СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

П.И. СТЕЦЮК, А.В. ФЕСЮК, О.Н. ХОМЯК

УДК 519.85

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ЭЛЛИПСОИДОВ[1]

Аннотация. Приведен алгоритм с растяжением пространства, который при определенном выборе коэффициента растяжения является методом описанных эллипсоидов. Его частным случаем является метод эллипсоидов Юдина–Немировского–Шора. Описано применение алгоритма для решения задачи выпуклого программирования и задачи поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции.

Ключевые слова: метод эллипсоидов, оператор растяжения пространства, локализующий эллипсоид, задача выпуклого программирования, седловая точка выпукло-вогнутой функции.

ВВЕДЕНИЕ

Классический метод эллипсоидов впервые предложен в 1976 г. Д.Б. Юдиным и А.С. Немировским [1]. В основу были положены схемы последовательных отсечений. Этот метод эллипсоидов был назван модифицированным методом центрированных сечений (ММЦС). Независимо метод эллипсоидов был открыт заново в 1977 г. Н.З. Шором [2] и представлен как частный случай субградиентных методов с растяжением пространства в направлении субградиента, исследования которых были начаты в 1969–1970 гг. Н.З. Шор указал коэффициент растяжения пространства и параметры регулировки шага в направлении нормированного антисубградиента такими, что субградиентный метод с растяжением пространства стал сходиться с геометрической скоростью убывания объема эллипсоида, в котором локализована точка минимума выпуклой функции, и тем самым получил весьма прозрачное обоснование (доказательство) сходимости метода эллипсоидов.

В настоящей статье рассмотрено семейство методов эллипсоидов, которое представлено как метод с растяжением пространства и определенным способом регулировки шага, связанным с переходом в центр очередного локализующего эллипсоида, объем которого меньше, чем объем предыдущего эллипсоида. Условимся называть его обобщенным методом эллипсоидов. Рассмотрено его применение и доказана сходимость этого метода с геометрической скоростью убывания объема локализующего эллипсоида, а также указаны коэффициенты для двух частных случаев обобщенного метода эллипсоидов.

Статья включает три раздела. В разд. 1 приведено описание обобщенного метода эллипсоидов и доказана теорема о его сходимости [3, 4]. В разд. 2 приведена H-форма обобщенного метода эллипсоидов, где, как и в ММЦС, корректируется положительно-определенная симметричная матрица H. Здесь показано,

[1] Работа выполнена при поддержке НАН Украины (проекты № 0117U000327, № 0116U004558) и Volkswagen Foundation (грант No 90 306).

что известный метод эллипсоидов Юдина–Немировского–Шора является частным случаем обобщенного метода эллипсоидов. В разд. 3 описаны правила построения отсекающих векторов и критериев останова для задачи минимизации выпуклой функции, задачи выпуклого программирования и задачи поиска седловой точки выпукло-вогнутой функции.

1. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ

Пусть E^n – евклидово пространство размерности n со скалярным произведением (x, y).

Задача. На E^n $(n \geq 2)$ задано векторное поле $g(x) \in E^n$. Требуется найти точку x^* такую, что $(g(x), x - x^*) \geq 0$ для всех $x \in E^n$. Предполагается, что x^* существует и $g(x) \neq 0$ для $x \neq x^*$.

Эту задачу можно решить обобщенным методом эллипсоидов, который является алгоритмом с растяжением пространства, где коэффициент растяжения α удовлетворяет неравенству $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$. Представим общую схему метода эллипсоидов.

Инициализация. Выбираем точку $x_0 \in E^n$ и радиус r_0 такими, чтобы $\| B_0^{-1}(x_0 - x^*) \| \leq r_0$, где B_0 – $n \times n$-матрица. Перейдем к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены $x_k \in E^n$, r_k и $n \times n$-матрица B_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполним такие действия.

Шаг 1. Вычислим $g_k = g(x_k)$. Если $g_k = 0$, то ОСТАНОВ ($x^* = x_k$).

Шаг 2. Вычислим очередную точку

$$x_{k+1} := x_k - h_k B_k \xi_k, \text{ где } h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k, \ \xi_k = \frac{B_k^{\mathrm{T}} g_k}{\| B_k^{\mathrm{T}} g_k \|}.$$

Шаг 3. Пересчитаем матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}:

$$B_{k+1} := B_k + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)(B_k \xi_k)\xi_k^{\mathrm{T}}, \quad r_{k+1} := \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) r_k. \tag{1}$$

Шаг 4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с использованием x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

Теорема 1. Генерируемая обобщенным методом эллипсоидов последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$\| A_k (x_k - x^*) \| \leq r_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $A_k = B_k^{-1}$. Отношение объемов эллипсоидов $E_k = \{x : \| A_k (x_k - x) \| \leq r_k\}$ и $E_{k+1} = \{x : \| A_{k+1}(x_{k+1} - x) \| \leq r_{k+1}\}$, локализующих точку x^*, есть величина постоянная и определяется выражением

$$q_n(\alpha) = \frac{\operatorname{vol}(E_{k+1})}{\operatorname{vol}(E_k)} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^n < 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Рассмотрим доказательство теоремы 1, аналогичное приведенному для метода эллипсоидов Н.З. Шором [2]. При доказательстве для оператора растяжения пространства

$$R_\alpha(\xi) = I_n + (\alpha - 1)\xi\xi^{\mathrm{T}}, \;\; \xi \in E^n, \;\; \|\xi\| = 1, \tag{4}$$

использованы такие соотношения:

$$R_\alpha^{\mathrm{T}}(\xi) R_\alpha(\xi) = R_{\alpha^2}(\xi), \tag{5}$$

$$\det R_\alpha(\xi) = \alpha .$$

Они следуют из свойств оператора растяжения пространства (4) [5, с. 68–69]. Кроме того, используем соотношение

$$A_{k+1} = R_\alpha(\xi_k) A_k, \tag{6}$$

которое с учетом $\alpha = 1/\beta$ следует из цепочки равенств

$$A_{k+1} = B_{k+1}^{-1} = (B_k R_\beta(\xi_k))^{-1} = R_\beta^{-1}(\xi_k) B_k^{-1} = R_{1/\beta}(\xi_k) A_k = R_\alpha(\xi_k) A_k .$$

Доказательство. Докажем теорему 1 методом индукции по k. Для $k = 0$ неравенство (2) переходит в $\| A_0 (x_0 - x^*) \| \le r_0$, где $A_0 = B_0^{-1}$, и выполняется по предположению. Допустим, что неравенство (2) выполняется для $k = \bar{k}$. Докажем его выполнение для $k = \bar{k} + 1$.

Учитывая соотношение (5) и то, что из (6) следует $A_{\bar{k}+1} = R_\alpha(\xi_{\bar{k}}) A_{\bar{k}}$, имеем цепочку равенств:

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 = (A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*),\, A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*)) =$$

$$= (R_\alpha(\xi_{\bar{k}}) A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*),\, R_\alpha(\xi_{\bar{k}}) A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*)) =$$

$$= (A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*),\, R_\alpha^{\mathrm{T}}(\xi_{\bar{k}}) R_\alpha(\xi_{\bar{k}}) A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*)) =$$

$$= (A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*),\, R_{\alpha^2}(\xi_{\bar{k}}) A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*)) =$$

$$= (A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*),\, (I + (\alpha^2 - 1)\xi_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}) A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*)) =$$

$$= (A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*),\, A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*)) + (\alpha^2 - 1)(\xi_{\bar{k}},\, A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*))^2 =$$

$$= \| A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 + (\alpha^2 - 1)(\xi_{\bar{k}},\, A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*))^2,$$

которую запишем в виде соотношения

$$\| A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 = \| A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*) \|^2 + (\alpha^2 - 1)(\xi_{\bar{k}},\, A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*))^2. \tag{7}$$

Далее, расшифруем оба слагаемых в правой части (7), используя соотношение

$$A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*) = A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}}, \tag{8}$$

которое с учетом $A_{\bar{k}} = B_{\bar{k}}^{-1}$ и очередной точки в обобщенном методе эллипсоидов, вычисляемой по формуле (1), следует из цепочки равенств

$$A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}+1} - x^*) = A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}} - h_{\bar{k}} B_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}} - x^*) =$$

$$= A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}} A_{\bar{k}} B_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}} = A_{\bar{k}} (x_{\bar{k}} - x^*) - h_{\bar{k}} \xi_{\bar{k}} .$$

Первое слагаемое в правой части (7) можно записать в виде равенства

$$\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2, \qquad (9)$$

которое с учетом (8) и того, что $\|\xi_{\bar{k}}\|=1$, следует из цепочки равенств

$$\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)-h_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}}\|^2=$$

$$=(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)-h_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}},\ A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)-h_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}})=$$

$$=(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\ A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*))-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2(\xi_{\bar{k}},\xi_{\bar{k}})=$$

$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2\|\xi_{\bar{k}}\|^2=$$

$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2.$$

Учитывая соотношение (8), для квадрата скалярного произведения во втором слагаемом правой части (7) имеем следующую цепочку равенств:

$$(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2=(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)-h_{\bar{k}}\xi_{\bar{k}},\xi_{\bar{k}})^2=$$

$$=((A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})-h_{\bar{k}}(\xi_{\bar{k}},\xi_{\bar{k}}))^2=((A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})-h_{\bar{k}}\|\xi_{\bar{k}}\|^2)^2=$$

$$=((A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})-h_{\bar{k}})^2=(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2.$$

Следовательно, квадрат данного скалярного произведения можно записать в виде

$$(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2=(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2. \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (7), имеем

$$\|A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2=$$

$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2+(\alpha^2-1)(\xi_{\bar{k}},\ A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}+1}-x^*))^2=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-$$

$$-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2+(\alpha^2-1)((A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2-$$

$$-2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+h_{\bar{k}}^2)=$$

$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-2\alpha^2h_{\bar{k}}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})+(\alpha^2-1)(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})^2+\alpha^2h_{\bar{k}}^2=$$
$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})(2\alpha^2h_{\bar{k}}-(\alpha^2-1)(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}}))+\alpha^2h_{\bar{k}}^2,$$

откуда с учетом $h_k=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{\alpha^2})r_k$ получаем

$$\|A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2=$$

$$=\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2-(\alpha^2-1)(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})(r_{\bar{k}}-(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}}))+$$

$$+\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}r_{\bar{k}}^2. \qquad (11)$$

Далее, для определения знака произведения

$$(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})(r_{\bar{k}}-(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})),$$

входящего в правую часть соотношения (11), оценим знаки обоих его сомножителей. Первый сомножитель будет неотрицательным. Учитывая, что $(x-x^*,\ g(x))\geq 0$ для всех $x\in E^n$, его легко оценить следующим образом:

$$(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})=\left(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\frac{B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}})}{\|B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}})\|}\right)=$$

$$=\frac{1}{\|B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}})\|}(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}}))=$$

$$=\frac{1}{\|B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}})\|}(B_{\bar{k}}A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),g(x_{\bar{k}}))=\frac{1}{\|B_{\bar{k}}^{\mathrm{T}}g(x_{\bar{k}})\|}(x_{\bar{k}}-x^*,\ g(x_{\bar{k}}))\geq 0.$$

Учитывая, что

$$0\leq(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\ \xi_{\bar{k}})\leq\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|\leq r_{\bar{k}},$$

второй сомножитель из (11) оценивается следующим образом:

$$r_{\bar{k}}-(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})\geq 0.$$

Из неотрицательности обоих сомножителей следует, что

$$(\alpha^2-1)(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}})(r_{\bar{k}}-(A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*),\xi_{\bar{k}}))\geq 0. \tag{12}$$

Далее, учитывая (12) и неравенство $\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|\leq r_{\bar{k}}$, соотношение (11) перепишем в виде

$$\|A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2\leq\|A_{\bar{k}}(x_{\bar{k}}-x^*)\|^2+\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}r_{\bar{k}}^2\leq$$

$$\leq r_{\bar{k}}^2+\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}r_{\bar{k}}^2=\left(\frac{\alpha^4+2\alpha^2+1}{4\alpha^2}\right)r_{\bar{k}}^2.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\|A_{\bar{k}+1}(x_{\bar{k}+1}-x^*)\|^2\leq r_{\bar{k}}^2\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2=r_{\bar{k}+1}^2,$$

из которого следует справедливость неравенства (2) при $k=\bar{k}+1$.

Множество точек x, удовлетворяющих неравенству $\|A_k(x_k-x)\|\leq r_k$, является эллипсоидом E_k, содержащим точку x^*. Эллипсоид E_k имеет объем

$$\operatorname{vol}(E_k)=\frac{v_0 r_k^n}{\det A_k}, \tag{13}$$

где v_0 — объем единичного n-мерного шара, $\det A_k$ — определитель матрицы A_k.

Следовательно, скорость сходимости обобщенного метода эллипсоидов будет определяться отношением объема эллипсоида E_{k+1}, локализующего x^* на $(k+1)$-й итерации, к объему эллипсоида E_k, локализующего x^* на k-й итерации.

Согласно (6) имеем $A_{k+1}=R_\alpha(\xi_k)A_k$. Следовательно, для определителей этих матриц с учетом их невырожденности справедливо равенство $\det A_{k+1}=\det R_\alpha(\xi_k)\det A_{k+1}$. Учитывая формулы (13) и (6), находим коэффициент уменьшения объема

$$q_n(\alpha)=\frac{\mathrm{vol}(E_{k+1})}{\mathrm{vol}(E_k)}=\frac{v_0 r_{k+1}^n \det A_k}{v_0 r_k^n \det A_{k+1}}=$$

$$=\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^n \frac{\det A_k}{\det R_\alpha(\xi_k)\det A_k}=\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)^n \frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^n.$$

Отсюда, если коэффициент растяжения α удовлетворяет неравенству $\alpha+\frac{1}{\alpha}<2\sqrt[n]{\alpha}$, имеем $q_n(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\right)^n<1$. Теорема 1 доказана.

2. *H*-ФОРМА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ

Обобщенный метод эллипсоидов можно записать в H-форме (как ММЦС Юдина–Немировского) с помощью положительно-определенной симметричной матрицы $H_k=B_kB_k^{\mathrm{T}}$. Для коэффициента растяжения α, который удовлетворяет неравенству $\alpha+\frac{1}{\alpha}<2\sqrt[n]{\alpha}$, H-форма общего метода эллипсоидов имеет следующий вид.

Инициализация. Выбираем точку $x_0\in E^n$ и радиус r_0 такими, чтобы $(x_0-x^*)^{\mathrm{T}}H_0^{-1}(x_0-x^*)\le r_0^2$, где H_0 – положительно-определенная симметричная $n\times n$-матрица. Перейдем к очередной итерации со значениями x_0, r_0, B_0.

Итерационный процесс. Пусть на k-й итерации найдены $x_k\in E^n$, r_k и $n\times n$-матрица H_k. Для перехода к $(k+1)$-й итерации выполняем такие действия.

Шаг 1. Вычислим $g_k=g(x_k)$. Если $g_k=0$, то ОСТАНОВ ($x^*=x_k$).

Шаг 2. Вычислим очередную точку

$$x_{k+1}:=x_k-h_k\frac{H_kg_k}{\sqrt{g_k^{\mathrm{T}}H_kg_k}},\ \text{где}\ h_k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)r_k.$$

Шаг 3. Пересчитаем матрицу

$$H_{k+1}:=H_k+\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)\frac{H_kg_kg_k^{\mathrm{T}}H_k}{g_k^{\mathrm{T}}H_kg_k}$$

и радиус $r_{k+1}:=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)r_k$.

Шаг 4. Переходим к $(k+1)$-й итерации со значениями x_{k+1}, r_{k+1} и H_{k+1}.

В H-форме обобщенного метода эллипсоидов формула для пересчета очередного приближения x_{k+1} (шаг 2) следует из справедливости цепочки соотношений

$$B_k\frac{B_k^{\mathrm{T}}g_k}{\|B_k^{\mathrm{T}}g_k\|}=\frac{B_kB_k^{\mathrm{T}}g_k}{\sqrt{(B_k^{\mathrm{T}}g_k)^{\mathrm{T}}B_kg_k}}=\frac{H_kg_k}{\sqrt{(g_k)^{\mathrm{T}}B_kB_k^{\mathrm{T}}g_k}}=\frac{H_kg_k}{\sqrt{(g_k)^{\mathrm{T}}H_kg_k}}.$$

Формула для пересчета положительно-определенной симметричной матрицы H_{k+1} (шаг 3) следует из такой цепочки соотношений:

$$H_{k+1} = B_{k+1} B_{k+1}^{\mathrm{T}} = B_k R_\beta (\xi_k)(B_k R_\beta (\xi_k))^{\mathrm{T}} = B_k R_\beta (\xi_k) R_\beta^{\mathrm{T}} (\xi_k) B_k^{\mathrm{T}} =$$

$$= B_k R_\beta (\xi_k) R_\beta (\xi_k) B_k^{\mathrm{T}} = B_k R_{\beta^2} (\xi_k) B_k^{\mathrm{T}} = B_k (I_n + (\beta^2 - 1)\xi_k \xi_k^{\mathrm{T}}) B_k^{\mathrm{T}} =$$

$$= B_k B_k^{\mathrm{T}} + (\beta^2 - 1) B_k \xi_k \xi_k^{\mathrm{T}} B_k^{\mathrm{T}} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{B_k B_k^{\mathrm{T}} g_k g_k^{\mathrm{T}} B_k B_k^{\mathrm{T}}}{\| B_k^{\mathrm{T}} g_k \|^2} =$$

$$= H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^{\mathrm{T}} H_k}{(B_k^{\mathrm{T}} g_k)^{\mathrm{T}} B_k^{\mathrm{T}} g_k} = H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^{\mathrm{T}} H_k}{g_k^{\mathrm{T}} B_k B_k^{\mathrm{T}} g_k} =$$

$$= H_k + (\beta^2 - 1) \frac{H_k g_k g_k^{\mathrm{T}} H_k}{g_k^{\mathrm{T}} H_k g_k},$$

где $\beta = 1/\alpha$.

Теорема 2. Последовательность точек $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, генерируемая H-формой обобщенного метода эллипсоидов, удовлетворяет неравенствам

$$(x_k - x^*)^{\mathrm{T}} H_k^{-1} (x_k - x^*) \le r_k^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

а отношение объемов эллипсоидов $E_k = \{x : (x_k - x)^{\mathrm{T}} H_k^{-1} (x_k - x) \le r_k^2\}$ и $E_{k+1} = \{x : (x_{k+1} - x)^{\mathrm{T}} H_{k+1}^{-1} (x_{k+1} - x) \le r_{k+1}^2\}$, локализующих точку x^*, есть величина постоянная и определяется формулой

$$q_n(\alpha) = \frac{\operatorname{vol}(E_{k+1})}{\operatorname{vol}(E_k)} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Из соотношений (3) и (15) следует, что метод эллипсоидов сходится (по объему локализации точки x^*) со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q_n(\alpha) < 1$. Величина знаменателя зависит от выбранного значения α, удовлетворяющего неравенству $\alpha + \frac{1}{\alpha} < 2\sqrt[n]{\alpha}$. Наименьший знаменатель прогрессии реализуется в методе эллипсоидов Юдина–Немировского–Шора. Ему соответствует коэффициент растяжения $\alpha_1 = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$, который достигается в точке минимума функции $q_n(\alpha)$ по α. Знаменатель прогрессии, близкий к наименьшему, реализуется в приближенном методе эллипсоидов [6], и ему соответствует коэффициент растяжения $\alpha_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n}$. Он достигается в точке минимума функции $Q_n(\alpha)$, которая аппроксимирует сверху функцию $q_n(\alpha)$ согласно соотношению

$$q_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right)^n = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right)^n \le \frac{1}{\alpha} \exp \left\{ \frac{n}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right\} = Q_n(\alpha).$$

При больших значения n знаменатели геометрической прогрессии в обоих методах аппроксимируются сверху близкими величинами $q^*(n)=1-\frac{1}{2n}$ и $Q^*(n)=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}$.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ЭЛЛИПСОИДОВ

Рассмотрим описание некоторых задач из [7], для решения которых можно использовать обобщенный метод эллипсоидов.

Задача безусловной минимизации выпуклой функции. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, где $x\in E^n$. Ее минимальное значение обозначим $f^*=f(x^*)$ и, не ограничивая общности, предположим, что x^* — единственная точка минимума. Пусть имеется априорная информация, что точка x^* находится в шаре $S(x_0,R)$. Тогда если векторное поле определено по формуле $g(x)=g_f(x)$, где $g_f(x)$ — субградиент функции $f(x)$ в точке x, то для него будет выполняться неравенство

$$(x-x^*,\ g(x))=(x-x^*,\ g_f(x))\ge f(x)-f(x^*)=f(x)-f^*\ge 0\quad \forall x\in E^n. \tag{16}$$

Следовательно, для нахождения точки x^* можно использовать метод эллипсоидов, установив стартовую точку x_0, начальный радиус $r_0=R$ и матрицу $B_0=I_n$, где I_n – единичная $n\times n$-матрица. В качестве критерия останова можно использовать условие $r_k\|B_k^{\mathrm{T}}g_f(x_k)\|\le\varepsilon$, которое при сколь угодно малом ε позволяет найти точку $x_\varepsilon^*=x_k$, для которой $f(x_\varepsilon^*)-f^*\le\varepsilon$. Это следует из справедливости неравенства

$$r_k\ge\|B_k^{-1}(x_k-x^*)\|\ge\left(B_k^{-1}(x_k-x^*),\ \frac{B_k^{\mathrm{T}}g_f(x_k)}{\|B_k^{\mathrm{T}}g_f(x_k)\|}\right)=$$

$$=\frac{(x_k-x^*,\ g_f(x_k))}{\|B_k^{\mathrm{T}}g_f(x_k)\|}\ge\frac{f(x_k)-f^*}{\|B_k^{\mathrm{T}}g_f(x_k)\|},$$

которое имеет место для выпуклой функции $f(x)$ с учетом неравенства (16).

Общая задача выпуклого программирования. Найти

$$f_0^*=f_0(x^*)=\min_{x\in E^n}f_0(x) \tag{17}$$

при ограничениях

$$f_i(x)\le 0,\ \ i=1,2,\ldots,m, \tag{18}$$

где $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на E^n, $i=0,1,\ldots,m$. Пусть $g_i(x)$ — соответствующие субградиенты, $i=0,1,\ldots,m$. Известно, что оптимальная точка x^* существует и находится в шаре $S(x_0,R)$ (формально к системе ограничений (18) можно добавить ограничение $\|x-x_0\|\le R$), а также выполнено условие Слейтера для задачи (17), (18).

Рассмотрим векторное поле $g(x)$, построенное следующим образом:

$$g(x)=\begin{cases} g_0(x), & \text{если } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0, \\ g_{i*}(x), & \text{если } \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)=f_{i*}(x)>0. \end{cases} \qquad (19)$$

Покажем, что $(g(x), x-x^*)\ge 0$ при всех $x\in E^n$. Если $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le 0$, то $g(x)=g_0(x)$,

$$(g(x), x-x^*)=(g_0(x), x-x^*)\ge f_0(x)-f_0(x^*)\ge 0\,.$$

Если $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)>0$, то $g(x)=g_{i*}(x)$, причем $f_{i*}(x)>0$, $f_{i*}(x^*)\le 0$,

$$(g(x), x-x^*)=(g_{i*}(x), x-x^*)\ge f_{i*}(x)-f_{i*}(x^*)\ge 0\,.$$

Таким образом, справедливо неравенство $(g(x), x-x^*)\ge 0$ для всех $x\in E^n$.

Следовательно, вычисляя $g(x)$ по формуле (19), для локализации x^* в задаче (17), (18) можно использовать обобщенный метод эллипсоидов. Отметим, что этот результат не изменится, если во второй формуле (19) вместо $g_{i*}(x)$ брать $g_{\bar{i}}$, где $\bar{i}$ – произвольный индекс, для которого $f_{\bar{i}}(x)>0$. Останов по условию $r_k\,\|B_k^{\mathrm{T}} g_0(x_k)\|\le\varepsilon$ позволяет найти точку $x_\varepsilon^*=x_k$, для которой $f_0(x_\varepsilon^*)-f_0^*\le\varepsilon$, что следует из справедливости неравенства

$$r_k\ge\|B_k^{-1}(x_k-x^*)\|\ge\left(B_k^{-1}(x_k-x^*),\ \frac{B_k^{\mathrm{T}} g_0(x_k)}{\|B_k^{\mathrm{T}} g_0(x_k)\|}\right)=$$

$$=\frac{(x_k-x^*, g_0(x_k))}{\|B_k^{\mathrm{T}} g_0(x_k)\|}\ge\frac{f_0(x_k)-f_0^*}{\|B_k^{\mathrm{T}} g_0(x_k)\|}$$

для выпуклой функции $f_0(x)$.

Задача о седловой точке. Пусть задана выпукло-вогнутая функция $f(x, y)$ векторных переменных $x\in E^n$, $y\in E^m$, $z=\{x, y\}\in E^n\times E^m\equiv E^{n+m}$, z^* — седловая точка этой функции, z_0 — заданное начальное приближение, при этом известно, что $\|z_0-z^*\|\le R$.

Представим псевдоградиентное множество $G(z)=G_f^x(x, y)\times(-G_f^y(x, y))$, где $G_f^x(x, y)$ — множество частных субградиентов функции $f(x, y)$, рассматриваемой как функция от x при фиксированном y; $G_f^y(x, y)$ — множество частных суперградиентов функции $f(x, y)$ по y при фиксированном x. Пусть векторное поле $g(z)$ построено следующим образом:

$$g(z)=\{g_f^x(z), -g_f^y(z)\},\quad g_f^x(z)\in G_f^x(z),\ g_g^y(z)\in G_f^y(z)\,. \qquad (20)$$

Из определения седловой точки следует, что $f(x, y^*)\ge f(x^*, y^*)\ge f(x^*, y)$. Поэтому

$$0\le f(x, y^*)-f(x^*, y)=f(x, y^*)-f(x, y)+f(x, y)-f(x^*, y)\le$$

$$\le(g_f^x(z), x-x^*)-(g_g^y(z), y-y^*)=(g(z), z-z^*),$$

откуда следует, что $(g(z), z-z^*) \geq 0$ для всех $z \in E^{n+m}$. Таким образом, вычисляя $g(z)$ по формуле (20), для локализации седловой точки z^* можно применять обобщенный метод эллипсоидов.

Обобщенный метод эллипсоидов имеет и другие применения, например при решении координирующих негладких задач небольших размерностей, которые имеют место в схемах декомпозиции (по ограничениям, по переменным), в специальных выпуклых задачах с небольшим количеством переменных при параметрически заданном семействе ограничений и др. Основное требование применения — определить правило построения отсекающих векторов, которые локализуют искомую точку, и условия останова итерационного процесса в обобщенном методе эллипсоидов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках семейства методов с растяжением пространства описана общая схема метода эллипсоидов, которая позволяет получать сходящиеся со скоростью геометрической прогрессии алгоритмы описанных эллипсоидов для нахождения некоторых стационарных точек градиентных полей. При этом показатель геометрической прогрессии зависит лишь от размерности пространства и не зависит от свойств градиентного поля. Использование этих алгоритмов целесообразно при получении оценок сложности для алгоритмов решения специальных классов задач математического программирования, задач поиска точек равновесия, включая обобщенные равновесия Нэша [8, 9], а также для решения систем нелинейных уравнений с ограничениями, вариационных неравенств и комплементарных задач. Если эти алгоритмы используются для решения сложных координирующих подзадач, в которых число переменных не более десяти, то они будут эффективными и при практических применениях.

Построенные эллипсоиды локализации целесообразно также использовать в общей схеме построения методов центров тяжести простых тел [10]. Если их применять в сочетании с эллипсоидами, локализующими пересечение шара и двух полупространств [11, 12], то скорость сходимости алгоритмов описанных эллипсоидов можно значительно повысить. Такие алгоритмы будут иметь теоретическую оценку скорости сходимости не хуже, чем в методе эллипсоидов Юдина–Немировского–Шора, а практическую — смогут приблизить к эффективности *r*-алгоритмов Шора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин Д.Б., Немировский А.С. Информационная сложность и эффективные методы решения выпуклых экстремальных задач. *Экономика и математические методы.* 1976. Вып. 2. С. 357–369.
2. Шор Н.З. Метод отсечения с растяжением пространства для решения задач выпуклого программирования. *Кибернетика*. 1977. № 1. С. 94–95.
3. Стецюк П.И. Общая схема метода эллипсоидов. Информационный бюллетень АМП № 13. Екатеринбург: УрО РАН, 2015. С. 59–60.
4. Стецюк П.И. Об одном обобщении классического метода эллипсоидов. *Інформатика та системні науки* (ІСН–2015): Матеріали VI Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю (м. Полтава, 19–21 березня 2015 року). Полтава: ПУЕТ, 2015. С. 335–337.
5. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. Київ: Наук. думка, 1979. 200 с. (Пер. с англ.: Shor N.Z. Minimization methods for non-differetiable functions. Berlin: Springer–Verlag, 1985. 178 p.).

6. Стецюк П.И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ.* 2003. № 3. С. 141–146.

7. Шор Н.З. Новые направления в развитии методов негладкой оптимизации. *Кибернетика*. 1977. № 6. С. 87–91.

8. Fischer A., Herrich M., Schönefeld K. Generalized Nash equilibrium problems — recent advances and challenges. *Pesquisa Operacional.* 2014. Vol. 34. P. 521–558.

9. Daryina A.N., Izmailov A.F. Newton-type method for variational equilibrium problem. *VIII Московская международ. конф. по исследованию операций* (ORM2016). Москва, 17–22 октября 2016 года. Труды. Т. 1. Москва: МАКС Пресс, 2016. С. 21–22.

10. Стецюк П.И. Метод центров тяжести простых тел. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 5. С. 117–138.

11. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и r-алгоритмы. Кишинэу: Эврика, 2014. 488 с.

12. Стецюк П.И. r-алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ.* 1996. № 1. С. 113–134.

Надійшла до редакції 21.03.2018

П.І. Стецюк, О.В. Фесюк, О.М. Хом'як

УЗАГАЛЬНЕНИЙ МЕТОД ЕЛІПСОЇДІВ

Анотація. Наведено алгоритм з розтягом простору, який за певного вибору коефіцієнта розтягу є методом описаних еліпсоїдів. Його частковим випадком є метод еліпсоїдів Юдіна–Немировського–Шора. Описано застосування алгоритму для розв'язання задачі опуклого програмування і задачі пошуку сідлової точки опукло–увігнутої функції.

Ключові слова: метод еліпсоїдів, оператор розтягнення простору, локалізуючий еліпсоїд, задача опуклого програмування, сідлова точка опукло–увігнутої функції.

P.I. Stetsyuk, O.V. Fesiuk, O.N. Khomyak

GENERALIZED ELLIPSOID METHOD

Abstract. An algorithm with space dilation is presented, which is the circumscribed ellipsoid method under a certain choice of tensile coefficient. It is shown that its partial case is the Yudin–Nemirovsky–Shor ellipsoid method. The application of the algorithm for solving a convex programming problem and the problem of finding a saddle point of a convex-concave function are described.

Keywords: ellipsoid method, space dilation operator, localizing ellipsoid, convex programming problem, saddle point of convex-concave function.

Стецюк Петр Иванович,
доктор физ.-мат. наук, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев,
e-mail: stetsyukp@gmail.com.

Фесюк Александр Владимирович,
ведущий инженер-программист Института кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев,
e-mail: sasha.fesyuk@gmail.com.

Хомяк Ольга Николаевна,
кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова, Киев,
e-mail: khomiak.olha@gmail.com.