УДК 519.21

А.Д. ШАТАШВИЛИ, И.Ш. ДИДМАНИДЗЕ, Т.А. ФОМИНА, А.А. ФОМИН-ШАТАШВИЛИ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В ЗАДАЧАХ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ, ФИЛЬТРАЦИИ И ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ ИЗ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. Получены общие формулы для эффективного вычисления оптимальных оценок для функционалов от случайных процессов со значениями из гильбертова пространства H. В частном случае, когда изучаемый процесс является решением некоторого нелинейного эволюционного дифференциального уравнения с малой нелинейностью, проведено разложение полученных оптимальных оценок по степеням малого параметра, а коэффициенты разложения заданы в виде алгоритмов и вычислены в явном виде через известные величины дифференциального уравнения.

Ключевые слова: алгоритм, эволюционные дифференциальные уравнения, плотность Радона–Никодима, расширенный стохастический интеграл, эквивалентность мер, функционал.

Задачи экстраполяции и фильтрации случайных процессов при изучении чаще всего оцениваются не полностью, а частично. Например, предположим, что случайный процесс рассматривается как вектор из конечномерного пространства и наблюдается лишь некоторая часть из его компонент. Естественно, ставится задача о нахождении оптимальных оценок и в задаче экстраполяции, и в задаче фильтрации тех компонент рассматриваемого случайного процесса, которые не наблюдались, или функций и функционалов от них. Эти задачи важнейшие в теории оптимальных оценок случайных процессов и им посвящена настоящая работа.

Пусть $\{\Omega, \wp, P\}$ — фиксированное вероятностное пространство, H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\| x\|$, $x, y \in H$, $\wp$ — σ-алгебра измеримых подмножеств пространства H. Далее $L_2 = L_2\{[0; a], H\}$ обозначено пространство функций, определенных на отрезке $[0; a]$ со значениями из H и интегрируемых со своим квадратом по норме H. Введем в гильбертовом пространстве L_2 скалярное произведение $(f, g)_L$ и норму $\| f\|_L$, $f, g \in L_2$, в виде

$$(f, g)_L = \int_0^a (f(t), g(t))dt,$$

$$\| f\|_L^2 = \int_0^a \| f(t)\|^2\, dt,$$

где $f,\ g \in L_2$, $f(t),\ g(t) \in H$.

Пусть $B(t, s)$ — операторная функция, действующая при каждом $t, s \in [0; a]$ в пространстве H. Обозначим $|B(t, s)|$ норму операторной функции в пространстве H. Известно, что операторная функция $B(t, s)$ как ядро порождает в пространстве L_2 интегральный оператор $\boldsymbol{B}$:

$$(\boldsymbol{B}\varphi)_t = \int_0^a B(t, s)\varphi(s)ds,\ \ \varphi \in L_2.$$

В пространстве L_2 норму оператора $\boldsymbol{B}$ обозначим $|\boldsymbol{B}|_L$:

$$|\boldsymbol{B}|_L^2 = \int_0^a \int_0^a |B(t, s)|^2 \, dtds < \infty \, . \tag{1}$$

Норма оператора, определенная по формуле (1), называется гильберто-шмидтовской нормой, а оператор $\boldsymbol{B}$, имеющий такую норму, называется оператором Гильберта–Шмидта.

Рассмотрим случайный процесс $x(t)$, определенный при $t \in [0; a]$ и принимающий свои значения из гильбертова пространства H (в частности, пространство H может являться конечномерным гильбертовым пространством). Обозначим $\Im_T$ σ-алгебру событий, порожденную величинами $x(s)$ при $s \le T$, $T \in [0; a]$.

Если η — некоторая случайная величина, измеримая относительно σ-алгебры $\Im_T$ (такие величины естественно называть функционалами от случайного процесса $x(t)$), то наилучшей в смысле среднеквадратического отклонения оценкой величины η относительно σ-алгебры $\wp \subset \Im_T$ называется $\wp$-измеримая величина $\tilde{\eta}$, для которой выражение $M(\eta - \tilde{\eta})^2$ принимает минимальное значение. В случае, когда $M\eta^2 < \infty$, эта наилучшая оценка $\tilde{\eta}$ существует [1] и вычисляется по формуле

$$\tilde{\eta} = M(\eta / \Im) \, . \tag{2}$$

При изучении задач экстраполяции и фильтрации случайных процессов при их общей постановке в качестве случайной величины η рассматриваются величины вида $\eta = h(x(t))$, а в качестве σ-алгебр $\wp$ — σ-алгебры $\Im_T^g$, порожденные значениями $g(x(s))$, $s \le T$, при этом $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$ являются некоторыми функциями, определенными в гильбертовом пространстве H.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть заданы два случайных процесса: $x(t)$ и $\xi(t)$, определенные на отрезке $[0; a]$ и принимающие свои значения из гильбертова пространства H, и пусть μ_x и μ_ξ — меры, порожденные соответственно случайными процессами $x(t)$ и $\xi(t)$ в пространстве H. Предположим, что меры μ_x и μ_ξ эквивалентны ($\mu_x \sim \mu_\xi$) или в худшем случае мера μ_x абсолютно непрерывна относительно меры μ_ξ ($\mu_x << \mu_\xi$), а $\rho_a(\cdot) = \dfrac{d\mu_x}{d\mu_\xi}(\cdot)$ — соответствующая плотность Радона–Никодима.

Если $Mh^2(x(t)) < \infty$ для всех $t \in [0; a]$ и

$$\beta(\xi(\cdot), t) = \frac{M\{h(\xi(t)) \cdot \rho_t(\xi(\cdot)) / \Im_T^{g^*}\}}{\rho_T(\xi(\cdot))} \, , \tag{3}$$

где $\Im_T^{g^*}$ — σ-алгебра, порожденная значениями функционала $g(\xi(s))$ при $s \le T$, $T \in [0; a]$, то наилучшая оценка $\tilde{h}(x(t))$ функционала $h(x(t))$ в смысле определения (2) имеет вид

$$\tilde{h}(x(t)) = M\{h(x(t))) / \Im_T^g\} = \beta(x(\cdot), t) \, . \tag{4}$$

Доказательство. Пусть функция n переменных $\gamma_n = H(y_1, \ldots, y_n)$ является $\Im_T^g$-измеримой функцией, а $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0; a]$ — некоторые фиксированные точки из интервала $[0; a]$. Используя известные свойства условного математического ожидания, а также замену переменных под знаком интеграла, имеем следующую цепочку равенств:

$$M\widetilde{h}(x(t))\gamma_n = M\beta(x)\gamma_n = M\beta(x)\, H\,(x(t_1), \dots, x(t_n)) =$$
$$= M\beta(\xi)H(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}(\xi) =$$
$$= MH(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))M\{h(\xi(t)\rho_a(\xi(\cdot)))/\Im_T^{g^*}\} =$$
$$= MM\{H(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))h(\xi(t)\rho_a(\xi(\cdot)))/\Im_T^{g^*}\} =$$
$$= MH(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))h(\xi(t)\rho_a(\xi(\cdot))) = MH(x(t_1), \dots, x(t_n))\, h(x(t)) = Mh(x(t))\gamma_n.$$

Иными словами,

$$M\widetilde{h}(x(t))\gamma_n = M\beta(x, t)\gamma_n = Mh(x(t))\gamma_n\ . \tag{5}$$

Поскольку любую $\Im_T^g$-измеримую функцию γ можно аппроксимировать с помощью последовательности измеримых и ограниченных $\Im_T^g$-измеримых функций $\gamma_n = H(y_1, \dots, y_n)$, переходя к пределу в выражении (5) при $\gamma_n \to \gamma$ для любой $\Im_T^g$-измеримой функции γ, получаем

$$M\widetilde{h}(x(t))\gamma = M\beta(x, t)\gamma = Mh(x(t))\gamma. \tag{6}$$

Выражение (6) доказывает утверждение леммы 1, т.е. справедливость формулы (4).

Как известно из теории случайных процессов, не существует общих методов для вычисления условных математических ожиданий, поэтому формула (4) показывает, что искомая оптимальная оценка для функционала $h(x(t))$ имеет такое аналитическое выражение, но только методов для ее вычисления в общем случае не дает. Тем не менее есть один частный случай, когда удается условное математическое ожидание в формуле (4) свести к вычислению безусловного математического ожидания по заданному гауссовскому распределению. Такой подход возможен только, когда случайный процесс $\xi(t)$ и случайная функция $g(\xi(t))$ имеют совместное гауссовское распределение, т.е. случайный процесс $\xi(t)$ — гауссовский случайный процесс, а функционал $g(\cdot)$ — линейная функция в пространстве H. Тогда σ-алгебра $\Im_T^{g^*}$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной значениями $\xi(s)$, $s \le T$, которую в дальнейшем будем обозначать $\Im_T^*$.

Используя результаты из теории линейных оценок случайных процессов (см., например, [2]), любой гауссовский случайный процесс $\xi(t)$, определенный на отрезке $[0; a]$, можно представить в виде

$$\xi(t) = l_T^*(t) + \varepsilon_T(t),\ \ t, T \in [0; a], \tag{7}$$

где

$$l_T^*(t) = l_T^*(t, \xi(\cdot)) = M\{\xi(t)/\Im_T^*\} \tag{8}$$

является линейной оптимальной оценкой гауссовского случайного процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0; a]$, $\xi(t) \in H$, а $\varepsilon_T(t)$ — гауссовский случайный процесс со значениями из гильбертова пространства H, не зависящий от σ-алгебры $\Im_T^*$, иначе его называют «гауссовской добавкой» в выражении (7).

Если поставлена задача о нахождении оптимальной оценки некоторого функционала $h(x(t))$ от случайного процесса $x(t) \in H$, естественно, ведется наблюдение за какой-то ее траекторией или ее частью в каком-то промежутке времени t на отрезке $[0; a]$. Поэтому в полученные выражения после вычисления линейных оценок необходимо подставить наблюдаемые значения случайного процесса $x(t) \in H$. Иными словами, вычислив линейную оценку $l_T^*(t, \xi(\cdot))$ гауссовского случайного процесса $\xi(t) \in H$, в его выражение подставим наблюдаемую часть случайного процесса $x(t)$ в пределах его наблюдения во время $t \in [0; a]$, так как гауссовский процесс $\xi(t)$ не наблюдается. В этом случае

$$l_T(t) = l_T^*(t, x(\cdot)) = l_T^*(t, \xi(\cdot))\Big|_{\xi(\cdot)=x(\cdot)}. \tag{9}$$

Тогда в формуле оптимальной оценки функционала $h(x(t))$ (4) условное математическое ожидание с учетом выражений (3), (7)–(9) сводится к вычислению безусловного математического ожидания, при этом получим

$$\widetilde{h}(x(t)) = \frac{M^{(\xi)}\{h(\xi(t)) \cdot \rho_t(\xi(\cdot)) / \Im_T^{g^*}\}}{\rho_T(\xi(\cdot))}\Bigg|_{\xi(\cdot)=x(\cdot)} =$$

$$= \frac{M^{(\varepsilon)}\{h(u(t)+\varepsilon_T(t)) \cdot \rho_t(u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot))\}}{\rho_T(\xi(\cdot))}\Bigg|_{\substack{u(t)=l_T(t) \\ u(\cdot)=l_T(\cdot) \\ \xi(\cdot)=x(\cdot)}}, \tag{10}$$

где величины $u(t)$, $u(\cdot)$ — параметры, вместо которых в конечном результате вычисления математического ожидания подставляются известные выражения $l_T(t)$ и $l_T(\cdot)$, а $M^{(\varepsilon)}$ — математическое ожидание, вычисленное по распределениям гауссовского процесса $\varepsilon(t)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в гильбертовом пространстве H определены некоторые измеримые функции $h(\cdot)$ и $g(\cdot)$, при этом $h(\cdot)$ — произвольная нелинейная измеримая функция, а $g(\cdot)$ — линейная функция. Из двух случайных процессов: $x(t)$ и $\xi(t)$, принимающих свои значения из H, процесс $\xi(t)$ является гауссовским, имеющим совместное гауссовское распределение со случайной функцией $g(\xi(t))$. Кроме того, пусть меры μ_x и μ_ξ, порожденные соответственно случайными процессами $x(t)$ и $\xi(t)$ в пространстве H, эквивалентны ($\mu_x \sim \mu_\xi$) или в крайнем случае μ_x абсолютно непрерывна относительно μ_ξ ($\mu_x << \mu_\xi$) и соответствующая плотность Радона–Никодима $\frac{d\mu_x}{d\mu_\xi}(z) = \rho_a(z)$ существует и имеет явное выражение. Тогда при соблюдении условий леммы 1 с учетом свойств (7) и (8) для представления любого гауссовского процесса оптимальная оценка $\widetilde{h}(x(t))$ функционала $h(x(t))$ от случайного процесса $x(t)$ по его наблюдениям, определенная в виде условного математического ожидания по формулам (3) и (4), сводится к вычислению безусловного математического ожидания от явных выражений и имеет вид (10).

Формула (10) является общей формулой в том смысле, что она дает ответы для вычисления оптимальных оценок $\widetilde{h}(x(t))$ для функционала $h(x(t))$ в поставленных задачах оптимальной экстраполяции, оптимальной фильтрации и оптимальной интерполяции. Например, если в формуле (10) допустить $t > T$, то $\widetilde{h}(x(t))$ является оптимальным прогнозом (экстраполяцией) функционала $h(x(t))$;

если $t = T$ (в этом случае точки t и T совпадают и скользят по всему интервалу $[0; a]$), то в формуле (10) $\widetilde{h}(x(t))$ является оптимальной фильтрацией функционала $h(x(t))$, а при $t < T$ в формуле (10) выражение $\widetilde{h}(x(t))$ дает оптимальную оценку в задаче интерполяции функционала $h(x(t))$.

Далее результаты теоремы 1 применяются для случая, когда из пары процессов: $y(t)$ и $x(t)$, первый негауссовский случайный процесс $y(t)$ является решением нелинейного эволюционного дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве H с гауссовским возмущением в правой части, а второй случайный процесс $x(t)$ является гауссовским, т.е. решением этого же дифференциального уравнения с гауссовским возмущением, но без нелинейного слагаемого.

Таким образом, в гильбертовом пространстве H рассмотрим теперь систему из двух эволюционных дифференциальных уравнений: нелинейного

$$\frac{dy(t)}{dt} - A(t)\,y(t) + A_1(t)\,y(t) + \alpha \cdot f(t,\, y(t)) = \xi(t),$$

$$0 \le t \le a,\;\; y(0) = \xi(0) = 0 \,(\mathrm{mod}\, P), \tag{11}$$

и линейного к нему

$$\frac{dx(t)}{dt} - A(t)x(t) + A_1(t)x(t) = \xi(t),$$

$$0 \le t \le a\,,\;\; x(0) = \xi(0) = 0 \,(\mathrm{mod}\, P), \tag{12}$$

где α — параметр, а линейные операторы $A(t)$, $A_1(t)$, нелинейная функция $f(t, x)$ и случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяют приведенным далее условиям.

1. Операторы $A(t)$ и $A_1(t)$ являются семейством линейных, вообще говоря, неограниченных операторов с плотной, независимой от t областью определения $D(A) \subseteq H$, и одновременно они являются производящими операторами эволюционных семейств $U(t, s)$ и $U_1(t, s)$ ограниченных операторов при $0 \le t, s \le a$, действующих в H, сильно непрерывно зависящих от t и s, причем $U_1(t, s) = U(t, s)A_1(s)$, и для которых выполняются условия

$$\int_0^a\!\!\int_0^a |U(t, s)|^2\, dtds < \infty\,, \qquad \int_0^a\!\!\int_0^a |U_1(t, s)|^2\, dtds < \infty.$$

Это означает, что соответствующие интегральные операторы $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{U}_1$, действующие в гильбертовом пространстве L_2, являются операторами Гильберта–Шмидта и, кроме того, число -1 не принадлежит спектру оператора $U_1(t, s)$.

2. Нелинейная функция $f(t,\, y(t))$, определенная на $[0; a] \times H$, принимает свои значения из H, интегрируема со своим квадратом по норме H для всех $y(t) \in H$ и дифференцируема по пространственной переменной y, при этом производная $f'_y(t,\, y(t))$ для всех $t \in [0; a]$ является оператором Гильберта–Шмидта, действующим в H.

3. Гауссовский случайный процесс $\xi(t)$ определен на отрезке $[0; a]$ со значениями из пространства H, с нулевым математическим ожиданием $M\xi(t) = 0$ и с корреляционной операторной функцией $R_{\xi}^2(t, s)$, $0 \le t, s \le a$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^a\!\!\int_0^a |R_{\xi}^2(t, s)|^2\, dtds < \infty\,.$$

Иначе говоря, операторная функция $R_{\xi}^{2}(t,s)$ как интегральное ядро, действующая в H при каждом $t, s \in [0; a]$, порождает в пространстве L_2 оператор Гильберта–Шмидта $\boldsymbol{R}_{\xi}^{2}$.

Поскольку дифференциальное уравнение (12) является линейным, а его правая часть $\xi(t)$ — гауссовским процессом, естественно, и его решение $x(t)$ также является гауссовским случайным процессом с математическим ожиданием, равным нулю.

В пространстве L_2 введем обозначение $\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1)^{-1}\boldsymbol{U}$.

Согласно условию 1 следует, что оператор $\boldsymbol{B}_1$ существует и ограничен, так как обратный оператор $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}_1)^{-1}$ существует, ограничен, непрерывен и определен во всем пространстве L_2. Кроме того, оператор $\boldsymbol{B}_1$ является оператором Гильберта–Шмидта. Если обозначим $\boldsymbol{B}_1^{*}$ оператор, сопряженный к оператору $\boldsymbol{B}_1$ (в дальнейшем * обозначает символ сопряженного оператора), то можно показать, что корреляционный оператор гауссовского элемента $x \in L_2$ вычисляется $\boldsymbol{R}_{x}^{2} = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{R}_{\xi}^{2} \boldsymbol{B}_1^{*}$, откуда следует, что корреляционная операторная функция $R_{x}^{2}(t,s)$, $t, s \in [0; a]$, действующая в пространстве H, определяется из соотношения известных величин следующим образом:

$$R_{x}^{2}(t,s) = \iint B_1(t,u) R_{\xi}(u,v) B_1^{*}(v,s)\,du\,dv,$$

где операторная функция $B_1^{*}(v,s)$ является сопряженной операторной функцией к операторной функции $B_1(v,s)$ в пространстве H.

Обозначим $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\lambda_k\}$ соответственно собственные функции и собственные числа корреляционной операторной функции $R_{x}^{2}(t,s)$ и введем новую систему ортонормированных функций $\{\psi_k(t)\}$ следующим образом:

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(t),$$

а также обозначим μ_y и μ_x меры, порожденные соответственно решениями $y(t)$ и $x(t)$ дифференциальных уравнений (11) и (12) в гильбертовом пространстве H.

В работах [3–8] показано, что между случайными процессами $y(t)$ и $x(t)$ существует аналитическая зависимость, которая выражается в виде нелинейных отображений

$$Sy(t)\colon y(t) + \alpha \int_0^a R_x(t,s) g(s, y(s))\,ds = x(t), \tag{13}$$

$$Tx(t)\colon x(t) + \alpha \int_0^a R_x(t,s) \widetilde{g}(s, x(s))\,ds = y(t), \tag{14}$$

а также отмечено, что при выполнении некоторых достаточных условий, кроме перечисленных ранее, нелинейные отображения S и T взаимно-однозначны, обратимы и голоморфны, $S = T^{-1}$, а функции $g(\cdot, x)$ и $\widetilde{g}(\cdot, x)$ существуют, взаимосвязаны:

$$\widetilde{g}(\cdot, x) = -g(\cdot, Tx), \tag{15}$$

и определяются из соотношения

$$\int_0^a \int_0^a (I + U_1(t, s))^{-1} U(s, u) f(u, y(u)) ds du = \int_0^a R_x(t, s) g(s, y(s)) ds .$$

В работах [3, 4, 7–9] определены условия, при выполнении которых доказывается существование и единственность решений $y(t)$ и $x(t)$ дифференциальных уравнений (11) и (12), существование функций $\widetilde{g}(\cdot, x)$ и $g(\cdot, x)$, а также строятся их явный вид через известные коэффициенты рассматриваемых уравнений и винеровский процесс по корреляционной операторной функции $R_x^2(t, s)$ и по гауссовскому случайному процессу $x(t)$ из соотношения

$$x(t) = \int_0^a R_x(t, s) dw(s) .$$

По этому винеровскому процессу $w(t)$, как по винеровской мере, способом, анологичным [7], строятся расширенные стохастические интегралы для функций $g(\cdot, x)$ и $\widetilde{g}(\cdot, x)$:

$$\int_0^a \langle g(t, x(t)), dw(t) \rangle \text{ и } \int_0^a \langle \widetilde{g}(t, x(t)), dw(t) \rangle ,$$

доказывается их сходимость и выводится их явное выражение в коэффициентах рассматриваемых уравнений, а также доказывается эквивалентность мер μ_y, μ_x и в явном виде выписываются плотности Радона–Никодима $\frac{d\mu_y}{d\mu_x}(z) = \rho_a(z)$ и $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(z) = \widetilde{\rho}_a(z)$, а именно

$$\rho_a(z) = \widetilde{D}(z) \exp\left\{ -\alpha \int_0^a \langle \widetilde{g}(t, z(\cdot)), dw(t) \rangle - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^a \| \widetilde{g}(t, z(\cdot)) \|^2 dt \right\}, \tag{16}$$

$$\widetilde{\rho}_a(z) = D(z) \exp\left\{ -\alpha \int_0^a \langle g(t, z(\cdot)), dw(t) \rangle - \frac{\alpha^2}{2} \int_0^a \| g(t, z(\cdot)) \|^2 dt \right\}, \tag{17}$$

где $D(z)$ и $\widetilde{D}(z)$ — определители преобразований (13) и (14) соответственно. Они вычисляются в явном виде через собственные числа и собственные функции некоторых известных симметричных операторов (см. [7, 8]). В частном случае, когда известно, что существует сильная производная $b'_z(t, z(\cdot))$ по переменной z от функции $b(t, z(\cdot))$ и, кроме того,

$$\int_0^a Sp b'_z(t, z(\cdot)) < \infty, \quad z(\cdot) \in L_2, \tag{18}$$

где функция $b(t, z(\cdot))$ определяется из соотношения:

$$b(t, z(\cdot)) = \int_0^a B_1(t, s) f(s, y(s)) ds, \tag{19}$$

выражения $\widetilde{D}(z)$ и $D(z)$ на основании известных результатов (см. [5, 6]) легко вычисляются в замкнутой форме

$$\widetilde{D}(z) = \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2} \int_0^a Spb'_z(t,\, z(\cdot))\, dt \right\},$$

$$D(z) = \exp\left\{ \frac{\alpha}{2} \int_0^a Spb'_z(t,\, z(\cdot))\, dt \right\}.$$

Плотности Радона–Никодима $\rho_a(z)$ (16) и $\widetilde{\rho}_a(z)$ (17) легко записываются в терминах коэффициентов заданных дифференциальных уравнений (11) и (12), собственных чисел и собственных функций корреляционной операторной функции $R_x(t, s)$: $\{\lambda_k\}$, $\{\varphi_k(t)\}$ и $\left\{\psi_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(t)\right\}$ в виде

$$\rho_a(z) = \exp\left\{ -\frac{\alpha}{2} \int_0^a Spb'_z(t,\, z(\cdot))\, dt - \right.$$

$$-\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^a (b(t, z(\cdot)), \psi_k(t))(z(s), \varphi_k(s)) dtds - \right. \tag{20}$$

$$\left. - \int_0^a \int_0^a \int_0^a (\widetilde{K}(s, t, z(\cdot))\, R_x(t, \upsilon) \varphi_k(\upsilon), \varphi_k(s)) dtd\upsilon ds \right] -$$

$$\left. - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^a (b(t, z(\cdot)), \psi_k(t)) dt \right)^2 \right\}$$

и аналогично, учитывая соотношение (15), имеем

$$\widetilde{\rho}_a(z) = \exp\left\{ \frac{\alpha}{2} \int_0^a Spb'_z(t,\, z(\cdot))\, dt + \right.$$

$$+\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^a \int_0^a (b(t, z(\cdot)), \psi_k(t))(z(s), \varphi_k(s)) dtds - \right. \tag{21}$$

$$\left. - \int_0^a \int_0^a \int_0^a (K(s, t, z(\cdot))\, R_x(t, \upsilon) \varphi_k(\upsilon), \varphi_k(s)) dtd\upsilon ds \right] -$$

$$\left. - \frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^a (b(t, z(\cdot)), \psi_k(t)) dt \right)^2 \right\},$$

где функции $K(s, t, z)$ и $\widetilde{K}(s, t, z)$ являются ядрами интегральных операторов $g'_z(s, z)$ и $\widetilde{g}'_z(s, z)$ соответственно и определяются условия, при выполнении которых они существуют и явно вычисляются, а ряды, приведенные в формулах (20) и (21), сходятся по гауссовской мере μ_x.

Следовательно, рассматривая в гильбертовом пространстве H эволюционное нелинейное дифференциальное уравнение (11) и линеаризованное к нему уравнение вида (12), применяя к ним условия теоремы 3.2.1 из [7], приходим к выводу, что, во-первых, при этих условиях с вероятностью 1 всегда существуют решения $y(t)$ и $x(t)$ уравнений (11) и (12), и во-вторых, меры μ_y и μ_x, порожденные этими решениями, эквивалентны, соответствуют плотностям Радона–Никодима $\rho_a(z(\cdot))$ и $\widetilde{\rho}_a(z(\cdot))$, вычисляются в явном виде с помощью формул (20) и (21) соответственно. Поэтому в задаче о вычислении оптимальных оценок $\widetilde{h}(y)$ функционала $h(y)$ при решении $y(t)$ нелинейного эволюционного дифференциального уравнения (11) с использованием полученной в настоящей работе формулы (10) необходимо, чтобы в ней в качестве плотности $\rho_a(z(\cdot))$ подставлялось ее значение, вычисленное по формуле (20), а в качестве плотности $\widetilde{\rho}_a(z(\cdot))$ — ее значение по формуле (21).

Вернемся теперь к системе дифференциальных уравнений (11) и (12). Как уже отмечалось, между их решениями $y(t)$ и $x(t)$ (последнее является гауссовским процессом со значениями из H) при некоторых условиях существует их зависимость в виде прямого и обратного преобразований S и $T = S^{-1}$, т.е. соотношений (13) и (14), и кроме того, меры μ_y и μ_x, порожденные ими, эквивалентны и их плотности Радона–Никодима $\rho_a(z)$ и $\widetilde{\rho}_a(z)$ определяются соответственно по формулам (20) и (21). Если $x(t)$ — гауссовский случайный процесс и предположить, что он наблюдается до момента T, то его можно представить в следующем виде: $x(t) = l_T^*(t) + \varepsilon_T(t)$, $t \in [0;a]$, где $l_T^*(t) = l_T^*(t, x(\cdot)) = M\{x(t)/\Im_T^*\}$, $\Im_T^*$ — σ-алгебра событий, порожденных значениями $x(s)$ при $s \le T$, а $\varepsilon_T(t)$ — гауссовский случайный процесс, не зависящий от σ-алгебры $\Im_T^*$, $t \in [0;a]$. В связи с тем, что наблюдается не гауссовский процесс, а решение $y(t)$ дифференциального уравнения (11), введем обозначение

$$l_T(t) = l_T^*(t, x(\cdot))\Big|_{x(\cdot)=y(\cdot)}.$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если предположить, что на отрезке $[0;a]$ наблюдается решение $y(t)$ дифференциального уравнения (11) до момента T, t, $T \in [0;a]$, и выполняются все условия леммы 1, теоремы 1 настоящей работы, теоремы 3.2.2 из работ [3, 7, 8], а также ранее приведенные условия, то оптимальная оценка $\widetilde{h}(y(t))$ функционала $h(y(t))$ от решения $y(t)$ уравнения (11) с учетом вычисленной плотности Радона–Никодима $\widetilde{\rho}_a(z)$ по формуле (21) на основании формулы (10) примет окончательный замкнутый вид

$$\widetilde{h}(y(t)) = M^{(\varepsilon)}\Bigg(h(u(t)+\varepsilon_T(t)) \exp\Bigg\{ -\frac{\alpha}{2}\int_0^a Sp b_x'(t, u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot))\,dt -$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\int_0^a\int_0^a (b(t, u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t))(u(s)+\varepsilon_T(s), \varphi_k(s))dtds - \qquad (22)$$

$$-\int_0^a\int_0^a\int_0^a (\widetilde{K}(s,t,u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot))R_x(t,v)\varphi_k(v), \varphi_k(s))dtdsdv\Bigg] -$$

$$-\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^a (b(t, u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t))dt\right)^2\Bigg\}\Bigg)\Bigg|_{\substack{u(t)=l_T(t)\\ u(\cdot)=l_T(\cdot)}} \frac{1}{\rho_T(x(\cdot))}\Bigg|_{x(\cdot)=y(\cdot)}.$$

Особый интерес представляет случай, когда в дифференциальном уравнении (11) коэффициент α — малый параметр, т.е уравнение (11) содержит малую нелинейность в качестве слагаемого. Тогда правую часть формулы (22) можно разложить по степеням малого параметра α. Для этого используем формулу Маклорена для разложения функции $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$, а также отметим, что $\{\lambda_k\}$ и $\{\varphi_k(t)\}$ являются последовательностями собственных чисел и собственных функций корреляционной операторной функции $R_x(t, s)$ соответственно. Далее, для определения поставленных задач получения оценок по формуле (22) целесообразнее точку t увязать с точкой T, $t, T \in [0; a]$, например в виде $t = T + \beta$, откуда будет ясно, при каких значениях числа β поставлена та или иная оптимальная задача в данном конкретном случае. Действительно, если $\beta > 0$, а решение уравнения (11) наблюдается до момента T, то имеем задачу оптимального прогноза для функционала $h(y(t))$, если $\beta = 0$, — то задачу оптимальной фильтрации при соответствующем подборе функции $h(\cdot)$ и, наконец, при $\beta < 0$ в формуле (22) имеем оптимальную оценку в задаче интерполяции. Таким образом, формулу (22) можно рассматривать как универсальный алгоритм для вычисления оптимальных оценок для всех оптимизационных задач в их конкретных постановках: фильтрации, экстраполяции и интерполяции.

В формуле разложения $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ предположим, что переменная x примет значение:

$$x = \left\{ -\frac{\alpha}{2} \int_0^{T+\beta} Sp b'_x(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot))\, dt - \right.$$

$$-\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} (b(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t))(u(s) + \varepsilon_T(s), \varphi_k(s)) dtds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} (\widetilde{K}(s, t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)) R_x(t, v) \varphi_k(v), \varphi_k(s))\, dtdsdv \right] -$$

$$\left. -\frac{\alpha^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{T+\beta} (b(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t)) dt \right)^2 \right\}.$$

Введем обозначения

$$D_2 = D_2(u(\cdot), \varepsilon_T(\cdot), u(T+\beta), \varepsilon_T(T+\beta)) = -\frac{1}{2} \int_0^{T+\beta} Sp\, b'_x(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)) dt -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} (b(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t))(u(s) + \varepsilon_T(s), \varphi_k(s)) dtds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} \int_0^{T+\beta} (\widetilde{K}(s, t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)) R_x(t, v) \varphi_k(v), \varphi_k(s)) dtdsdv \right],$$

$$D_3 = D_3(u(\cdot), \varepsilon_T(\cdot)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{T+\beta} (b(t, u(\cdot) + \varepsilon_T(\cdot)), \psi_k(t)) dt \right)^2.$$

Тогда $x=\alpha D_2+\alpha^2 D_3$. Следовательно, $x^2=(\alpha D_2+\alpha^2 D_3)^2=\alpha^2 D_2^2+2\alpha^3 D_2 D_3+ +\alpha^4 D_3=\alpha^2 D_2^2+o(\alpha^2)$.

Далее обозначим

$$A_1=M^{(\varepsilon)}(h(u(T+\beta)+\varepsilon_T(T+\beta)))\Big|_{u(\cdot)=l_T(\cdot)}, \tag{23}$$

$$A_2= \\ =M^{(\varepsilon)}(h(u(T+\beta)+\varepsilon_T(T+\beta))\cdot D_2(u(\cdot),\varepsilon_T(\cdot),u(T+\beta),\varepsilon_T(T+\beta)))\Bigg|_{\substack{u(T+\beta)=l_T(T+\beta)\\ u(\cdot)=l_T(\cdot)}}, \tag{24}$$

$$A_3=M^{(\varepsilon)}(h(u(T+\beta)+\varepsilon_T(T+\beta))\cdot(D_3(u(\cdot),\varepsilon_T(\cdot))+ \tag{25}$$

$$+D_2^2(u(\cdot),\varepsilon_T(\cdot),u(T+\beta),\varepsilon_T(T+\beta)))\Bigg|_{\substack{u(\cdot)=l_T(\cdot)\\ u(T+\beta)=l_T(T+\beta)}}.$$

Тогда числитель формулы (22) в этих обозначениях можно разложить по степеням малого параметра α:

$$M^{(\varepsilon)}(h(u(T+\beta)+\varepsilon_T(T+\beta)))\exp\Bigg\{-\frac{\alpha}{2}\int_0^{T+\beta}Spb'_x(t,u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot))\,dt- \tag{26}$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\int_0^{T+\beta}\int_0^{T+\beta}(b(t,u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot)),\psi_k(t))(u(s)+\varepsilon_T(s),\varphi_k(s))dtds-$$

$$-\int_0^{T+\beta}\int_0^{T+\beta}\int_0^{T+\beta}(\widetilde{K}(s,t,u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot))R_x(t,v)\varphi_k(v),\varphi_k(s))\,dtdsdv\Bigg]-$$

$$-\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{T+\beta}(b(t,u(\cdot)+\varepsilon_T(\cdot)),\psi_k(t))dt\right)^2\Bigg\}\Bigg|_{\substack{u(T+\beta)=l_T(T+\beta)\\ u(\cdot)=l_T(\cdot)}}=A_1+\alpha A_2+\alpha^2 A_3+o(\alpha^2),$$

где коэффициенты A_1, A_2 и A_3 эффективно вычисляются из формул (23)–(25).

Аналогично легко получается разложение знаменателя формулы (22) по степеням малого параметра. Действительно, если в формуле (20) плотности Радона–Никодима положить $a=T$, $z(\cdot)=x(\cdot)$, а показатель степени в экспоненте обозначить x, то, как и ранее, получим

$$x=-\frac{\alpha}{2}\int_0^T Spb'_x(t,x(\cdot))\,dt-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^T(b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))(x(\cdot),\varphi_k(s))dtds-$$

$$-\alpha\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^T\int_0^T(\widetilde{K}(s,t,x(\cdot))R_x(t,v)\varphi_k(v),\varphi_k(s))\,dtdsdv-$$

$$\frac{\alpha^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^T(b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))dt\right)^2.$$

Обозначим теперь, как и ранее,

$$G_2(x(\cdot))=-\frac{1}{2}\int_0^T Spb'_x(t,x(\cdot))dt-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^T(b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))(x(\cdot),\varphi_k(s))dtds-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\int_0^T\int_0^T(\widetilde{K}(s,t,x(\cdot))R_x(t,v)\varphi_k(v),\varphi_k(s))dtdsdv,$$

$$G_3(x(\cdot))=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^T(b(t,x(\cdot)),\psi_k(t))dt\right)^2.$$

Тогда

$$x^2(G_2(x(\cdot))+G_3(x(\cdot)))^2=\alpha^2G_2^2(x(\cdot))+2\alpha^3G_2(x(\cdot))G_3(x(\cdot))+\alpha^4G_3^2(x(\cdot))=$$

$$=\alpha^2G_2^2(x(\cdot))+o(\alpha^2).$$

Следовательно, плотность Радона–Никодима $\rho_T(x(\cdot))$ в этом случае разлагается в ряд по степеням малого параметра α и принимает вид:

$$\rho_T(x(\cdot))=1+\alpha G_2(x(\cdot))+\alpha^2(G_3(x(\cdot))+G_2^2(x(\cdot)))+o(\alpha^2).$$

Если далее введем обозначения

$$B_2=B_2(y(\cdot)\big|_0^T)=G_2(x(\cdot))\big|_{x(\cdot)=y(\cdot)|_0^T}, \tag{27}$$

$$[G_3(x(\cdot))+G_2^2(x(\cdot))]\big|_{x(\cdot)=.\,y(\cdot)|_0^T}=B_3(y(\cdot)\big|_0^T)=B_3, \tag{28}$$

то плотность $\rho_T(y(\cdot))=\rho_T(x(\cdot))\big|_{x(\cdot)=y(\cdot)|_0^T}$ примет вид в разложении по степеням α

$$\rho_T(y(\cdot))=1+\alpha B_2+\alpha^2B_3+o(\alpha^2). \tag{29}$$

Следовательно, после всех проведенных вычислений можно утверждать, что если уравнение (11) содержит малую нелинейность, т.е. α — малый параметр, то оптимальную оценку $\widetilde{h}(y(\cdot))$ функционала $h(y(\cdot))$ по наблюдаемым значениям решения $y(t)$ уравнения (11) можно разложить по степеням малого параметра α и поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если выполняются условия леммы 1, теорем 1 и 2 настоящей работы, а также параметр α в уравнении (11) является малым, то оптимальная оценка $\widetilde{h}(y(\cdot))$ функционала $h(y(\cdot))$, определенная по формуле (22) и вычисленная, например в точке $t=T+\beta$, разлагается по степеням малого параметра α и с учетом формул (26) и (29) имеет вид

$$\widetilde{h}(y(T+\beta))=\frac{A_1+\alpha A_2+\alpha^2A_3+o(\alpha^2)}{1+\alpha B_2+\alpha^2B_3+o(\alpha^2)}=C_1+\alpha C_2+\alpha^2C_3+o(\alpha^2), \tag{30}$$

где коэффициенты C_1, C_2 и C_3 легко вычисляются из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}C_1=A_1,\\ C_2+C_1B_2=A_2,\\ C_3+C_2B_2+C_1B_3=A_3,\end{cases}$$

а коэффициенты A_1, A_2, A_3, B_2 и B_3 эффективно определяются из соотношений

(23)–(25), (27) и (28) соответственно, так как они вычисляются по наблюдаемым значениям решения $y(t)$ дифференциального уравнения (12) в интервале $[0;T]$ и известным линейным гауссовским оценкам $l_T\,(y(\cdot)\big|_0^T)$ на этих наблюдениях.

Таким образом, формула (30) определяет разложение оптимальной оценки $\widetilde{h}\,(y(T+\beta))$ функционала $h(y(T+\beta))$ по степеням малого параметра α. В некотором смысле она является общей формулой, содержащей оптимальные оценки и в задаче оптимальной экстраполяции (прогноза), и в задаче фильтрации, и в задаче интерполяции каждый раз выбором функционала $h(\cdot)$ и числа β. Так, например, если $h(y(T+\beta)) = y(T+\beta)$ и $\beta > 0$, то формула (30) дает оптимальную оценку экстраполяции $\widetilde{y}(T+\beta)$ величины $y(T+\beta)$; если $\beta < 0$, то она определяет оптимальную оценку в задаче интерполяции, а при $\beta = 0$ и соответствующем подборе функции $h(y(\cdot))$ — задачу оптимальной фильтрации. Например, $h(y)$ — вектор с двумя компонентами (y_1, y_2), причем компонента y_1 наблюдается до момента T, а компонента y_2 — по этим наблюдениям оптимально оценивается $\hat{y}_2$ в точке $T+\beta$. В этом случае имеем задачу оптимальной фильтрации, а формула (30) определяет эту оптимальную оценку $\widetilde{y}_2\,(T+\beta)$, и в зависимости от значения β получаем из нее оптимальную фильтрацию с упреждением ($\beta > 0$), чистую фильтрацию ($\beta = 0$) и фильтрацию с интерполированием ($\beta < 0$).

Кроме этого, формула (30) показывает, что при малых нелинейностях, содержащихся в уравнении (11), отклонение оптимальной оценки в задачах экстраполяции или фильтрации, или интерполяции от линейных оценок в аналогичных задачах имеет такой же порядок, что и порядок самой нелинейности. Поэтому использование оптимальных оценок вместо линейных приводит к существенным улучшениям линейных оценок.

Следовательно, как показано ранее, формулы (22) и (30) (при малой величине параметра α) имеют наиболее общий характер и могут являться алгоритмом вычисления оптимальных оценок в поставленных конкретных задачах, где в явном виде заданы дифференциальные уравнения (11) как с гладкими, так и с неограниченными коэффициентами. Для некоторых классов гауссовских процессов построены алгоритмы вычисления в явном виде (или в приближенном с допустимой погрешностью) спектра собственных чисел и собственных функций. Используя формулы (22) или (30), можно вычислить в явном виде оптимальные оценки в поставленных задачах экстраполяции, фильтрации или интерполяции для решения $y(t)$ уравнения (11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. Москва: Наука, 1971. С. 357.

2. Яглом А.М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью. *Тр. Москов. математ. общества.* 1955. № 4. С. 237–278.

3. Фомина Т.А. Некоторые линейные и нелинейные эквивалентные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве. Дис. ... канд. физ.-мат. наук, Специализированный ученый совет ИПММ НАН Украины, Донецк, 2005.

4. Фомина Т.А. Некоторые линейные и нелинейные эквивалентные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Донецкий национальный университет экономики и торговли, Донецк, 2005. С. 121.

5. Шаташвили А.Д. О преобразовании мер в гильбертовом пространстве с помощью линейных дифференциальных уравнений. *Теория случайных процессов.* 1973. Вып. 2. С. 113–120.

6. Шаташвили А.Д. О преобразованиях гауссовской меры в гильбертовом пространстве, порожденных дифференциальными уравнениями. *Теория случайных процессов.* 1973. Вып. 2. С. 120–128.

7. Фомин-Шаташвили А.А., Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных эволюционных дифференциальных уравнении в гильбертовом пространстве, возмущенных гауссовскими процессами. I. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 6. С. 89–101.

8. Фомин-Шаташвили А.А., Фомина Т.А., Шаташвили А.Д. Об эквивалентности вероятностных мер, порожденных решениями нелинейных эволюционных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, возмущенных гауссовскими процессами. II. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. Т. 48, № 1. С. 49–61.

9. Shatashvili A.D., Didmanidze I.Sh., Fomina T.A. On the method of constructing algorithms for the effective calculation of optimal estimates in extrapolation (forecast), filtering and interpolation tasks for functionals of random processes with values in the Hilbert spaces. *XXX International Conf. "Problems of decision making under uncertainties (PDMU–2017)".* (Vilnius, Aug. 14–19, 2017). Abstracts. Vilnius, 2017. P. 111.

Надійшла до редакції 26.10.2017

А.Д. Шаташвілі, І.Ш. Дідманідзе, Т.О. Фоміна, А.А. Фомін-Шаташвілі

ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ В ЗАДАЧАХ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ, ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ З ГІЛЬБЕРТОВОГО ПРОСТОРУ

Анотація. Отримано загальні формули для ефективного обчислення оптимальних оцінок для функціоналів від випадкових процесів зі значеннями з гільбертового простору. В окремому випадку, коли досліджуваний процес є розв'язком деякого нелінійного еволюційного диференціального рівняння з малою нелінійністю, проведено розвинення отриманих оптимальних оцінок за степенями малого параметра, а коефіцієнти розвинення задано у вигляді алгоритмів і обчислено в явному вигляді через відомі величини диференціального рівняння.

Ключові слова: алгоритм, еволюційні диференціальні рівняння, щільність Радона–Никодима, розширений стохастичний інтеграл, еквівалентність мір, функціонал.

A.D. Shatashvili, I.Sh. Didmanidze, T.A. Fomina, A.A. Fomin-Shatashvili

OPTIMAL ESTIMATES IN THE PROBLEMS OF EXTRAPOLATION, FILTRATION, AND INTERPOLATION OF FUNCTIONALS OF RANDOM PROCESSES WITH VALUES IN A HILBERT SPACE

Abstract. General formulas are obtained for efficient calculation of optimal estimates for functionals of random processes with values in a Hilbert space. In a special case where the process under study is a solution of a nonlinear evolutionary differential equation with a small nonlinearity, the optimal estimates are expanded in powers of a small parameter and the expansion coefficients are given in the form of algorithms and calculated explicitly in terms of known quantities of the differential equation.

Keywords: algorithm, evolutionary differential equations, Radon–Nikodym density, extended stochastic integral, equivalence of measures, functional.

Шаташвили Альберт Даниелович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Батумского государственного университета имени Шота Руставели, Грузия, e-mail: shatal@bk.ru.

Дидманидзе Ибраим Шотаевич,
кандидат физ.-мат. наук, доктор философии, профессор кафедры Батумского государственного университета имени Шота Руставели, Грузия, e-mail: ibraim.didmanidze@bsu.edu.ge.

Фомина Тамара Александровна,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Батумского государственного университета имени Шота Руставели, Грузия, e-mail: shatal@bk.ru.

Фомин-Шаташвили Андрей Альбертович,
старший преподователь Батумского государственного универсаитета имени Шота Руставели, Грузия, e-mail:shatal@bk.ru.