означает, что системы (11), (12) сводятся к следующему виду:

$$P_3(t_1) + P_4(t_2) = 0, \quad P_3(t_2) - P_4(t_1) = 0 \quad (16)$$

или

$$P_3(t_1) - P_4(t_2) = 0, \quad P_3(t_2) + P_4(t_1) = 0. \quad (17)$$

Очевидно, что решение системы (17) можно получить из решения системы (16), если поменять местами t_1 и t_2 . Поэтому в дальнейшем рассматривается только система (16).

На рис. 4 показаны корни системы (16) как пересечения линий, соответствующих ее уравнениям для случая $\alpha = \beta = 0$.

На рис. 5 изображено суммарное количество корней систем (16) и (17) как функция параметра α (в этом примере полагается, что $\beta = \alpha$).

Теорема 3. Для $\alpha = \beta$ система (16) имеет как минимум три решения внутри интервала $[-1, 1]$.

Доказательство. В соответствии со свойством полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x). \quad (18)$$

Сделаем замену $t_2 = -t_1$ в системе (16). Принимая во внимание свойство (18), получаем, что $P_4(-t_1) = P_4(t_1)$ и $P_3(-t_1) = -P_3(t_1)$. Таким образом, система (16) сводится к уравнению

$$P_3(t_1) + P_4(t_1) = 0. \quad (19)$$

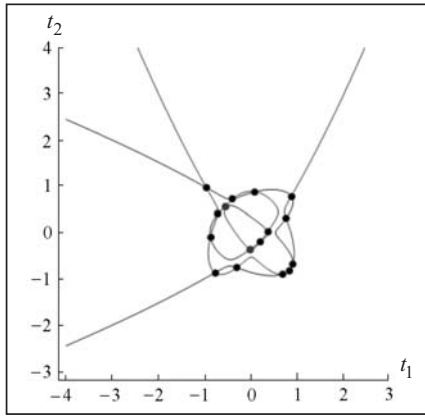


Рис. 4. Корни системы (16) как пересечения линий, соответствующих ее уравнениям для $\alpha = \beta = 0$

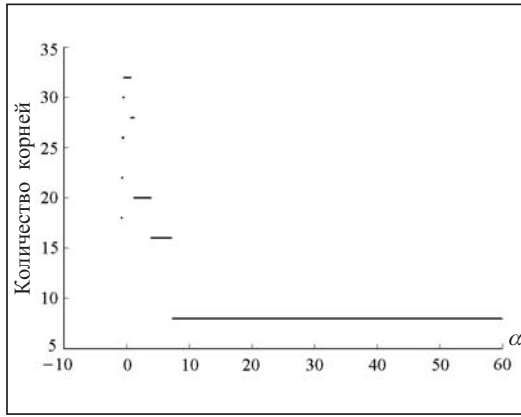


Рис. 5. Суммарное количество корней систем (16) и (17) как функция параметра α

В соответствии с леммой 1 [3] уравнение (19) имеет как минимум три корня, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Из этой теоремы следует, что для $\alpha = \beta$ существует как минимум шесть пар (t_1, t_2) , для которых достигается оптимальное отношение Ритца $R = 1$.

3.2. Случай $n = 3$. Перед нахождением оптимального отношения Ритца обсудим, может ли оно в принципе достичь значения, равного единице.

Согласно лемме 1 при отношении Ритца, равном единице, должны выполняться условия ортогональности. Поэтому проведем поиск минимального отношения Ритца среди корреляционных матриц $B_3^T B_3$, имеющих диагональную структуру.

Так, например, для $\alpha = \beta = -0.9$ существует восемь корней (четыре симметричных пары) системы (6), которым соответствуют отношения Ритца: 14.4374, 5.1908, 8.3788, 1.2204, 8.3788, 5.1908, 1.2204, 14.4374. Таким образом, среди точек ортогональности желаемого отношения Ритца $R = 1$ не достигается и, следовательно, для $n = 3$, $\alpha = \beta = -0.9$ не может быть в принципе достигнуто.

График минимально достижимого отношения Ритца (как функции α) для точек ортогональности представлен на рис. 6. В этом примере полагается, что $\beta = \alpha$.

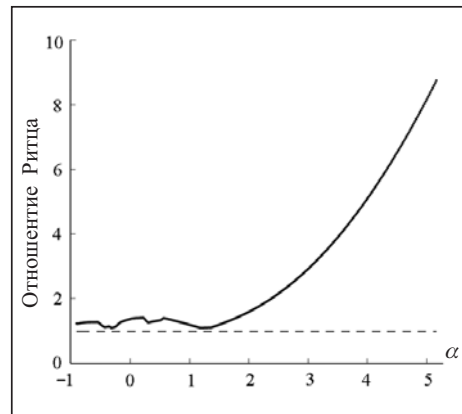


Рис. 6. Минимально достижимое отношение Ритца (как функция α) для точек ортогональности при $n = 3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены вопросы, связанные с ортогональностью и минимизацией отношения Ритца для вейвлетов, основанных на полиномах Якоби, и получены следующие результаты:

— для случая полиномов второго рода ($n = 2$) доказано существование линий ортогональности, для случая равных параметров полинома Якоби ($\alpha = \beta$) доказана достижимость оптимального отношения Ритца;

— для полиномов третьего рода ($n = 3$) для различных α, β численно выделены точки, в которых достигается ортогональность полиномов, и показано, что эти точки не обеспечивают минимального достижимого отношения Ритца;

— для случая $n = 4$ численно найдены значения параметров, предположительно обеспечивающие ортогональность, также доказано, что для $n \geq 2$ условие ортогональности достижимо для полиномов Чебышева второго, третьего и четвертого родов, которые являются частным случаем полиномов Якоби.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Unser M., Aldroubi A. Wavelets: Mathematics and applications. Boca Raton: CRC Press, 1994. 575 p.
2. Fischer B., Prestin J. Wavelets based on orthogonal polynomials. *Mathematics of Computation*. 1997. Vol. 66. P. 1593–1618.
3. Chihara T.S. An introduction to orthogonal polynomials. New York; London; Paris: Gordon and Breach, 1978. 249 p.
4. Семенов В.Ю. Метод нахождения всех корней системы нелинейных алгебраических уравнений, основанный на операторе Кравчика. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 5. С. 169–175.

Надійшла до редакції 19.09.2017

В.Ю. Семенов, Ю. Престін **ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ ОРТОГОНАЛЬНОСТІ ВЕЙВЛЕТІВ, ЩО БАЗУЮТЬСЯ** **НА ПОЛІНОМАХ ЯКОБІ**

Анотація. Досліджено властивості вейвлетів, що базуються на поліномах Якобі. Розглянуто умови, за яких ці вейвлети є взаємно-ортогональними, а також умови, за яких базис вейвлетів характеризується мінімальним відношенням Рітца. Дослідити такі задачі можливо, розв'язуючи системи нелінійних рівнянь із застосуванням методу, раніше розробленого авторами.

Ключові слова: вейвлети, поліноми Якобі, умови ортогональності, пошук коренів.

V. Semenov, J. Prestin **INVESTIGATING THE WAVELET ORTHOGONALITY CONDITIONS BASED** **ON JACOBI POLYNOMIALS**

Abstract. The authors analyze the properties of wavelets based on Jacobi polynomials. In particular, orthogonality conditions for these wavelets are considered, as well as minimization of the Riesz ratio. These problems lead to the solution of systems of nonlinear equations by the method proposed earlier by the authors.

Keywords: wavelets, Jacobi polynomials, orthogonality conditions, rootfinding.

Семенов Василий Юрьевич,

кандидат физ.-мат. наук, начальник научно-исследовательского отдела Научно-производственного предприятия «ДЕЛЬТА СПЕ», Киев, e-mail: vasyi.delta@gmail.com.

Престин Юрген,

доктор физ.-мат. наук, профессор, директор Института математики Любекского университета, Любек (Германия), e-mail: prestin@math.uni-luebeck.de.