УДК 517.988

В.В. СЕМЁНОВ

ИНЕРЦИОННЫЕ ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ[1]

Аннотация. Предложены новые инерционные алгоритмы для решения операторных включений с максимальными монотонными операторами, действующими в гильбертовом пространстве. Алгоритмы основаны на инерционной экстраполяции и трех известных методах: алгоритме расщепления Ценга и двух гибридных алгоритмах для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.

Ключевые слова: операторное включение, максимальный монотонный оператор, гильбертово пространство, инерционный метод, алгоритм Ценга, гибридный алгоритм, сильная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Теория монотонных операторов — активно развивающееся направление прикладного нелинейного анализа [1]. Многие актуальные задачи обработки данных, исследования операций и математической физики можно записать в виде вариационных неравенств или в более абстрактной форме операторных включений с монотонными операторами [1], для решения которых к настоящему времени предложены и теоретически обоснованы различные надежные численные методы [1–16]. Однако не все вопросы разработаны с исчерпывающей полнотой.

Одним из эффективных способов ускорения базовых итерационных методов является введение в процесс инерции. В выпуклой оптимизации первым методом данного типа стал широко известный метод тяжелого шарика Поляка. В последнее время этот прием приобрел большую популярность, что отражено в публикациях [8–16]. В работе [12] предложен и обоснован инерционный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств. В [13] приведены две инерционные модификации алгоритма Красносельского–Манна для аппроксимации неподвижных точек нерастягивающих операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В работах [14–16] для операторных включений с операторами, имеющими вид суммы максимального монотонного и обратно сильно монотонного оператора, предложено и изучено несколько вариантов инерционных модификаций классической forward-backward схемы расщепления. Однако для операторных включений с монотонными и только липшицевыми операторами вместо обратно сильно монотонных последние методы не работают. Цель работы — построить сильно сходящиеся для таких включений алгоритмы.

В данной статье для решения операторных включений с максимальным монотонным и монотонным липшицевым операторами, действующими в гильбертовом пространстве, предложены два новых инерционных алгоритма. Каждый алгоритм является регуляризацией известной схемы расщепления Ценга [2] с введенной инерцией. Регуляризация осуществлена соответствующим гибридным методом поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов [17, 18]. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей к метрической проекции заданной точки на множество решений операторного включения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке МОН Украины (проект «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології», № 0116U004777).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для многозначного оператора $A: H \to 2^H$ используем следующие обозначения:

$$\operatorname{dom}(A) = \{x \in H : Ax \neq \varnothing\}, \quad A^{-1}0 = \{x \in H : 0 \in Ax\}.$$

Отметим, что резольвентой многозначного оператора $A: H \to 2^H$ называют оператор $J_A = (I + A)^{-1}: H \to 2^H$, где I — единичный оператор [1]. Известно, что в случае максимальной монотонности оператора A резольвента J_T является однозначным, всюду заданным и твердо нерастягивающим (firmly non-expansive) оператором, а множество $A^{-1}0$ — замкнутым и выпуклым (возможно, пустым) [1].

Лемма 1 [1]. Пусть $A: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор, x, $u \in H$. Тогда

$$(u - v, x - y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom}(A), \ \ \forall\, v \in Ay \Leftrightarrow x \in \operatorname{dom}(A), \ \ u \in Ax.$$

Пусть также P_C — оператор проектирования на непустое выпуклое и замкнутое множество $C \subseteq H$, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\| P_C x - x \| = \min_{z \in C} \| z - x \|$. Известны следующие критерии элемента $P_C x$ [1]:

$$y = P_C x \Leftrightarrow \ y \in C, \ \ (y - x, z - y) \geq 0 \ \ \forall\, z \in C;$$

$$y = P_C x \Leftrightarrow \ y \in C, \ \ \| y - z \|^2 \leq \| x - z \|^2 - \| y - x \|^2 \ \ \forall\, z \in C.$$

Заметим, что $P_C = J_{N_C}$, где N_C — нормальный конус множества C [1].

Сформулируем задачу. Пусть $A: H \to H$ — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица $L > 0$, причем $\operatorname{dom}(A) = H$; $B: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор. Отметим, что оператор $A + B: H \to 2^H$ максимально монотонный и $\operatorname{dom}(A + B) = \operatorname{dom}(B)$. Рассмотрим операторное включение

$$0 \in (A + B)x. \tag{1}$$

Замечание 1. Если $B = N_C$ — нормальный конус замкнутого выпуклого множества $C \subseteq H$, то задача (1) является вариационным неравенством: найти такой элемент $x \in C$, что $(Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C$.

Предположим, что множество решений включения (1) не пусто, т.е.

$$S = (A + B)^{-1}0 \neq \varnothing.$$

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

Для получения сильно сходящихся аппроксимаций решений операторного включения (1) приведем следующие алгоритмы.

Алгоритм 1

Выбираем элементы x_0, $x_1 \in H$. Задаем последовательности чисел $\lambda_n \in [a, b]$, $\theta_n \in [0, \theta]$, где $a, b \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$, $\theta \in (0, 1)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = x_n + \theta_n (x_n - x_{n-1}).$$

Шаг 2. Вычислить

$$u_n = y_n - \lambda_n A y_n, \quad v_n = J_{\lambda_n B} u_n,$$
$$w_n = y_n - u_n + v_n - \lambda_n A v_n.$$

Шаг 3. Вычислить

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1,$$

где

$$C_n = \{z \in H : \| w_n - z \| \le \| y_n - z \|\},$$
$$Q_n = \{z \in H : (x_n - z, x_1 - x_n) \ge 0\}.$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Алгоритм 2

Выбираем элементы x_0, $x_1 \in H$. Задаем последовательности чисел $\lambda_n \in [a, b]$, $\theta_n \in [0, \theta]$, где $a, b \in \left(0, \frac{1}{L}\right)$, $\theta \in (0, 1)$. Полагаем $n = 1$, $C_1 = H$.

Шаг 1. Вычислить

$$y_n = x_n + \theta_n (x_n - x_{n-1}).$$

Шаг 2. Вычислить

$$u_n = y_n - \lambda_n A y_n, \quad v_n = J_{\lambda_n B} u_n,$$
$$w_n = y_n - u_n + v_n - \lambda_n A v_n.$$

Шаг 3. Вычислить

$$x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_1,$$

где

$$C_{n+1} = C_n \bigcap \{z \in H : \| w_n - z \|^2 \le$$
$$\le \| x_n - z \|^2 + 2\theta_n^2 \| x_n - x_{n-1} \|^2 + 2\theta_n (x_n - z, x_n - x_{n-1})\}.$$

Положить $n := n+1$ и перейти на шаг 1.

Замечание 2. Алгоритм 1 реализует идею инерционной экстраполяции и регуляризации метода расщепления Ценга [2] с помощью гибридного метода [17], а алгоритм 2 — метода [18].

Замечание 3. Очевидно, что определенные в алгоритмах 1 и 2 множества $C_n \bigcap Q_n$ и C_{n+1} выпуклые и замкнутые. Далее показана их непустота и корректность определения элементов x_n.

Замечание 4. Для вариационных неравенств замечания 1 шаг 2 алгоритмов 1 и 2 имеет вид

$$v_n = P_C (y_n - \lambda_n A y_n),$$
$$w_n = v_n - \lambda_n (A v_n - A y_n).$$

Замечание 5. Вычисление метрической проекции $P_{C_n \cap Q_n} x_1$ в алгоритме 1 можно выполнить явно [1].

Справедливо важное неравенство, связывающее расстояния от порожденных алгоритмами точек до множества S.

Лемма 2. Для последовательностей (y_n), (v_n) и (w_n), порожденных алгоритмом 1 или алгоритмом 2, имеет место неравенство

$$\| w_n - z \|^2 \le \| y_n - z \|^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) \| y_n - v_n \|^2,$$

где $z \in S$.

Доказательство приведено в монографии [1] и работах [2, 4, 5].

Перейдем к доказательству сильной сходимости алгоритмов.

Сходимость алгоритма 1. Вначале установим важное свойство локализации множества решений операторного включения (1) с помощью множеств $C_n \bigcap Q_n$.

Лемма 3. Для всех $n \in \mathbb{N}$ имеет место вложение

$$S \subseteq C_n \bigcap Q_n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $z \in S = (A+B)^{-1}0$. Из неравенства леммы 2 следует, что $\|w_n - z\| \le \|y_n - z\|$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $S \subseteq C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С использованием математической индукции покажем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо вложение $S \subseteq C_n \bigcap Q_n$. Для $n=1$ имеем $Q_n = H$. Следовательно, $S \subseteq C_1 \bigcap Q_1$. Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $S \subseteq C_k \bigcap Q_k$. Тогда существует единственная точка $x_{k+1} \in C_k \bigcap Q_k$ такая, что $x_{k+1} = P_{C_k \bigcap Q_k} x_1$, откуда следует $(x_{k+1} - z, x_1 - x_{k+1}) \ge 0 \ \forall z \in C_k \bigcap Q_k$. Поскольку $S \subseteq C_k \bigcap Q_k$, имеем $S \subseteq Q_{k+1}$. Таким образом, $S \subseteq C_{k+1} \bigcap Q_{k+1}$. Вложение (2) доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. ■

Лемма 4. Последовательности (x_n), (y_n), (v_n) и (w_n) ограничены,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|w_n - x_{n+1}\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n - y_n\| = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем сначала, что последовательности (x_n) и (y_n) ограничены. Из $x_{n+1} = P_{C_n \bigcap Q_n} x_1$ вытекает $\|x_{n+1} - x_1\| \le \|z - x_1\| \ \forall z \in C_n \bigcap Q_n$. Поскольку $P_S x_1 \in S \subseteq C_n \bigcap Q_n$, имеем

$$\|x_{n+1} - x_1\| \le \|P_S x_1 - x_1\| \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Отсюда следует ограниченность (x_n) и, естественно, ограниченность (y_n).

Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \tag{5}$$

Из $x_{n+1} \in C_n \bigcap Q_n \subseteq Q_n$ и $x_n = P_{Q_n} x_1$ вытекает $\|x_{n+1} - x_1\| \ge \|x_n - x_1\| \ \forall n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(\|x_n - x_1\|)$ ограниченная и неубывающая. Следовательно, существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_1\|$. Так как $x_{n+1} \in Q_n$, имеем $(x_n - x_{n+1}, x_1 - x_n) \ge 0$,

$$\|x_n - x_{n+1}\|^2 = \|(x_n - x_1) - (x_{n+1} - x_1)\|^2 =$$

$$= \|x_n - x_1\|^2 - 2(x_n - x_1, x_{n+1} - x_1) + \|x_{n+1} - x_1\|^2 =$$

$$= \|x_{n+1} - x_1\|^2 - \|x_n - x_1\|^2 - 2(x_n - x_{n+1}, x_1 - x_n) \le \|x_{n+1} - x_1\|^2 - \|x_n - x_1\|^2,$$

откуда получаем соотношение (5).

Поскольку

$$\|y_n - x_n\| = \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \le \theta \|x_n - x_{n-1}\|,$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0. \tag{7}$$

Поскольку $x_{n+1} \in C_n$, имеем $|| w_n - x_{n+1} || \le || y_n - x_{n+1} ||$. Отсюда получаем ограниченность последовательности (w_n) и, с учетом (7), асимптотику

$$\lim_{n\to\infty} || w_n - x_{n+1} || = 0. \tag{8}$$

Используя лемму 2, получаем

$$|| y_n - v_n ||^2 \le \frac{|| y_n - z ||^2 - || w_n - z ||^2}{1-\lambda_n^2 L^2} = \frac{(|| y_n - z || - || w_n - z ||)(|| y_n - z || + || w_n - z ||)}{1-\lambda_n^2 L^2} \le$$

$$\le \frac{(|| y_n - z || + || w_n - z ||)}{1-\lambda_n^2 L^2} || y_n - w_n || \le$$

$$\le \frac{(|| y_n - z || + || w_n - z ||)}{1-\lambda_n^2 L^2} (|| y_n - x_{n+1} || + || x_{n+1} - w_n ||),$$

где $z \in S$. Из формул (7) и (8) следует $\lim_{n\to\infty} || y_n - v_n || = 0$ и ограниченность последовательности (v_n). ■

Лемма 5. Слабые предельные точки последовательностей (x_n), (y_n), (v_n) и (w_n) принадлежат множеству S.

Доказательство. Из ограниченности последовательности (x_n) вытекает существование подпоследовательности (x_{n_k}), слабо сходящейся к точке $q \in H$. Покажем, что $q \in S$. Из (3) следует

$$y_{n_k} \to q \text{ слабо}, \ v_{n_k} \to q \text{ слабо}, \ w_{n_k} \to q \text{ слабо},$$

$$r_{n_k} = \frac{y_{n_k} - v_{n_k}}{\lambda_{n_k}} + Av_{n_k} - Ay_{n_k} \to 0, \ r_{n_k} \in (A+B)v_{n_k}.$$

Имеем

$$(r_{n_k} - p, v_{n_k} - y) \ge 0 \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom}(A+B), \ \ \forall\, p \in (A+B)y.$$

После предельного перехода получим $(0 - p, q - y) \ge 0 \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom}(A+B)$, $\forall\, p \in (A+B)y$. Поскольку оператор $A+B$ максимальный монотонный, согласно лемме 1 имеем $0 \in (A+B)q$. ■

Сформулируем один из основных результатов работы.

Теорема 1. Пусть $A: H \to H$ — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица $L > 0$, причем $\operatorname{dom}(A) = H$, $B: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор и $S = (A+B)^{-1}0 \ne \varnothing$. Тогда порожденная алгоритмом 1 последовательность (x_n) сильно сходится к элементу $P_{(A+B)^{-1}0}x_1$.

Доказательство. Пусть подпоследовательность (x_{n_k}) слабо сходится к элементу $w \in H$. Известно, что $w \in S = (A+B)^{-1}0$. Для $P_{(A+B)^{-1}0}x_1$ из слабой полунепрерывности снизу нормы и неравенства (4) следует

$$|| x_1 - P_{(A+B)^{-1}0}x_1 || \le || x_1 - w || \le \varliminf_{k\to\infty} || x_1 - x_{n_k} || \le$$
$$\le \varlimsup_{k\to\infty} || x_1 - x_{n_k} || \le || x_1 - P_{(A+B)^{-1}0}x_1 ||.$$

Таким образом, получено $\lim_{k\to\infty} || x_1 - x_{n_k} || = || x_1 - w || = || x_1 - P_{(A+B)^{-1}0}x_1 ||$, откуда $x_{n_k} \to w = P_{(A+B)^{-1}0}x_1$. Следовательно, $x_n \to P_{(A+B)^{-1}0}x_1$. ■

Замечание 6. В силу (3) получаем $y_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$, $v_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$ и $w_n \to P_{(A+B)^{-1}0} x_1$.

Далее установим сильную сходимость алгоритма 2.

Сходимость алгоритма 2. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $A: H \to H$ — монотонный и липшицевый оператор с константой Липшица $L > 0$, причем $\operatorname{dom}(A) = H$, $B: H \to 2^H$ — максимальный монотонный оператор и $S = (A+B)^{-1}0 \neq \varnothing$. Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n), (y_n), (v_n) и (w_n) сильно сходятся к элементу $P_{(A+B)^{-1}0} x_1$.

Доказательство. Для $z \in S$ и порожденных алгоритмом 2 последовательностей имеет место неравенство

$$||w_n - z||^2 \leq ||y_n - z||^2 - (1 - \lambda_n^2 L^2) ||y_n - v_n||^2. \tag{9}$$

Покажем, что алгоритм 2 порождает монотонную цепочку вложений

$$H = C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots \supseteq C_n \supseteq \ldots \supseteq S = (A+B)^{-1}0.$$

Предположим, что $S = (A+B)^{-1}0 \subseteq C_n$. Для $z \in S$ из неравенства (9) вытекает

$$||w_n - z||^2 \leq ||y_n - z||^2 = ||x_n + \theta_n (x_n - x_{n-1}) - z||^2 \leq$$

$$\leq ||x_n - z||^2 + 2\theta_n (x_n - x_{n-1}, y_n - z) =$$

$$= ||x_n - z||^2 + 2\theta_n (x_n - x_{n-1}, y_n - x_n) + 2\theta_n (x_n - x_{n-1}, x_n - z) =$$

$$= ||x_n - z||^2 + 2\theta_n^2 ||x_n - x_{n-1}||^2 + 2\theta_n (x_n - x_{n-1}, x_n - z),$$

откуда $S \subseteq C_{n+1} \subseteq C_n$.

Покажем существование конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_1||$. Поскольку $x_n = P_{C_n} x_1$, $S \subseteq C_n$, для всех $z \in S$ имеет место неравенство

$$||x_n - z||^2 \leq ||x_1 - z||^2 - ||x_n - x_1||^2,$$

откуда $||x_n - x_1|| \leq ||x_1 - z||$. Последовательность $(||x_n - x_1||)$ ограничена сверху. Поскольку $C_{n+1} \subseteq C_n$, имеем $||x_{n+1} - x_1|| \geq ||x_n - x_1||$. Таким образом, последовательность $(||x_n - x_1||)$ ограничена сверху и неубывающая, поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_1||$.

Покажем фундаментальность последовательности (x_n). Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ с учетом $C_{n+m} \subseteq C_n$ имеем

$$||x_{n+m} - x_n||^2 = ||x_{n+m} - P_{C_n} x_1||^2 \leq ||x_1 - x_{n+m}||^2 - ||x_n - x_1||^2,$$

откуда следует фундаментальность последовательности (x_n). Таким образом, $x_n \to q \in H$ при $n \to \infty$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_{n+1} - x_n|| = 0$. Поскольку

$$||y_n - x_n|| = \theta_n ||x_n - x_{n-1}|| \leq \theta ||x_n - x_{n-1}||,$$

имеем $\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = 0$. Кроме того, $\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_{n+1} \| = 0$. Так как $x_{n+1} \in$ $\in C_{n+1} \subseteq C_n$, имеем

$$\| y_n - w_n \| \le \| y_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - w_n \| \le$$

$$\le \| y_n - x_{n+1} \| + \sqrt{\| x_n - x_{n+1} \|^2 + 2\theta_n^2 \| x_n - x_{n-1} \|^2 + 2\theta_n (x_n - x_{n+1}, x_n - x_{n-1})} \le$$

$$\le \| y_n - x_{n+1} \| + \sqrt{\| x_n - x_{n+1} \|^2 + 2\theta_n^2 \| x_n - x_{n-1} \|^2 + 2\theta_n \| x_n - x_{n+1} \| \, \| x_n - x_{n-1} \|} \to 0.$$

Используя неравенство (9), получаем

$$\| y_n - v_n \|^2 \le \frac{\| y_n - z \|^2 - \| w_n - z \|^2}{1 - \lambda_n^2 L^2} = \frac{(\| y_n - z \| - \| w_n - z \|)(\| y_n - z \| + \| w_n - z \|)}{1 - \lambda_n^2 L^2} \le$$

$$\le \frac{(\| y_n - z \| + \| w_n - z \|)}{1 - \lambda_n^2 L^2} \| y_n - w_n \| \to 0,$$

где $z \in S$. Следовательно, имеем $y_n \to q$, $w_n \to q$ и $v_n \to q$ при $n \to \infty$.

Покажем, что $q \in S$. Имеем

$$(A + B) v_n \ni r_n = \frac{y_n - v_n}{\lambda_n} + A v_n - A y_n \to 0.$$

Вследствие монотонности $A + B$ справедливо неравенство

$$(r_n - p, v_n - y) \ge 0 \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom}(A + B), \ \forall\, p \in (A + B) y.$$

После предельного перехода получим

$$(0 - p, q - y) \ge 0 \ \ \forall\, y \in \operatorname{dom}(A + B), \ \forall\, p \in (A + B) y.$$

Поскольку оператор $A + B$ максимальный монотонный, согласно лемме 1 имеем $0 \in (A + B) q$, т.е. $q \in S$. Так как $x_n = P_{C_n} x_1$ и $S \subseteq C_n$, имеем

$$(x_n - x_1, z - x_n) \ge 0 \ \ \forall\, z \in S. \tag{10}$$

Выполнив в неравенстве (10) предельный переход, получим $(q - x_1, z - q) \ge 0$ $\forall\, z \in S$, т.е. $q = P_{(A+B)^{-1} 0} x_1$. ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрена проблема решения операторных включений

$$0 \in (A + B) x,$$

где оператор $A : H \to H$ монотонный и липшицевый, а $B : H \to 2^H$ максимальный монотонный. Предложены два новых инерционных алгоритма аппроксимации метрической проекции заданной точки на множество решений операторного включения. Каждый из этих алгоритмов является регуляризацией схемы расщепления Ценга [2] с введенной инерцией. Регуляризация осуществлена с помощью соответствующего гибридного метода поиска неподвижных точек нерастягивающих операторов [17, 18]. Доказаны теоремы о сильной сходимости порожденных алгоритмами последовательностей.

Условие $\lambda_n \in [a, b] \subseteq (0, 1 / L)$ в алгоритмах не всегда конструктивно и имеет скорее теоретическое значение. На практике величину λ_n можно получить дроблением произвольной начальной величины $\sigma > 0$ за конечное число шагов. Например,

$$\begin{cases} j(n) = \min \left\{ j \geq 0 : \dfrac{\| AJ_{\sigma\tau^j B} (I - \sigma\tau^j A) y_n - A y_n \|}{\| J_{\sigma\tau^j B} (I - \sigma\tau^j A) y_n - y_n \|} \leq \dfrac{\tau^j \theta}{\sigma} \right\}, \\ \lambda_n = \sigma\tau^{j(n)} , \end{cases}$$

где $\sigma > 0$, $\theta \in (0,1)$, $\tau \in (0,1)$ — заданные параметры [2, 19, 20]. Используя рассуждения работ [19, 20], можно гарантировать корректность правила выбора λ_n и без предположения о глобальной липшицевости оператора A. Заметим, что в этой схеме дробления необходимо вычислять значения композиций $(I + \sigma\tau^j B)^{-1} (I - \sigma\tau^j A)$, что может отразиться на общей вычислительной эффективности метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2011. 408 p.
2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM J. Control Optim*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
3. Ляшко С.И., Семенов В.В., Войтова Т.А. Экономичная модификация метода Корпелевич для монотонных задач о равновесии. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 146–154.
4. Семенов В.В. Гибридные методы расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 104–112.
5. Семенов В.В. Сильно сходящийся метод расщепления для системы операторных включений с монотонными операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 3. С. 22–32.
6. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. Goldengorin B. (ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications*. Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325.
7. Семенов В.В. Вариант метода зеркального спуска для вариационных неравенств. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 2. С. 83–93.
8. Alvarez F., Attouch H. An inertial proximal method for monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping. *Set-Valued Anal*. 2001. Vol. 9. P. 3–11.
9. Attouch H., Peypouquet J., Redont P. A dynamical approach to an inertial forward-backward algorithm for convex minimization. *SIAM J. Optim*. 2014. Vol. 24. P. 232–256.
10. Attouch H., Chbani Z., Riahi H. Combining fast inertial dynamics for convex optimization with Tikhonov regularization. *J. Math. Anal. Appl*. 2018. Vol. 457. P. 1065–1094.
11. Ochs P., Chen Y., Brox T., Pock T. Ipiano: inertial proximal algorithm for non-convex optimization. *SIAM J. Imaging Sci*. 2014. Vol. 7. P. 1388–1419.
12. Dong Q.L., Lu Y.Y., Yang J. The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality. *Optimization*. 2016. Vol. 65. P. 2217–2226.
13. Dong Q.L., Yuan H.B., Cho Y.J., Rassias Th.M. Modified inertial Mann algorithm and inertial CQ-algorithm for nonexpansive mappings. *Optim. Lett*. 2018. Vol. 12, N 1. P. 87–102.
14. Moudafi A., Oliny M. Convergence of a splitting inertial proximal method for monotone operators. *J. Comput. Appl. Math*. 2003. Vol. 155. P. 447–454.
15. Lorenz D., Pock T. An inertial forward-backward algorithm for monotone inclusions. *J. Math. Imaging Vis*. 2015. Vol. 51. P. 311–325.

16. Khan S.A., Suantai S., Cholamjiak W. Shrinking projection methods involving inertial forward-backward splitting methods for inclusion problems. *RACSAM*. 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s13398-018-0504-1.
17. Nakajo K., Takahashi W. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups. *J. Math. Anal. Appl*. 2003. Vol. 279. P. 372–379.
18. Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces. *J. Math. Anal. Appl*. 2008. Vol. 341. P. 276–286.
19. Верлань Д.А., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сильно сходящийся модифицированный экстраградиентный метод для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 4. С. 37–50.
20. Денисов С.В., Семенов В.В., Чабак Л.М. Сходимость модифицированного экстраградиентного метода для вариационных неравенств с нелипшицевыми операторами. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 5. С. 102–110.

Надійшла до редакції 28.02.2018

В.В. Семенов

ІНЕРЦІЙНІ ГІБРИДНІ МЕТОДИ РОЗЩЕПЛЕННЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРНИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Анотація. Запропоновано нові інерційні алгоритми для розв'язання операторних включень з максимальними монотонними операторами, що діють у гільбертовому просторі. Алгоритми грунтуються на інерційній екстраполяції та трьох відомих методах: алгоритмі розщеплення Ценга і двох гібридних алгоритмах для апроксимації нерухомих точок нерозтягувальних операторів. Доведено теореми про сильну збіжність породжених алгоритмами послідовностей.

Ключові слова: операторне включення, максимальний монотонний оператор, гільбертовий простір, інерційний метод, алгоритм Ценга, гібридний алгоритм, сильна збіжність.

V.V. Semenov

INERTIAL HYBRID SPLITTING METHODS FOR OPERATOR INCLUSION PROBLEMS

Abstract. In this paper, new algorithms are proposed to solve operator inclusion problems with maximal monotone operators acting in a Hilbert space. The algorithms are based on inertial extrapolation and three well-known methods: Tseng forward-backward splitting algorithm and two hybrid algorithms for approximation of fixed points of nonexpansive operators. Theorems on the strong convergence of the sequences generated by the algorithms are proved.

Keywords: operator inclusion problem, maximal monotone operator, Hilbert space, inertial method, Tseng algorithm, hybrid algorithm, strong convergence.

Семёнов Владимир Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.